



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7



СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1

$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 11a(101) \quad (a \neq 0, a = 1, 2, \dots, 9)$$

$$B = \overline{b_1 b_2 b_3}, \quad \cancel{b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{N} \text{ и } b_1, b_2, b_3 < 10} \quad (b_1 \neq 0)$$

$$C = \overline{c_1 c_2} \quad c_{1,2} \in \mathbb{N} \text{ и } c_{1,2} < 10 \quad (c_1 \neq 0)$$

т.к. по условию:

$$A \cdot B \cdot C = n^2, \text{ где } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{нечетное, четное} \quad 11a \cdot 101 \cdot B \cdot C = n^2 \Rightarrow \{a < 10 \text{ и } a \in \mathbb{N}\}$$

$$\Rightarrow B : 11 \text{ и/или } C : 11; B : 101 \text{ и/или}$$

$$C : 101, \text{ но } C \text{ не может быть :}$$

$$101, \text{ так как } C = \overline{c_1 c_2} < 101 \text{ при}$$

$$\forall \text{ д.ч. } c_{1,2}; \Rightarrow B : 101 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = k \cdot 101, \text{ где } k \in \mathbb{N} \text{ и } k < 10, \text{ но тогда}$$

$$B = k \cdot 100 + k = \overline{k0k}, \text{ след. } b_1 = k,$$

$$b_3 = k, b_2 = 0; \text{ но у нас одна из цифр}$$

$$b_{1,2,3} = 1 \Rightarrow b_1 = b_3 = k = 1, \text{ т.к. } b_2 = 0$$

$$\text{Значит, } B = 101, \text{ что не кратно } 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C : 11 \Rightarrow c_1 = c_2 \text{ (т.к. } C \text{ - двузначное}$$

$$\text{и } : 11), \text{ но т.к. одно из } c_1 \text{ и } c_2 = 5,$$

$$\text{то } C = 55$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получаем, что $A \cdot B \cdot C = 11 \cdot a \cdot 101 \cdot$

$$\cdot 101 \cdot 55 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 5a = n^2$$

Значит $a < 10$ должно быть : 5

(т.к. $11^2, 101^2$ - кв. натур. чисел, n^2 -

квадрат натур. числа $\Rightarrow 5a$ - кв.

натур. числа и т.к. $5a : 5$, то

$5a : 25 \Rightarrow a : 5$); что возможно только

при $a = 5$

Ответ : (5555, 101, 55)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 2

$$x, y > 0, \quad y_1 = y + 3, \quad x_1 = x - 3$$
$$(x + y + 1 > 0)$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{y + x + 1}{xy} = \frac{y_1 + x_1 + 1}{x_1 y_1}$$

$$\frac{y + x + 1}{xy} = \frac{x + y + 1}{(x - 3)(y + 3)} \Rightarrow \{x + y + 1 \neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy = (x - 3)(y + 3) = xy - 3y + 3x - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 3y + 9 \Rightarrow x = y + 3$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (y + 3)^3 - y^3 - 9y(y + 3) =$$
$$= y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y =$$
$$= 27$$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = \\ = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \sin \pi x = \\ = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\frac{1 + \sin(2\pi x - \frac{\pi}{2})}{2} + \frac{1}{2} (\cos(\pi y + \pi x) - \\ - \cos(\pi y - \pi x)) = \frac{1 - \sin(2\pi x - \frac{\pi}{2})}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2} (\cos(\pi x + \pi y) + \cos(\pi x - \pi y))$$

$$2 \sin(2\pi x - \frac{\pi}{2}) + \cos(\pi y + \pi x) - \\ - \cos(\pi y - \pi x) = \cos(\pi x + \pi y) + \\ + \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\sin(2\pi x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\pi y - \pi x) \\ - \cos(2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\cancel{2\pi x = \arccos(-\cos(\pi y - \pi x)) +} \\ + 2k\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
2 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~255k~~

$$\arccos(-(\cos(\pi y - \pi x))) =$$

$$= \arccos(\cos(\pi - \pi y + \pi x))$$

$$0 \leq \arccos(\cos(\pi - \pi y + \pi x)) \leq \pi$$

$$2k\pi \leq 2\pi x \leq \pi(2k+1)$$

$$2k \leq 2x \leq 2k+1$$

$$k \leq x \leq \frac{2k+1}{2}$$

$$\arccos(\cos(\pi - \pi y + \pi x)) =$$

$$= \pi - \pi y + \pi x \quad \text{при } * \in [0; \pi]$$

(т.е. $-\pi \leq -\pi y + \pi x \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x - y \leq 0$)

Если $\pi - \pi y + \pi x \notin [0; \pi]$

$$\cos(\pi - 2\pi k) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\begin{cases} \pi - 2\pi k + 2\pi k_1 = \pi y - \pi x + 2\pi k_2 \\ 2\pi x - \pi + 2\pi k_3 = \pi y - \pi x + 2\pi k_4 \end{cases}$$

$$k_{1,2,3,4} \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 3 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = 1 - x + 2k_1 + 2k_2 \\ y = 3x - 1 + 2k_3 - 2k_4 \end{cases}$$

1) $y = 1 - x + 2k$ $k_1 - k_2 = k \in \mathbb{Z}$

2) $y = 3x - 1 + 2k$ $k_3 - k_4 = k \in \mathbb{Z}$

y и $x \in \text{действ.}$

Ответ: $\forall x - \text{действ.}, k \in \mathbb{Z}: (x; 1 - x + 2k); (3x - 1 + 2k)$

d) $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$

$$|\frac{y}{9}| \leq 1 \Rightarrow |y| \leq 9 \Rightarrow -9 \leq y \leq 9$$

$$|\frac{x}{4}| \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

При $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$,

$x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,$

y совб.

1) $y = 5 + 2k; 4 + 2k; 3 + 2k$

$$-4 \leq x \leq 4; -4 \leq -x \leq 4$$

$$-3 \leq 1 - x \leq 5$$

$$-9 \leq -3 + 2k \leq y \leq 5 + 2k \leq 9$$

$$-9 \leq y \leq 9$$

$$-9 \leq 1 - x + 2k \leq 9$$

$$-10 \leq -x + 2k \leq 8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☒☐☐☐☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-10 + x \leq 2k \leq 8 + x$$

$$-14 \leq 2k \leq 12$$

$$-7 \leq k \leq 6$$

$$\cancel{k \geq 2} -$$

$$-7 \leq k \leq 2$$

При $x = -4$, $-14 \leq 2k \leq 12$, т.е.

смысл. 10 знач. $k \Rightarrow$ 10 знач.

и для $x = -4$, $-6 \leq k \leq 2$

При $x = -3$, $-13 \leq 2k \leq 5$, т.е.

смысл. 9 знач. $k \Rightarrow$ 9 знач.

При $x = -2$, $-6 \leq k \leq 3$, т.е.

10 корней

При $x = -1$, $-5 \leq k \leq 3$, т.е.

9 корней

При $x = 0$, $-4 \leq k \leq 4$, т.е.

10 корней

При $x = 1$, $-3 \leq k \leq 4$, т.е.

9 корней



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☒☐☐☐☐

СТРАНИЦА
5 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При $x = 2$, $-4 \leq k \leq 5$, т.е.

10 корней

При $x = 3$, ~~8~~ 9 корней

При $x = 4$, 10 корней

$$\text{Если } -9 \leq 3x - 1 + 2k \leq 9$$

$$-8 \leq 3x + 2k \leq 10$$

При x



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

6 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

О.А.Б.М.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 4

Пусть n — количество пассажиров было n , тогда при n -ех билетах вероятность того, что 1 из пассажиров получит билет равна $\frac{1}{n}$, т.к. можно взять ~~любую~~ из n мест и первые k номеров, где k — кол-во билетов. Если i -ый человек попадет при случайной перестановке на одно из k мест, то он получает билет. Для 1-ого конкретного человека, в таком случае будет $k(n-1)!$ благоприятных исходов (поскольку каждый благ. случай — это когда ~~каждый~~ ^{выбор} ~~каждый~~ ^{выбор} попадает на одно из k первых мест, но для каждого такого места из k , в ком. попал ~~каждый~~ ^{выбран} ~~каждый~~ ^{выбран}).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 4

учетик, есть еще $(n-1)!$ перестановок для ост. $(n-1)!$ учетиков.

Всего исходов $n!$ (логично, кол-во перестановок учетиков)

Тогда при розыгр. k билетов вероятность одного из мальчиков (Петя или Васа) взять билет:

$$\frac{k(n-1)!}{n!} = \frac{k}{n} \quad (\text{при } 4\text{-ех билетах это } \frac{4}{n})$$

Но тогда, если один с вер.

$\frac{k}{n}$ получит билет, то в розыгрыше будет $k-1$ билетов на

$n-1$ участника (точно также вернуться к месту розыгр., где 1 уже занято нужным учетиком); тогда вероятность 2-ого выбранного учетика (Петя,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☒ 4

☐ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

если 1-ый билет у Васи и наоборот)

$$\frac{(k-1)(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{k-1}{n-1}$$

Вероятность того, что оба мальчика получат билеты: $\frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1}$

(т.к. это зав. события; ~~для~~
~~прохода обоих оба должны попасть~~
~~на разнесены в зоне из k~~
~~кресел оставших билетов~~)

Напомним, что k - кол-во билетов

При $k=4$; вер.: $\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$ (вер. в нам. мес.)

В конце месяца при каком

$$k \geq 4; \text{ вер.: } \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} = 3,5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}$$

$$k^2 - k = 42$$

$$k^2 + 6k - 7k - 42 = 0$$

$$(6+k)(k-7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -6 < 4 \\ k = 7 > 4 - \text{подх} \end{cases}$$

Значит, выделим по итогу 7 бил.

Ответ: 7



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

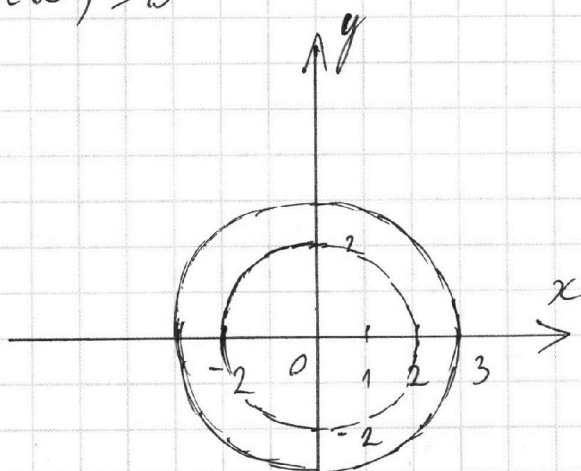
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 6

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

* $x^2 + y^2 \leq 9$ —

круг ~~на~~ декартовой
с.к. радиуса 3 с
центром в точке (0; 0)



$$(x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \cos \alpha \geq 0 \\ y - 2 \sin \alpha \geq 0 \\ x - 2 \cos \alpha \leq 0 \\ y - 2 \sin \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \cos \alpha \\ y \geq 2 \sin \alpha \\ x \leq 2 \cos \alpha \\ y \leq 2 \sin \alpha \end{cases}$$

Возьмем некоторые y_1, x_1 , ~~где~~:

$$y_1 = 2 \sin \alpha; \quad x_1 = 2 \cos \alpha;$$

Тогда любая такая пара точек

$(x; y) = (x_1; y_1)$ на координ. пл-ти ~~есть~~

лежит на окр. $x^2 + y^2 = 4$ с центром



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

в точке $(0; 0)$ и радиусом 2

Взяв некоторую
пару $(x_1; y_1)$ на
окр $x^2 + y^2 = 4$

увидим, что

искомая фигура

есть ~~наложение~~

пересечение площади

круга * и четвертей

плоскости ** и ** (см. рис)

Ее периметр склад. из дуг $\overset{\frown}{AB}$
и $\overset{\frown}{CD}$ и отр AD и BC

Заметим, что $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = 180^\circ = \pi$ т.к.

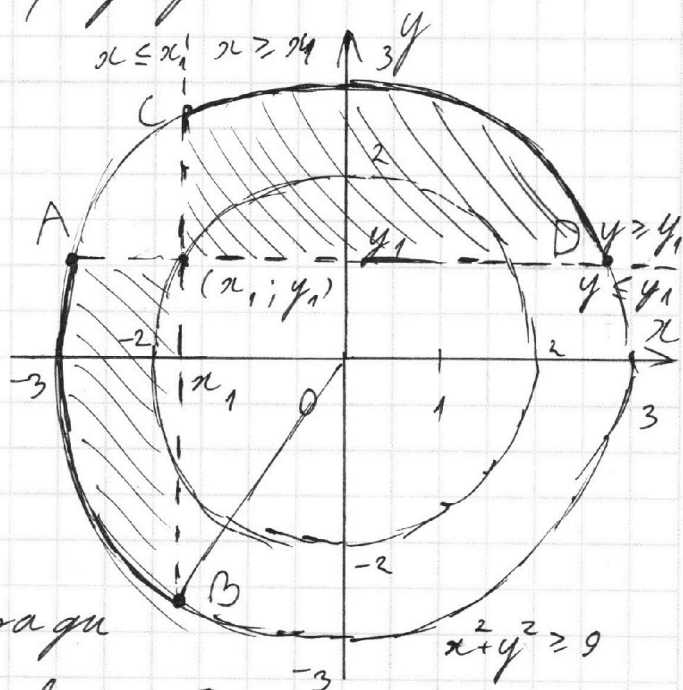
угол между хордами AD и $BC = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$

то $\frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2} = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, но длина дуг есть

~~рад~~ ^{рад} мера дуг на радиус $\Rightarrow$

$$L_{\cup AB} + L_{\cup CD} = R \overset{\frown}{AB} + R \overset{\frown}{CD} = R (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}) =$$

$$= 3 \cdot \pi$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 6

Значит необходимо максимизировать
 $BC + AD$

Заметим, что

$$\frac{BC}{4} = R^2 - |x_1|^2$$

$$BC = \sqrt{4R^2 - 4^2 \cos^2 \alpha}$$

(см. рис)

$$\frac{AD}{4} = R^2 - |y_1|^2$$

$$AD = \sqrt{4R^2 - 4 \sin^2 \alpha}$$

$$BC + AD = 2\sqrt{R^2 - 4 \cos^2 \alpha} + 2\sqrt{R^2 - 4 \sin^2 \alpha} =$$

$$= 2(\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}) - \max,$$

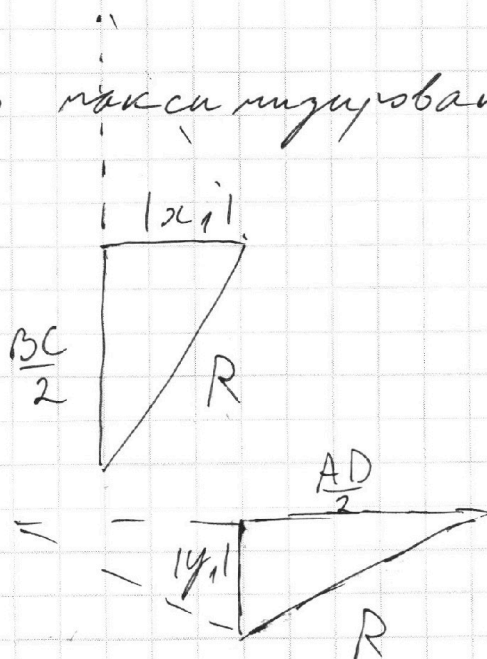
или $\bullet - \max$

Пусть $\bullet = a \geq 0$

Тогда $\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} = a - \max,$

$$\text{если } (\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha})^2 = a^2 -$$

$\max (a > 0!)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
9 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & 9 - 4 \cos^2 2\alpha + 2 \sqrt{(9 - 4 \cos^2 2\alpha)(9 - 4 \sin^2 2\alpha)} + \\
 & + 9 - 4 \sin^2 2\alpha = 16 - 4(\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha) + \\
 & + 2 \sqrt{81 - 36 \cos^2 2\alpha - 36 \sin^2 2\alpha + 16 \cos^2 2\alpha \sin^2 2\alpha} = \\
 & = 14 + 2 \sqrt{45 + 4 \sin^2 2\alpha} - \max \\
 & \text{при } 4 \sin^2 2\alpha - \max, \text{ а } 4 \sin^2 2\alpha - \\
 & - \max \text{ при } \sin^2 2\alpha = 1 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \pm 1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 2\alpha &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
 2\alpha &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi
 \end{aligned}$$

 $\Rightarrow$


$$2\alpha = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned}
 \pi \text{ тогда } \max a^2 &= 14 + 2\sqrt{45 + 4} = \\
 &= 28
 \end{aligned}$$

$$\pi \text{ тогда } \max a = 2\sqrt{7}$$

След. $\max$ периметр гхст. при 2α
 $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ и равно $l_{AB} + l_{CD} + AD + BC =$
 $= 4\sqrt{7} + 3\pi$

Ответ: $4\sqrt{7} + 3\pi$ при $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1+x+y}{xy} = \frac{1+x+y}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = xy - 3y + 3x - 9$$

$$x - y = 3$$

$$x = 3 + y$$

$$x^3 - y^3 - 9xy$$

$$27 + 9y^2 + 27y + y^3 - y^3 - 27y - 9y^2 =$$

$$= 27$$

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + \sin^2 60^\circ = \frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2 \cdot 2}}$$

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos a}{1 + \sin(a - \frac{\pi}{4})}$$

$$\sin a \cos(\frac{\pi}{2} - a) = \frac{1}{2}(\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 60^\circ = \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \sin \pi x =$$

$$= \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \varphi \cos \tau = \sin \varphi + \tau + \sin \rho - \tau$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 90^\circ - \cos 30^\circ = -2 \sin 60^\circ \sin 30^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A \quad \overline{aaaa} = 1100a + 11a = 11a(101)$$

$$B \quad \overline{b_1 b_2 b_3}$$

$$C \quad \overline{c_1 c_2}$$

$$\text{Если } B: 11, \text{ то } b_1 + b_3 = b_2$$

$$\text{Если } C: 11, \text{ то } C = 55$$

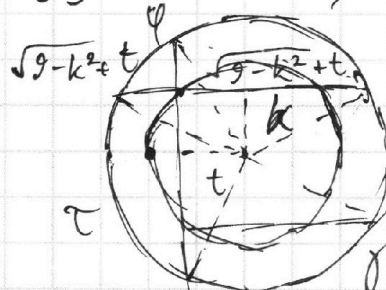
$$13 \quad 23$$

$$17$$

$$29$$

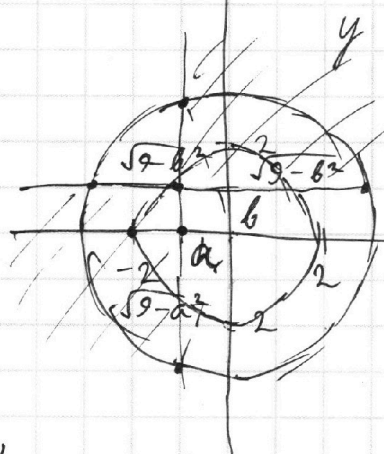
$$31$$

$$\approx 37$$



$$t + \frac{1}{2}$$

$$(t^2 + y^2 = 9)$$



$$\sqrt{9-k^2} + \sqrt{9-k^2} - \max$$

$$\sqrt{9-4\sin^2 d} + \sqrt{9-4\cos^2 d}$$

$$\cos \pi = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{3}{4}$$

$$x^2 + y^2 \leq 9$$

$$-x \cdot 2 \cos d +$$

$$+ xy - 2y \cos d +$$

$$+ 2 \sin 2d \geq 0$$

$$y \geq \frac{2x \sin d - 2 \sin 2d}{x - 2 \cos d} \geq \frac{2 \sin d}{\frac{1}{2}}$$

$$y \geq 2 \sin d$$

$$x \geq 2 \cos d$$

$$x \geq 2 \cos d$$

$$x \leq 2 \cos d$$

$$y \leq 2 \sin d$$

$$16 + \sqrt{16}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{26}{5R^2} - \sqrt{\left(1 - \frac{169}{25R^2}\right)\left(1 - \frac{4}{R^2}\right)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n - кол-во углов.

$$3,5 \left(\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \right) = \left(\frac{x}{n} \cdot \frac{x-1}{n-1} \right)$$

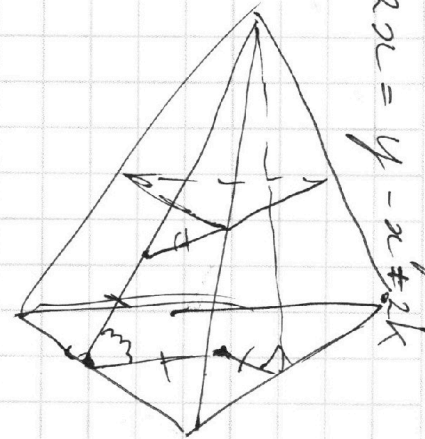
$$42 = x^2 - x$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

$$x^2 - 7x + 6x - 42 = 0$$

$$x(x-7) + 6(x-7) = 0$$

$$x = 7$$



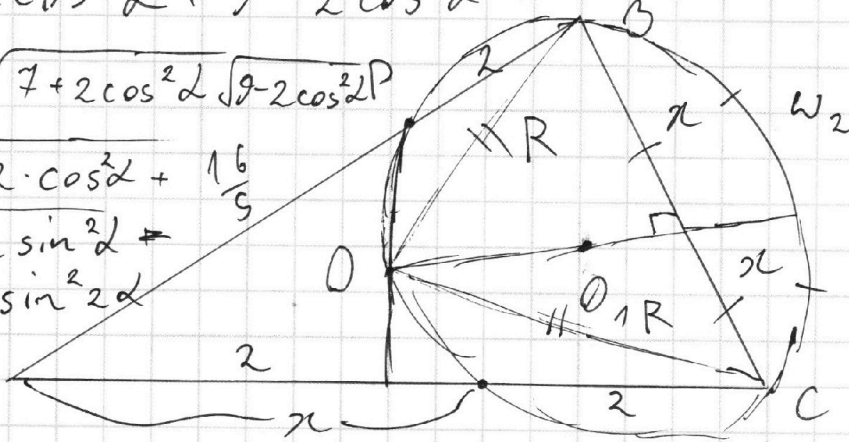
$$+ (95 - 25x) = 4x - x + 2x$$

$$7 + 2 \cos^2 2 + 9 - 2 \cos^2 2 +$$

$$+ 2 \sqrt{7 + 2 \cos^2 2} \sqrt{9 - 2 \cos^2 2}$$

$$2 \sqrt{9 \cdot 2 \cdot \cos^2 2} + \frac{16}{5}$$

$$+ 9 \cdot 2 \sin^2 2 + 2 \sin^2 2$$



$$\sin^2 2 = 1 \quad AC = 4$$

$$\frac{16}{5} \cdot 2 = x \cdot 4$$

$$\begin{aligned} 2\alpha &= 90^\circ & 4 - \frac{6}{5} &= \frac{6}{5} = x \\ & & &= \frac{12}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 1 - x + 2x \\ y &= 3x - 1 + 2x \end{aligned}$$