



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н1.

цифра простая

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = \overline{a} \cdot \overline{101} \cdot \overline{11}$$
$$B = \overline{bcd}$$
$$C = \overline{ef}$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2, \text{ где } n \in \mathbb{N}$$

$$A \cdot B \cdot C = \overline{a} \cdot \overline{101} \cdot \overline{11} \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{ef} = n^2$$

Т.к. в разложение квадрата натурального числа на простые множители все простые делители входят в чётных степенях, $\overline{a} \cdot \overline{11} \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{ef} : \overline{101}$ и $\overline{a} \cdot \overline{101} \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{ef} : \overline{11}$.

Из первого условия делаем вывод, что $\overline{bcd} : \overline{101}$, потому что $a < 101$ и $\overline{ef} < 101$. Т.к. $\overline{bcd}$ — трёхзначное число, в составе которого есть 7, и $\overline{bcd} : \overline{101}$, $\overline{bcd} = 707 = 7 \cdot 101$.

Тогда получим: $\overline{a} \cdot \overline{101} \cdot \overline{11} \cdot 7 \cdot \overline{101} \cdot \overline{ef} = n^2$.

Аналогично докажем, что $\overline{ef} : \overline{11}$, ~~и т.д.~~ Т.к. $a < 11$.

Т.к. в $\overline{ef}$ есть хотя бы одна цифра 1, то $\overline{ef} = 11$.

Тогда $\overline{a} \cdot \overline{101} \cdot \overline{11} \cdot 7 \cdot \overline{101} \cdot \overline{11} = n^2$. Т.к. a — цифра, по аналогичным соображениям делимости получим $a = 7$.

Итог: $A = 7777$, $B = \overline{707}$, $C = 11$.

Ответ: $(7777; \overline{707}; 11)$



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$$

$$x, y > 0$$

по условию

$$\text{ДРЗ: } \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 4 \\ y \neq -4 \end{cases} \xrightarrow{x, y > 0} x \neq 4$$

$$K' = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$K = K' : \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$\parallel$

$$\begin{cases} x+y+3=0 \\ xy=(x-4)(y+4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=xy-4y+4x-16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3-y \\ x=y+4 \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy$$

~~Подставим x для каждого из случаев:~~

~~$$\begin{aligned} M &= (-3-y)^3 - y^3 - 12(-3-y)y = -(3+y)^3 - y^3 + 12(3+y)y = \\ &= -(27 + 27y + 9y^2 + y^3) - y^3 + 36y + 12y^2 = -(y+3)^3 - y^3 + 12y + 36 = \\ &= (y+3)(12y - (y+3)^2) - y^3 = (y+3)(12y - y^2 - 6y - 9) - y^3 = (y+3)(-y^2 + 6y - 9) - y^3 = \\ &= -(y+3)(y-3)^2 - y^3 = -(y+3)(y-3)^2 - y^3 \end{aligned}$$~~

Заметим, что случай (1) не реализуется, т.к. $x, y > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Рассм. случай (2): } M &= (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y = \\ &= (y+4)(y+4)^2 - 12y - y^3 = (y+4)(y^2 + 8y + 16 - 12y) - y^3 = (y+4)(y^2 - 4y + 16) - \\ &- y^3 = (y^3 + 4^3) - y^3 = 4^3 = 64. \end{aligned}$$

Ответ: 64.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н3.

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$(\cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y) + (\cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y) = 0$$

$$\cos 2\pi y + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$\cos 2\pi y = -\cos(\pi x - \pi y)$$

$$\begin{cases} 2\pi y = (\pi x - \pi y) + \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi y = \pi - (\pi x - \pi y) + 2\pi h, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = x - y + 1 + 2k \\ 2y = 1 - x + y + 2h \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x-1+2k}{3} \\ y = 1-x+2h \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2k}{3} \quad (1) \\ y = 1 - x + 2h \quad (2) \end{cases} \quad \text{(здесь } x \text{ — любое действительное)}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2k+1+x}{3} \\ y = 1-x+2h \end{cases}$$

$$b) \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{7} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leq x \leq 7 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

~~Подстановка y из п. а)~~

$$1. y = x + 1 + 2k$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \left(\frac{x+1+2k}{4} \right) > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \left(\frac{x+1}{4} + \frac{k}{2} \right) > -\frac{\pi}{2}$$

Известно, что $\arcsin \alpha + \arccos \alpha = \frac{\pi}{2}$ при допустимых значениях α . Воспользуемся этим.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin \frac{y}{4} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Тогда $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2} = \cancel{\arccos \frac{x}{7}} - \arccos \frac{y}{4} - \arcsin \frac{y}{4}$

$$\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0 \quad (*)$$

$$\arccos \frac{x}{7} \in [0; \pi]$$

$\Rightarrow (*)$ выполняется всегда, кроме случая $\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} = 0 \\ \arccos \frac{y}{4} = 0 \end{cases}$

Решим эту систему: $\begin{cases} \frac{x}{7} = 1 \\ \frac{y}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$

Тогда пер-ву δ) удовл. все $x \in [-7; 7]$ и все $y \in [-4; 4]$,
Остаток совместить α) и δ). Кроме пар $(7; 4)$.

Составим таблицу возможных вариантов. Учитывая только $x, y \in \mathbb{Z}$.

x из δ)	y из α) по (1), удовл. δ)	y из α) по (2), удовл. δ)	кол-во пар $x, y \in \mathbb{Z}$
-7	-4; -2; 0; 2; 4	-4; -2; 0; 2; 4	5
-6	-3; -1; 1; 3	-3; -1; 1; 3	4
-5	-4; -2; 0; 2; 4	-4; -2; 0; 2; 4	5
-4	-3; -1; 1; 3	-3; -1; 1; 3	4
-3	-4; -2; 0; 2; 4	-4; -2; 0; 2; 4	5
-2	-3; -1; 1; 3	-3; -1; 1; 3	4
-1	-4; -2; 0; 2; 4	-4; -2; 0; 2; 4	5
0	-3; -1; 1; 3	-3; -1; 1; 3	4
1	-4; -2; 0; 2; 4	-4; -2; 0; 2; 4	5
2	-3; -1; 1; 3	-3; -1; 1; 3	4
3	-4; -2; 0; 2; 4	-4; -2; 0; 2; 4	5
4	-3; -1; 1; 3	-3; -1; 1; 3	4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

5	-4; -2; 0; 2; 4	-4; -2; 0; 2; 4	5
6	-3; -1; 1; 3	-3; -1; 1; 3	4
7	-4; -2; 0; 2	-4; -2; 0; 2	4

Получаем в итоге ~~11 + 4 + 56 пар~~

$$9 \cdot 7 + 4 = 67 \text{ пар.}$$

Ответ:

a) $y = \frac{2k+1+x}{3}, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

или

$$y = 1 - x + 2n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$$

b) 67.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н.н.
Пусть было n одиннадцатиклассников. Найдем вероятность в начале месяца:

$$P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{3 \cdot 4}{n(n-1)}$$

Пусть в конце месяца было выделено k билетов ($k > 4$). Найдем вероятность в конце месяца.

$$P_2 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}}{\frac{n!}{k!}} = \frac{(n-2)! k!}{n! (k-2)!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

По условию $11P_1 = P_2$. Подставим P_1 и P_2 .

$$\frac{11 \cdot 12}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \Rightarrow k = 12.$$

Ответ: 12.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.

Пусть $\angle CAB = \alpha$. Тогда $\angle COB = 2\alpha$ (центральный угол в 2 раза больше соответствующего вписанного). В ΔCOB и ΔCPB

опираются на одну дугу, тогда $\angle COB = \angle CPB = 2\alpha$.

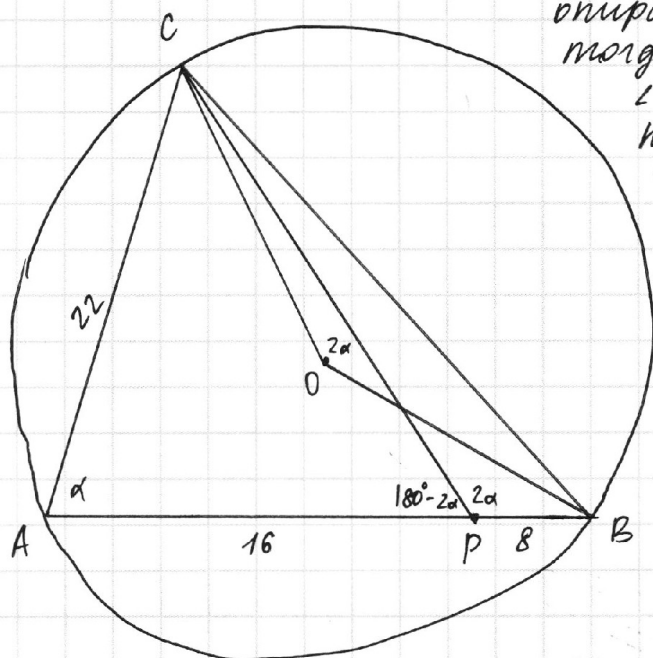
$$\angle APC = 180^\circ - \angle CPB = 180^\circ - 2\alpha$$

по св-ву смежных углов.

$$\text{Тогда } \angle ACP = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = \alpha = \angle CAP,$$

т.к. сумма углов Δ есть 180° .

$\Rightarrow \angle CAP$ равнобедренный ($PC = PA = 16$).



Т.к. ΔAPC равнобедренный, PH — медиана и высота, применим теорему косинусов для ΔACP : тогда $AH = HC = 11$.

$$\frac{CP^2}{16^2} = \frac{AC^2 + AP^2}{2 \cdot AC \cdot AP \cdot \cos \alpha}$$

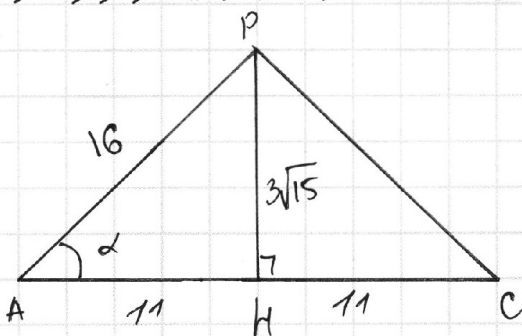
$$PH = \sqrt{16^2 - 11^2} = \sqrt{5 \cdot 27} =$$

$$= 3\sqrt{15} \text{ по теореме}$$

Пифагора.

$$\text{Тогда } \sin \alpha = \frac{3\sqrt{15}}{16}.$$

$$AB = AP + PB = 16 + 8 = 24$$



Площадь ABC найдем так: $S_{ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin \alpha}{2} =$

$$= \frac{22 \cdot 24 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16}}{2} = \frac{22 \cdot 24 \cdot 3\sqrt{15}}{2 \cdot 16} = \frac{99\sqrt{15}}{2}.$$

Ответ: $\frac{99\sqrt{15}}{2}.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

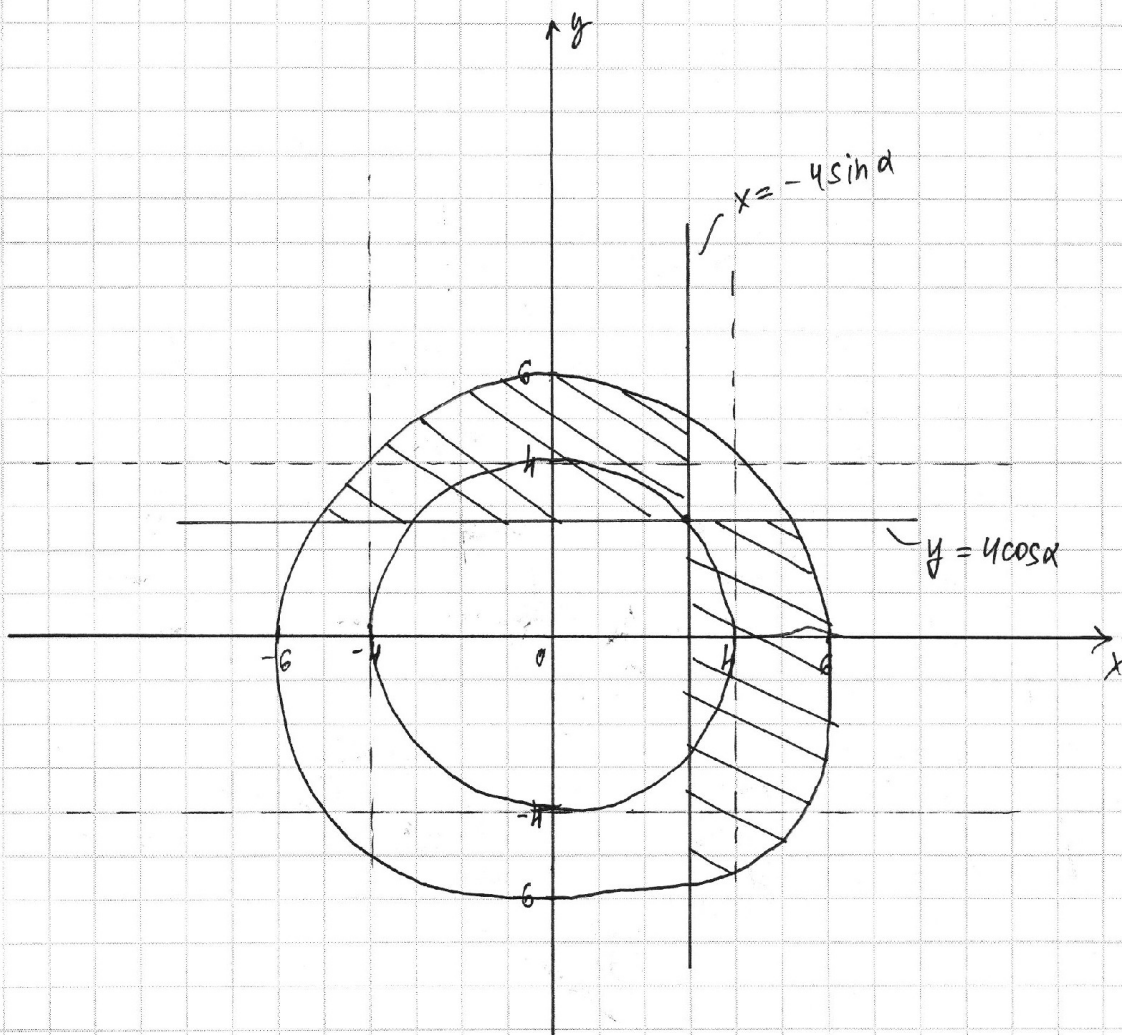
5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2+y^2 \leq 36 & (2) \end{cases}$$

(2) задаёт точки, лежащие внутри и на границе окр-ти с центром $(0;0)$ радиуса 6.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+4\sin\alpha \leq 0 \\ y-4\cos\alpha \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4\sin\alpha \\ y \geq 4\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4\sin\alpha \geq 0 \\ y-4\cos\alpha \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4\sin\alpha \\ y \leq 4\cos\alpha \end{cases}$$

При фиксированном α $x = -4\sin\alpha$ - вертикальная прямая, $y = 4\cos\alpha$ - горизонтальная прямая. При этом $(4\sin\alpha)^2 + (4\cos\alpha)^2 = 16$ по основному тригонометрическому тождеству.

$$|4\sin\alpha| \leq 4, \quad |4\cos\alpha| \leq 4.$$

Тогда наша область на пл-ти задаётся так: мы берём точку на расстоянии 4 от $(0;0)$ (т.е. на окр-ти с центром $(0;0)$ радиуса 4), проводим через неё горизонтальную и вертикальную прямые и считаем периметр области, удовлетворяющей совокупности выше (пример см. далее).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

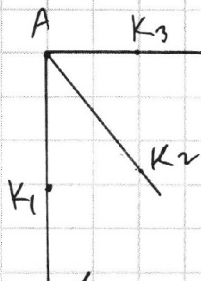
6
☐

7
☒

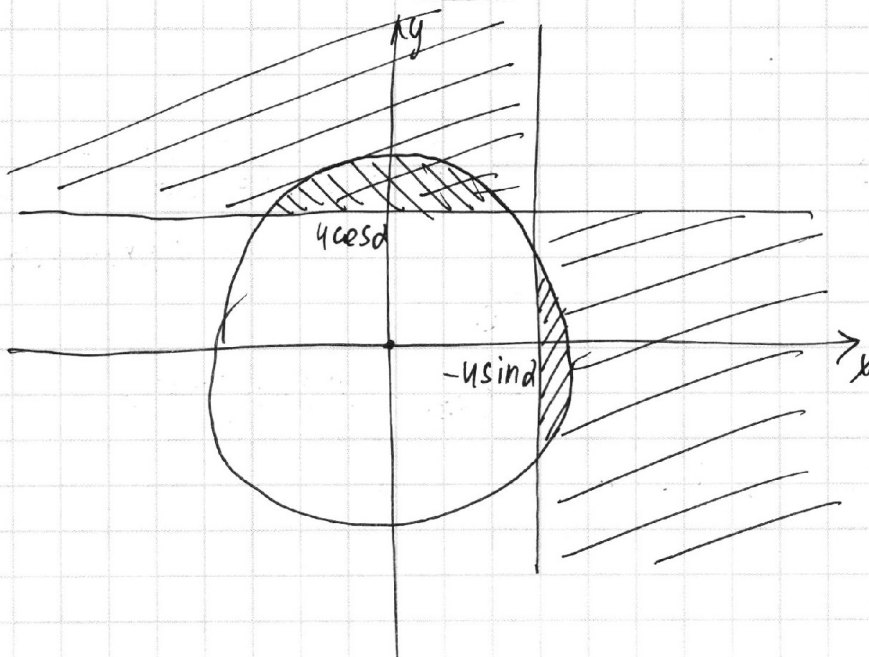
СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим трехгранный угол при одном из оснований пирамиды. K_1, K_2, K_3 — точки касания ребер с шаром Σ . Тогда $AK_1 = AK_2 = AK_3$. При этом, т.к. пирамида правильная и усеченная, все ее боковые грани — равнобокие трапеции. Пусть AK_1 и AK_3 — ребра основания.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть было n одиннадцатиклассников. Найдем вероятность в начале месяца:

$$P_1 = \frac{C_n^2}{C_n^4} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{3 \cdot 4}{(n-2)(n-3)}$$

Пусть в конце месяца ^{было} выделено k билетов ($k > 4$). Найдем вероятность в конце месяца.

$$P_2 = \frac{C_n^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{n!}{(n-k+2)!(k-1)!}}{\frac{n!}{(n-k)!k!}} = \frac{(n-k)!k!}{(n-k+2)!(k-2)!} = \frac{k(k-1)}{(n-k+1)(n-k+2)}$$

По условию $11P_1 = P_2$. Подставим P_1 и P_2 .

$$\frac{11 \cdot 12}{(n-2)(n-3)} = \frac{k(k-1)}{(n-k+1)(n-k+2)}$$

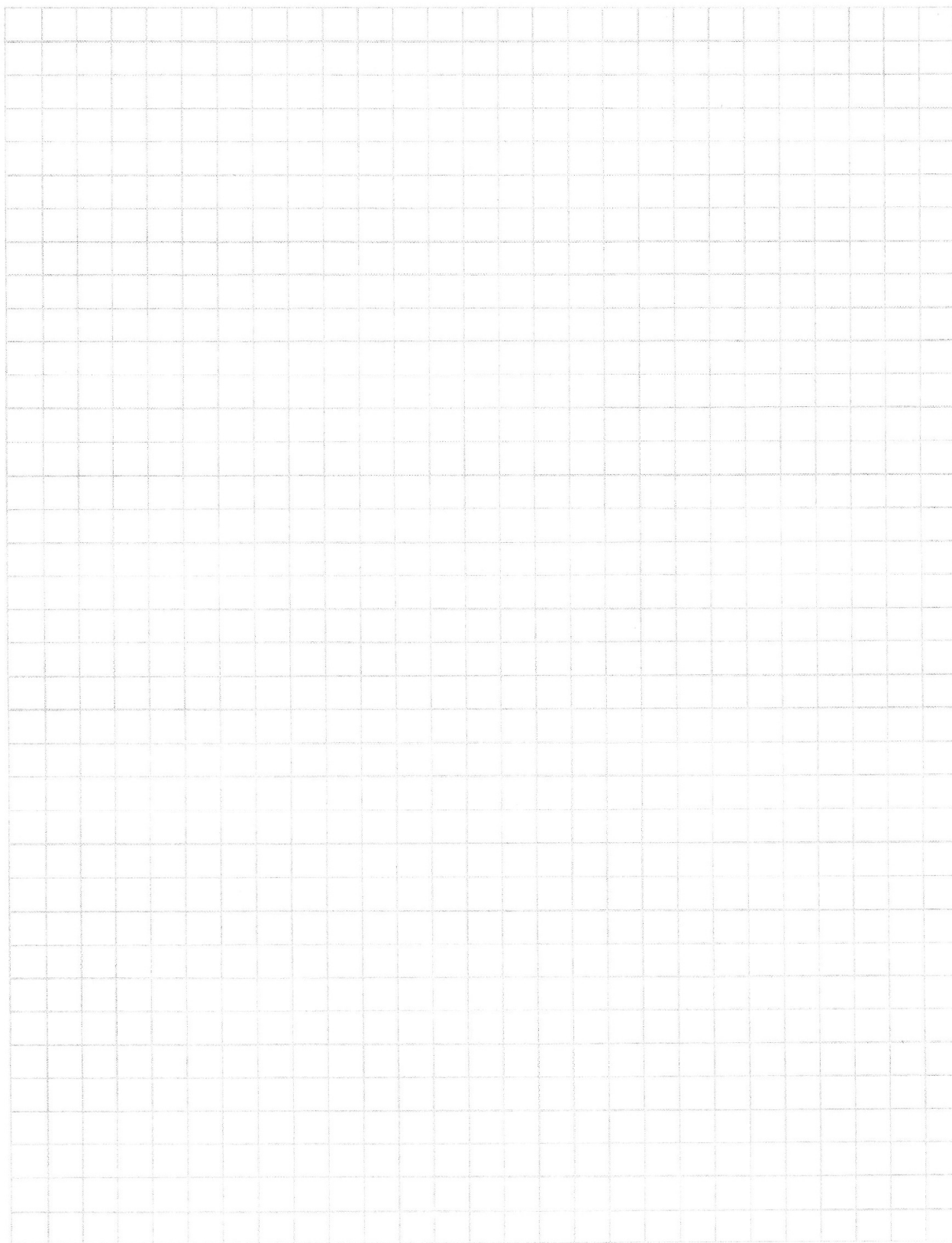


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



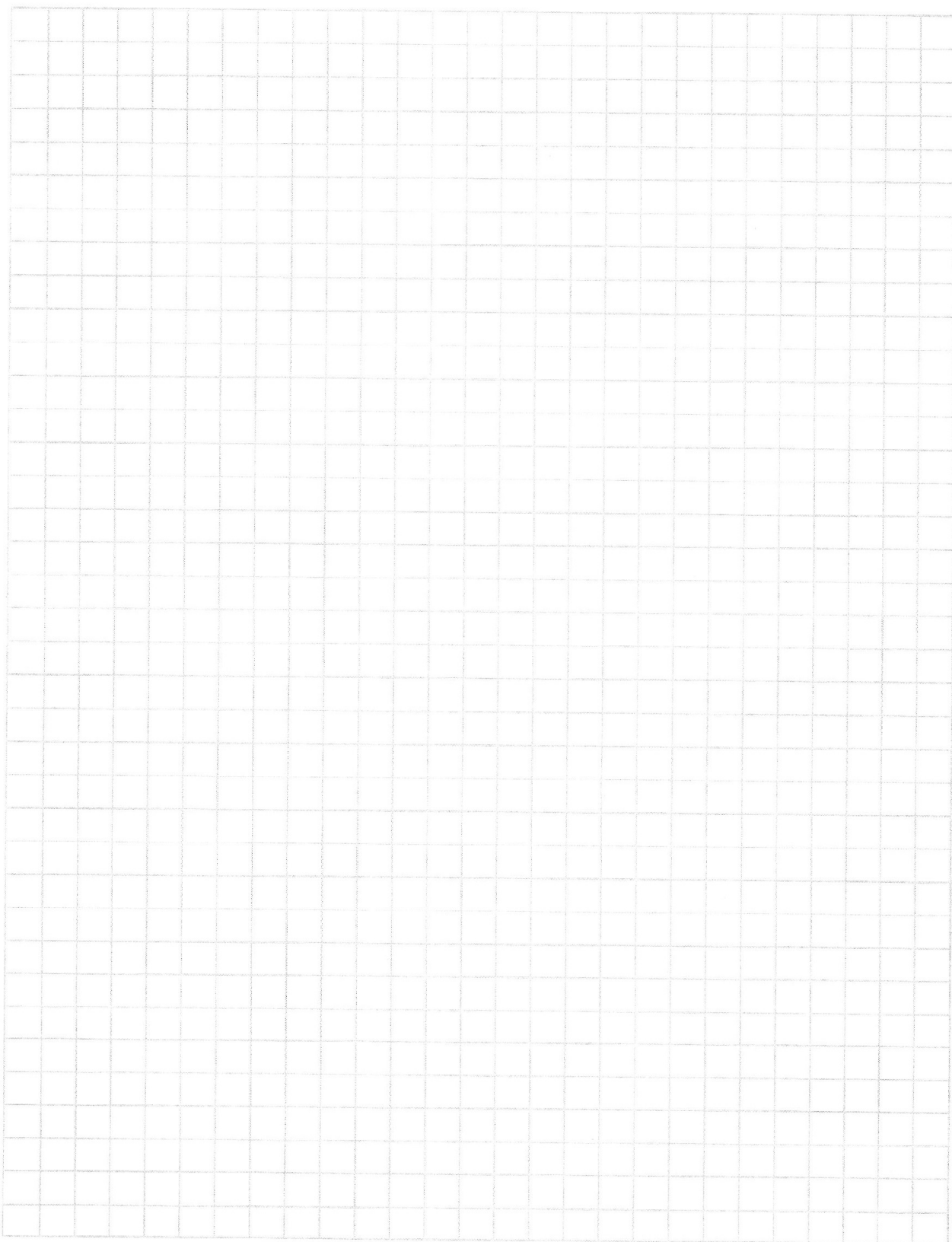


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 1 \cdot 4}$$

$$x = -7:$$

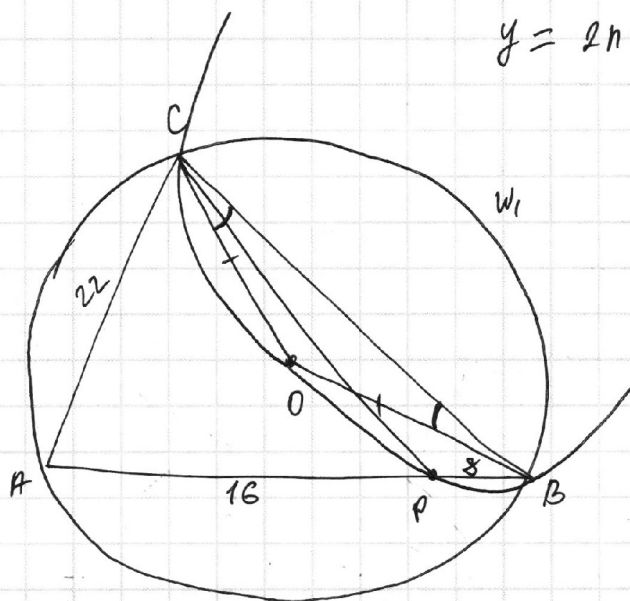
$$x = -6:$$

$$y = \frac{2k-6}{3}$$

$$y = \frac{2k-5}{3}$$

$$y = 2n+8$$

$$y = 2n+7$$



$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4\sin\alpha \leq 0 \\ y-4\cos\alpha \geq 0 \\ x+4\sin\alpha \geq 0 \\ y-4\cos\alpha \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases} \begin{cases} x \leq -4\sin\alpha \\ y \geq 4\cos\alpha \\ x \geq -4\sin\alpha \\ y \leq 4\cos\alpha \end{cases}$$

✖

$$\begin{aligned} & -(3+y)^3 - y^3 + 12y(3+y) = (3+y)(-(3+y)^2 + 12y) - y^3 = \\ & = (3+y)(-y^2 - 6y - 9 + 12y) - y^3 = -(3+y)(y-3)^2 - y^3 = -(y+3)(y-3)^2 - y^3 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 101 \cdot 11 \quad 33 < \sqrt{1111} < 34$$

$$B = \overline{bcd}$$

$$10 < \sqrt{101} < 11$$

$$C = \overline{ef}$$

$$\overline{bcd} : 101$$

$$101 \cdot 11$$

$$a \cdot \overline{1111} \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{ef} = n^2$$

$$407 = \overline{bcd}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x^2 - 12y)(x + y) +$$

$$+ 12y^2 - y^3 = (x^2 - 12y)(x + y) + y(12y - x^2 - y^2)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y+y} + \frac{3}{(x-y)(y+y)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-y)(y+y)}$$

$$(x+y+3) = (x-y)(y+y)$$

$$xy = (x-y)(y+y) = xy + 4x - 4y - 16$$

$$(x+y) = 4$$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

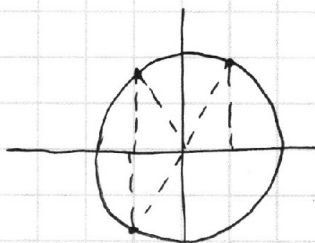
$$\cos 2\pi y + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$\cos 2\pi y = -\cos(\pi x - \pi y)$$

$$3y = 1 - x + 2h$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > \frac{\pi}{2} = -\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4}$$

$$2 \arccos \frac{x}{7} > \arcsin \frac{y}{4} - \arcsin \frac{y}{4}$$



$$M = x^3 - y^3 - 12xy = x(x^2 - 12y) - y^3 + y(x^2 - 12y) - y(x^2 - 12y) =$$

$$y(x^2 - 12y) = yx^2 - 12y^2$$

$$= (x+y)(x^2 - 12y) - y(y^2 - 12y + x^2)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$x = 4 - y: M = (4-y)^3 - y^3 - 12(4-y)y = 64 - 48y + 12y^2 - y^3 - y^3 - 48y + 12y^2$$

$$\begin{array}{r} x^3 2 \\ \underline{+ 6 4} \\ 9 6 4 \\ \underline{+ 9 9} \\ 10 2 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 4 \\ \underline{+ 13 6} \\ 10 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 7 \\ \underline{- 7} \\ 41 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \underline{- 61} \\ 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 101 \\ \underline{- 11} \\ 101 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\# \quad K = 12$$

$$(h-2)(h-3) = (h-11)(h-10)$$

$$\cancel{16h}$$

$$\cancel{n^2} - 5n + 6 = \cancel{n^2} - 21n + 110$$

$$16h = 104$$

$$4h = 26$$

$$2h = 13$$

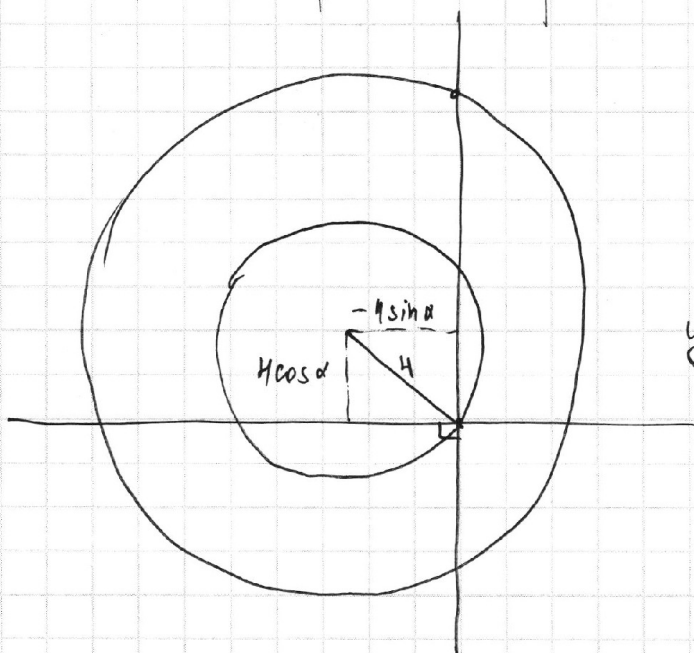
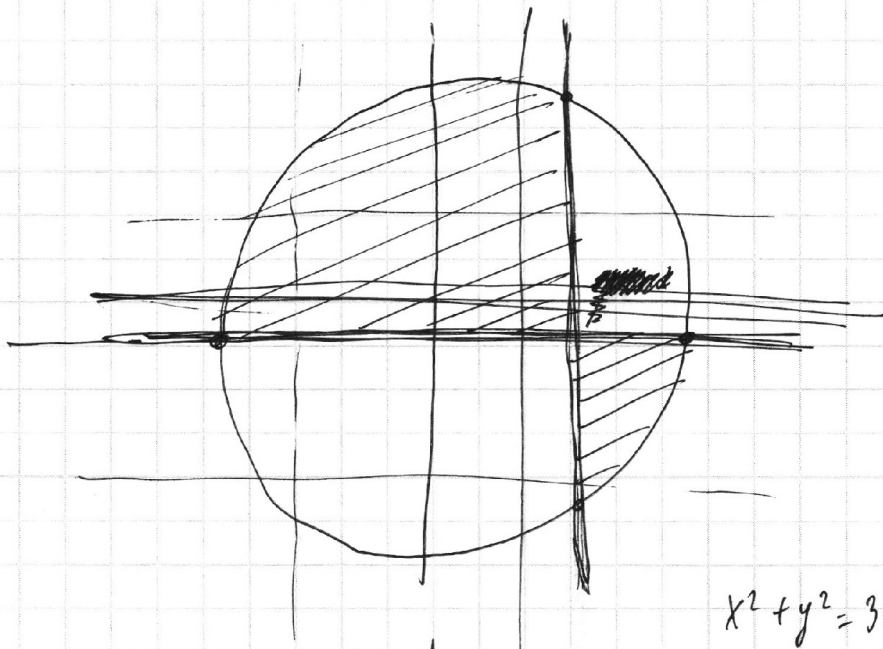
$$\frac{\overset{11}{22} \cdot \overset{3}{24} \cdot 3\sqrt{15}}{\cancel{16} \cdot \cancel{2}} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + y^2 = 36$$

$$x = 4 \sin \alpha$$

$$16 \sin^2 \alpha + y^2 = 36$$

$$y = \pm \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$$

$$y = 4 \cos \alpha$$

$$x^2 + 16 \cos^2 \alpha = 36$$

$$x = \pm \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$$