МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \left(x + 5\sqrt{2}\cos\alpha\right)\left(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha\right) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 169. \end{cases}$$

   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.

№ 1

1) Пусть x – цифра числа A $(x \in [1;9])$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow A = 1000x + 100x + 10x + x = 1111x$

Заметим, что $1111 = 11 \cdot 101$, где 11 и 101 – простые числа

2) Тогда $A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot x \cdot B \cdot C = m^2$, где $m \in N$

$$\left.\begin{matrix} m^2 \vdots 11 \\ m^2 \vdots 101 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} m^2 \vdots 11^2 \\ m^2 \vdots 101^2 \end{matrix} \Rightarrow B \cdot C \vdots 11 \cdot 101 = 1111$$

3) Рассмотрим следущие случаи:

1. $B \vdots 1111$, $C \ldots$ – невозможно, т.к. B – трёхзначное число
2. $B \ldots$, $C \vdots 1111$ – невозможно, т.к. C – двузначное число
3. $B \vdots 11$, $C \vdots 101$ – невозможно, т.к. C – двузначное число
4. $\left.\begin{matrix} B \vdots 101 \\ C \vdots 11 \end{matrix}\right\}$ – единственно возможный случай

единственный случай, иных нет

4) т.к. одна из цифр числа $B = 6$, то $B = 101 \cdot 6 = 606$

т.к. одна из цифр числа $C = 3$, то $C = 11 \cdot 3 = 33$

единственный возможный случай

5) $$\left.B \cdot C \cdot A = \underbrace{11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2}_{\text{уже полный квадрат натурального числа}} \cdot 2x \vdots m^2 \right\} 2x \text{ – полный квадрат} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \Rightarrow 2x = 2^2 \\ x = 8 \Rightarrow 2x = 4^2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_1 = 2222 \\ A_2 = 8888 \end{matrix}$$

Ответ: $(2222; 606; 33)$; $(8888; 606; 33)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

1) Из условие получаем, что: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$

Преобразуя его, получаем: $\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow (y+x+5)\left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-2)(y+2)}\right) = 0$

2) т.к. $x>0; y>0$, то $y+x+5>5 \Rightarrow y+x+5 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-2)(y+2)} = 0 \Rightarrow \frac{xy-2y+2x-4-xy}{xy(x-2)(y+2)} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x-y-2}{xy(x-2)(y+2)} = 0$ т.к. из условия задачи мы можем считать, что выражение к существует, то $x = y+2$ – ед. условие

3) Получаем, что $y = x-2$, тогда:

$M = x^3 - y^3 - 6xy = x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2) =$

$= x^3 - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 6x^2 + 12x =$

$= x^3 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x = 8$ – единственно возможное значение M

Ответ: 8

№3

а) $(\sin\pi x + \sin\pi y)\sin\pi x = (\cos\pi x - \cos\pi y)\cos\pi x$

$\sin^2\pi x + \sin\pi x\cdot\sin\pi y = \cos^2\pi x - \cos\pi y\cdot\cos\pi x$

$\cos\pi x\cos\pi y + \sin\pi x\sin\pi y = \cos^2\pi x - \sin^2\pi x$

$\cos(\pi(x-y)) = \cos(2\pi x)$

1) $\pi(x-y) = 2\pi x + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$x - y = 2x + 2n,\ n\in\mathbb{Z}$

$y = -x - 2n,\ n\in\mathbb{Z}$

2) $-\pi(x-y) = 2\pi x + 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$

$-x + y = 2x + 2m,\ m\in\mathbb{Z}$

$y = 3x + 2m,\ m\in\mathbb{Z}$

Ответ: $(x; -x-2n)$, где $n\in\mathbb{Z}$, x – любое действительное число

$(x; 3x+2m)$, где $m\in\mathbb{Z}$, x – любое действительное число

б) $\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) < \pi \qquad x, y\in\mathbb{Z}$

Известно, что: $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin(c) \le \frac{\pi}{2}$ – следствие из св-в данной ф-ии

$\Rightarrow \arcsin(c_1) + \arcsin(c_2) \le \frac{\pi}{1}$, причем

$(\arcsin(c_1)) + \arcsin(c_2) \ge \pi$ тогда и только тогда, когда

~~$c_1 = c_2 + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$~~; $\arcsin(c_1) + \arcsin(c_2) = \pi$;

$\arcsin(c_1) = \arcsin(c_2) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c_1 = c_2 = 1$

А значит нам не подходит пара, где $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = 1$

$\Rightarrow$ нам не подходит пара $(6;2)$

Все же остальные пары, удовлетворяющие условию из пункта (а) и входящие в ОДЗ нам подходит.

ОДЗ: $\begin{cases} -1 \le \frac{x}{6} \le 1 \\ -1 \le \frac{y}{2} \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \le x \le 6 \\ -2 \le y \le 2 \end{cases}$

можно заметить, что исходя из условия из пункта (а) мы можем получать y только той же чётности, что и x

1. $x = -6 \Rightarrow y \in \{-2; 0; 2\}$
2. $x = -5 \Rightarrow y \in \{-1; 1\}$
3. $x = -4 \Rightarrow y \in \{-2; 0; 2\}$

$\vdots$

13. $x = 6 \Rightarrow y \in \{-2; 0; 2\}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in \{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6\} \quad y \in \{-2; 0; 2\}$

$\forall x \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\} \quad y \in \{-1; 1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\text{общее число пар}}{N} = 7 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 21 + 12 = 33$

Т.к. из всех этих пар нам не подходит пара $(6;2)$, то

$N_0 = N - 1 = 33 - 1 = 32$

$\boxed{\text{Ответ: } 32}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4

1) Пусть в классе учатся x человек; число билетов было увеличено на y, тогда:

1. Найдём вероятность искомого события в начале месяца

Всего способов раздать 4 билета: C_x^4

Способы раздать билеты Пете, Васе и ещё 2м людям: C_{x-2}^2

$$P_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)!}{2\cdot\cancel{(x-4)!}} \cdot \frac{4!\,\cancel{(x-4)!}}{x!} \Rightarrow P_1 = \frac{12}{x\cdot(x-1)}$$

2. Найдём вероятность искомого события в конце месяца (аналогично 1ому случаю):

Всего: C_x^{4+y}

Подходит: C_{x-2}^{2+y}

$$P_2 = \frac{C_{x-2}^{2+y}}{C_x^{4+y}} = \left(\frac{(y+2)!}{(x-2)!}\cdot 2\right)^{-1} \cdot \frac{(y+4)!\cdot(x-y-4)!}{x!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{(x-2)!}{(x-y-4)!\,(y+2)!} \cdot \frac{(y+4)!\,(x-y-4)!}{x!} = \frac{(y+3)(y+4)}{x(x-1)}$$

2) $\frac{P_2}{P_1} = \frac{(y+3)(y+4)}{12} = 6 \Rightarrow y^2+7y+12=72 \Rightarrow y^2+7y-60=0$

$D = 49+4\cdot60 = 49+240 = 289$; $\sqrt{D} = 17$

$y_1 = \frac{-7-17}{2} < 0 \Rightarrow$ постороннее значение; $y_2 = \frac{-7+17}{2} = 5$; $N_{общ} = 4+y = 9$

Ответ: 9

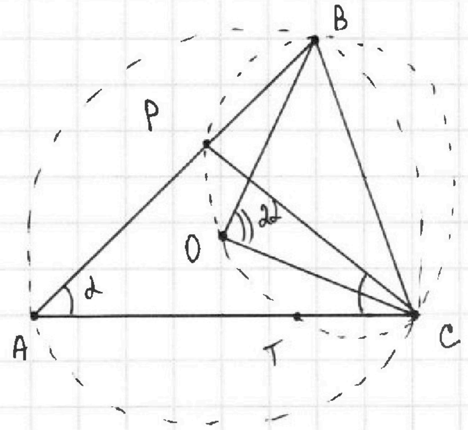
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5



Дано: $AP = 25$; $PB = 5$; $AC = 35$

1) Пусть вписанный угол $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\cdot\angle BAC = 2\alpha$ (как центральный угол)

2) Рассмотрим $\angle BAC$, стороны которого пересекают ω_2 в точках P и T (см. рис.)

$$\angle BAC = \frac{\smile BC - \smile PT}{2}$$

$\angle BOC = 2\alpha$ – вписанный в ω_2 угол $\Rightarrow$

$\Rightarrow \smile BC = 2\cdot\angle BOC = 4\alpha$

Тогда: $\alpha = \dfrac{4\alpha - \smile PT}{2} \Rightarrow \smile PT = 2\alpha$

3) $\angle PCT = \smile PT/2$ (как угол, вписанный в ω_2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PCT = \angle PAC = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle APC$ – равнобедренный $\Rightarrow$

$\Rightarrow PC = AP = 25$

4) Запишем теорему косинусов для $\triangle APC$:

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2\cdot AP\cdot AC\cdot\cos\alpha \Rightarrow 25^2 = 25^2 + 35^2 - 2\cdot 25\cdot 35\cdot\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\cancel{25}^{5}\cdot\cos\alpha = \cancel{35}^{7} \Rightarrow \cos\alpha = 7/10$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{100-49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

5) $$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sin\alpha\cdot AB\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{51}}{\cancel{10}}\cdot\cancel{30}^{3}\cdot 35 = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } S_{ABC} = \frac{105\sqrt{51}}{2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

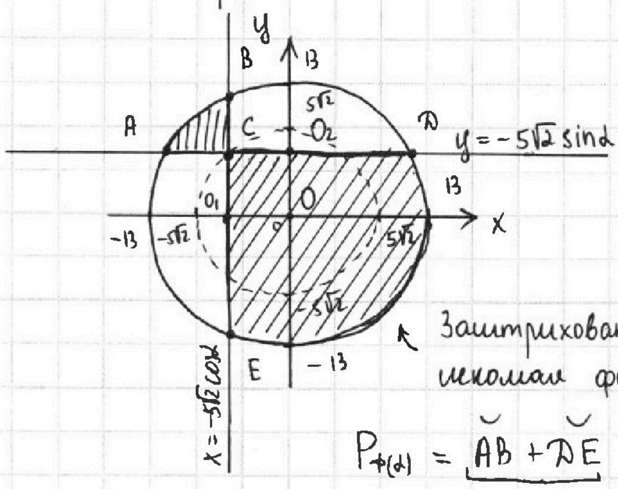
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \le 0 \\ x^2+y^2 \le 169 \end{cases}$$

↖ уравнение круга, ограниченного окружностью с центром в точке $(0;0)$ и радиусом $R = 13$

Рассмотрим плоскость XOY:



$$(x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha)\le 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -5\sqrt{2}\cos\alpha \\ y \le -5\sqrt{2}\sin\alpha \end{cases} \\ \begin{cases} x \le -5\sqrt{2}\cos\alpha \\ y \ge -5\sqrt{2}\sin\alpha \end{cases} \end{array}\right.$$

↖ Заштрихованная область - искомая фигура $\Phi(\alpha)$

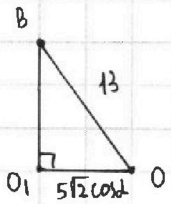
$$P_{\Phi(\alpha)} = \underbrace{\breve{AB} + \breve{DE}}_{\text{длины этих дуг}} + EB + AD$$

1) Пусть дугу $\breve{AB}$ образует центральный угол α_1; дугу ED образует центральный угол α_2

$$\angle BCA = 90^\circ = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2 = \pi$$

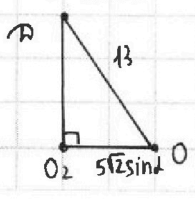
$$\breve{AB} + \breve{DE} = R\alpha_1 + R\alpha_2 = R(\alpha_1+\alpha_2) = \pi R = 13\pi \quad \forall\alpha$$

2)



Из теорем Пифагора: $BO_1 = \sqrt{169-50\cos^2\alpha}$; $DO_2 = \sqrt{169-50\sin^2\alpha}$

$$f_1(\alpha) = EB + AD = 2\cdot\left(\sqrt{169-50\cos^2\alpha} + \sqrt{169-50\sin^2\alpha}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3) Обозначим $f(\alpha) = \frac{f_1(\alpha)}{2} = \sqrt{169-50\cos^2\alpha} + \sqrt{169-50\sin^2\alpha}$

и заметим, что: $P_{\Phi(\alpha)} \to max \Leftrightarrow f(\alpha) \to max$

$$f'(\alpha) = \frac{50\cdot 2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{2\sqrt{169-50\cos^2\alpha}} - \frac{50\cdot 2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{2\sqrt{169-50\sin^2\alpha}} = 0 \Leftrightarrow$$

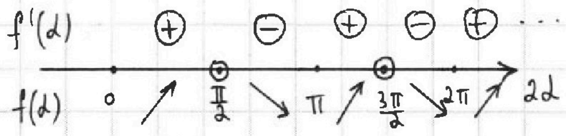
$$\Leftrightarrow 25\sin 2\alpha\left(\frac{\sqrt{169-50\sin^2\alpha}-\sqrt{169-50\cos^2\alpha}}{\sqrt{169-50\sin^2\alpha}\cdot\sqrt{169-50\cos^2\alpha}}\right) = 0$$

$$\left.\begin{matrix}\sqrt{169-50\sin^2\alpha} > 0\\ \sqrt{169-50\cos^2\alpha} > 0\end{matrix}\right\}\ \forall\alpha \Rightarrow \left[\begin{matrix}\sin 2\alpha = 0\\ \sqrt{169-50\sin^2\alpha} = \sqrt{169-50\cos^2\alpha}\end{matrix}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{matrix}\sin 2\alpha = 0\\ 50(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0\end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix}\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \pi n, n\in Z\\ \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z\end{matrix}\right.$$

Для нахождения максимума рассмотрим один период для 2α (этого достаточно, т.к. период $f(\alpha)$ равен 2π)

по крайней мере не < этого значения



$\Rightarrow$ т-и максимума:

$$\left[\begin{matrix}\alpha_0 = \frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z\\ \alpha_0 = \frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in Z\end{matrix}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n\in Z$

$\cos^2\alpha_0 = \sin^2\alpha_0 = \frac{1}{2}$

значение угла α, при котором достигается max величина $P_{\Phi(\alpha)} = M$

также заметим, что во всех этих точках максимума значение $f(\alpha)$ одинаково, а значит значением ф-ии в этих т-ах равно и максимальное значение ф-ии

4) $f_{наиб} = \sqrt{169-50/2} + \sqrt{169-50/2} = 12+12 = 24$

$P_{\Phi(\alpha)_{мах}} = 13\pi + 2f_{наиб} = 13\pi + 48$

$$\boxed{\text{Ответ: } P_{\Phi(\alpha)max} = M = 13\pi + 48;\ \alpha_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n\in Z}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Пусть было x человек

всего: C_x^4

подходит: C_{x-2}^2

$P(1) = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)!}{2\cdot\cancel{(x-4)!}}\cdot\frac{4!\,\cancel{(x-4)!}}{x!} = \frac{4\cdot3\cdot\cancel{2}\cdot1}{\cancel{2}\cdot(x-1)\cdot x} = \frac{12}{x(x-1)}$

всего: C_x^{4+y}

подходит: C_{x-2}^{2+y}

$P(2) = \frac{C_{x-2}^{2+y}}{C_x^{4+y}} = \frac{\cancel{(x-2)!}}{(2+y)!\,\cancel{(x-4-y)!}}\cdot\frac{(4+y)!\cdot\cancel{(x-4-y)!}}{\cancel{x!}} = \frac{(y+3)(y+4)}{x(x-1)}$

$\frac{(y+3)(y+4)}{\cancel{x(x-1)}}\cdot\frac{\cancel{x(x-1)}}{12} = 6$

$17 \times 17 = 119$, 17, 289

$101 \times 11 = 101 + 101 = 1111$

$\Rightarrow y^2 + 7y + 12 = 72 \Rightarrow y^2 + 7y - 60 = 0$

$D = 49 + 4\cdot60 = 289$; $\sqrt{D} = 17$

$y_1 = \frac{-7-17}{2} < 0 \Rightarrow \varnothing$

$y_2 = \frac{-7+17}{2} = 5$

$\Rightarrow N = 4 + 5 = 9$

$\cancel{25^2} = \cancel{25^2} + 35^2 - 2\cdot25\cdot35\cdot\cos\alpha$

$2\cdot\cancel{25}^{5}\cdot\cancel{35}\cos\alpha = \cancel{35^2}\ \cancel{35}\ 7$

$\cos\alpha = \frac{7}{10}$ $\quad\sin\alpha = \frac{\sqrt{100-49}}{10} = \frac{\sqrt{51}}{10}$

$S = \frac{1}{2}\cdot35\cdot\cancel{30}^{3}\cdot\frac{\sqrt{51}}{\cancel{10}} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

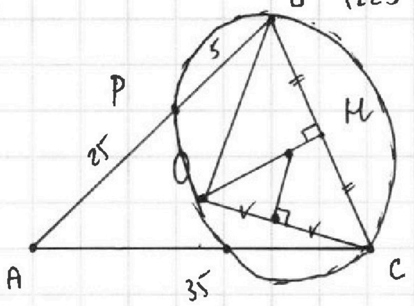
№5

AP = 25

BP = 5

AC = 35

$$\begin{array}{r} \times\, 35 \\ 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$



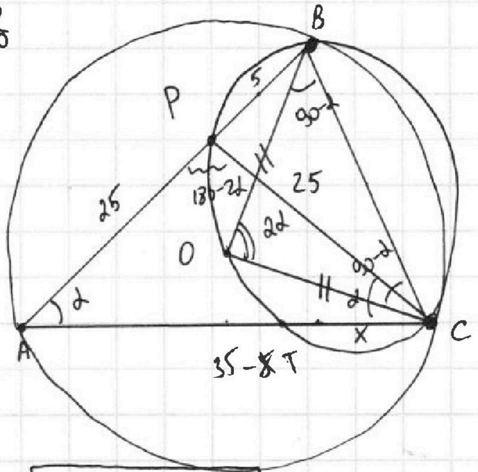
$$25\cdot\cancel{30}^{\,6}=(35-x)\cdot\cancel{35}^{\,7}$$

$$150 = 245-7x$$

$$7x = 95$$

$$x=\frac{95}{7}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 35 \\ 60 \\ \hline 2100 \end{array}$$



$$900=2R^2(1-\cos\beta)$$

$$1225=2R^2(1-\cos\gamma)$$

$$\frac{35\cdot35}{30\cdot30}=\frac{49}{36}=\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\gamma}$$

$$49-49\cos\gamma=36-36\cos\beta$$

$$S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R} \qquad S=p\cdot r$$

$$BC^2 = 30\cdot30+35\cdot35-2\cdot30\cdot35\cdot\cos\alpha$$

$$OB=\frac{\sqrt{2125-2100\cdot\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$$

$$BC=\sqrt{2125-2100\cos\alpha}$$

$$BC^2 = 2OB^2-2OB^2\cdot\cos2\alpha = 2\cdot OB^2(1-\cos2\alpha) \qquad \angle BCP=$$

$$2125-2100\cdot\cos\alpha = \frac{2125-2100\cdot\cos\alpha}{2\cdot\sin^2\alpha}\cdot(1-\cos2\alpha)$$

$$\alpha=\frac{\smile BC-\smile PT}{2}=\frac{2\alpha-\smile PT}{2}=\alpha-\smile PT$$

$$\alpha=\frac{4\alpha-\smile PT}{2}=2\alpha-\frac{\smile PT}{2}\Rightarrow \smile PT=2\alpha$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 2 3 4 5 6 7

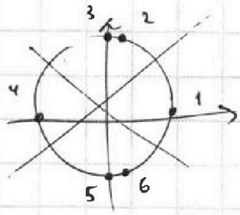
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$f(\alpha) = 2\cdot\left(\sqrt{169-\underbrace{50\sin^2\alpha}_{25}}^{\;12} + \sqrt{169-\underbrace{50\cos^2\alpha}_{25}}^{\;12}\right)$ (10) $f(\alpha) \to max$

$f'(\alpha) \Rightarrow \quad f(\alpha) = \sqrt{169-50\sin^2\alpha} + \sqrt{169-50\sin^2\alpha}$ $\cos\alpha$

$f'(\alpha) = \dfrac{-50\cdot 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cdot\sqrt{169-50\sin^2\alpha}} + \dfrac{50\cdot 2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{2\cdot\sqrt{169-50\cos^2\alpha}}$



$f'(\alpha) = 100\sin\alpha\cos\alpha$

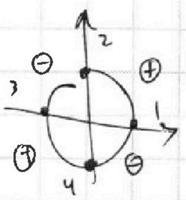
$f'(\alpha) = \dfrac{50}{2}\sin 2\alpha\left(\dfrac{\sqrt{169-50\sin^2\alpha} - \sqrt{169-50\cos^2\alpha}}{4\cdot\sqrt{}\sqrt{}}\right)$

$\sin\beta$

1) $\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \pi n,\ n\in Z \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z$

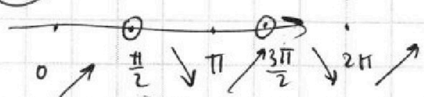
2) $\cancel{169}-50\sin^2\alpha = \cancel{169}-50\cos^2\alpha \Rightarrow 50\cos 2\alpha = 0$

$\cancel{\cos 2\alpha = 0{,}02}$ $\quad \cos 2\alpha = 0 \quad 2\alpha = \dfrac{\pi}{2}+\pi n$



$P_{max} = 48+\pi$ $\quad \cos\beta \quad \sin\beta$ $\quad \cos 2\alpha > 0$

$48+13\pi$ $\quad \cos^2\alpha > \sin^2\alpha$



$2\alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ $\qquad \alpha = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$

$2\alpha = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi z$ $\qquad \alpha = +\dfrac{3\pi}{4} + \pi z$

$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

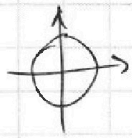
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha)\le 0 \\ x^2+y^2\le 13^2 \end{cases}$$



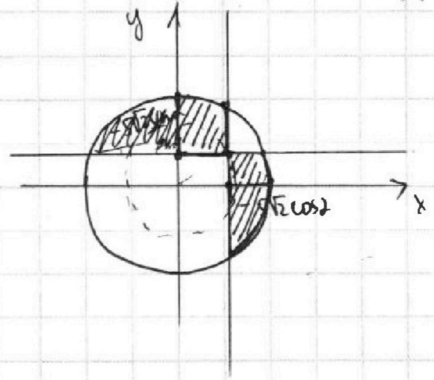
1) $\begin{cases} x+5\sqrt{2}\cos\alpha \geq 0 \\ y+5\sqrt{2}\sin\alpha \le 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+5\sqrt{2}\cos\alpha \le 0 \\ y+5\sqrt{2}\sin\alpha \geq 0 \end{cases}$

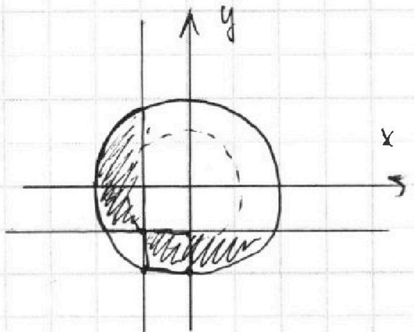
$5\cdot 1{,}4\approx$

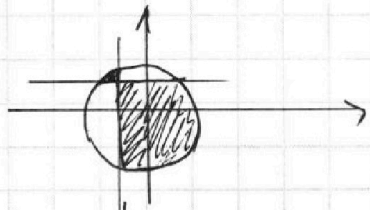
$5\sqrt{2}\ \square\ 13$

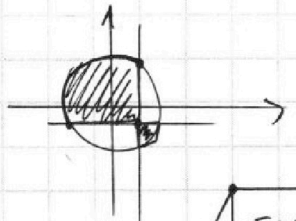
$-5\sqrt{2}\le 5\sqrt{2}\cos\alpha\le 5\sqrt{2}$

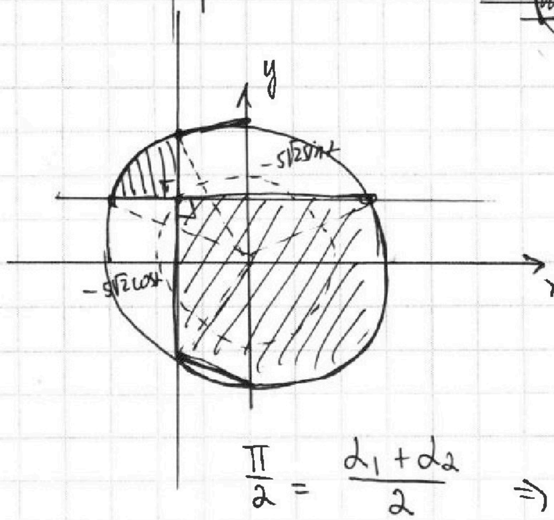
$25\cdot 2\ \square\ 169$

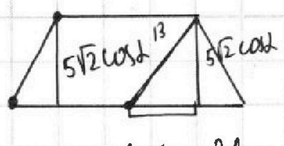












$16+10=\underline{26}$

$2\cdot\sqrt{169-50\cos^2\alpha}$

$2\cdot\sqrt{169-50\sin^2\alpha}$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\Rightarrow \alpha_1+\alpha_2=\pi$$

$$l=R\alpha_1+R\alpha_2=R(\alpha_1+\alpha_2)=\pi R$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

$A = \overline{xxxx} = 1000\cdot x + 100x + 10x + x = 1111x \quad x \in [1;9]$

$A\cdot B\cdot C = m^2 \quad m \in N$

$1111 : 11 = 101$, $1111 = 11\cdot 101$

$m^2 \vdots 11, \; m^2 \vdots 101 \Rightarrow m^2 \vdots 11^2, \; m^2 \vdots 101^2$

$B\cdot C \vdots 11\cdot 101$

1) $B \vdots 11$, $C \vdots 101$

2) $B \vdots 101$, $C \vdots 11$

3) $\cancel{B \vdots 11\cdot 101}$, $\cancel{C \ldots}$

4) $\cancel{B \ldots}$, $\cancel{C \vdots 11\cdot 101}$

① $\cancel{C \vdots 101}$, $\cancel{B \vdots 11}$

$B\cdot 16$
$B\cdot 61$
$B\cdot 26$
$B\cdot 62$
$B\cdot 36$
$B\cdot 63$
$B\cdot 46$
$B\cdot 64$
$B\cdot$

Ig: cu:

$B \vdots 101$ → $101\cdot 2\cdot 3$

$C \vdots 11$ → 33, $3\cdot 11$

$21 = \frac{\pi}{3}$

$\sin^2\frac{\pi}{3} > \cos^2\frac{\pi}{3}$

$B = 101\cdot 2\cdot 3 = \underline{606}$

$C = 3\cdot 11 = \underline{33}$

$A = 1111\cdot 2 = \underline{2222}$

$101 \times 11 = 101 + 1010 = 1111$

10, 8, 7, 7, 6, 5, 4

$M = x^3 - y^3 - 6xy$

№2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow (x+y+5)\left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-2)(y+2)}\right) = 0$$

① $x+y+5 = 0 \Rightarrow \varnothing$ ($x>0$, $y>0$)

$$\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-2)(y+2)} = 0$$

$$\frac{\cancel{xy} - 2y + 2x - 4 \cancel{- xy}}{xy(x-2)(y+2)} = 0$$

$x \neq 2$

$2x - 2y = 4$

$x - y = 2$

$x = y + 2$

$y = x - 2$

$$M = x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2) = x^3 - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 6x^2 + 12x$$

$$= \cancel{x^3} \cancel{- x^3} + \cancel{6x^2} - \cancel{12x} + 8 \cancel{- 6x^2} + \cancel{12x} = 8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

$(\sin\pi x+\sin\pi y)\sin\pi x=(\cos\pi x-\cos\pi y)\cos\pi x$

$\sin^2\pi x+\sin\pi y\sin\pi x=\cos^2\pi x-\cos\pi y\cos\pi x$

$\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3}$

$\cos\pi y\cos\pi x+\sin\pi y\sin\pi x=\cos^2\pi x-\sin^2\pi x$

$\cos(\pi(x-y))=\cos(2\pi x)$ $\quad\frac{\pi}{3};-\frac{4\pi}{3}$ $\quad(x;-x-2n)$, где x — любое действительное число

1) $\pi(x-y)=2\pi x+2\pi n$

2) $-\pi(x-y)=2\pi x+2\pi n$

$n\in Z\qquad n\in Z$

$\frac{1}{3}-2=-\frac{4}{3}$

$\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=1$

$x-y=2x+2n\qquad x+y=-2n$

$\Rightarrow x\neq 6;$

$-x-y=2n, n\in Z\qquad y=-x-2n, n\in Z$

$x\neq 6$
$y\neq 2$

$-x+y=2x+2m, m\in Z\Rightarrow -3x+y=2m$

$y=3x+2m, m\in Z$

① $\arcsin\frac{x}{6}+\arcsin\frac{y}{2}<\pi\qquad \arcsin\alpha\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$-1\le\frac{x}{6}\le 1\qquad -1\le\frac{y}{2}\le 1\qquad \arcsin\beta\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$-6\le x\le 6\qquad -2\le y\le 2$

① $x=-6:\ y=6-2n$ $\quad -2;\ 0;\ 2$ $\quad y=-18+2m$

~~② $x=-5:\ y=-1;1$~~

② $x=-5;\ y=-1;1$

$y=-1;1^2\quad x=\{-5;-3;-1;1;3;5\}\ 6$

$y=-2;0;2\quad x=\{-6;-4;-2;0;2;4;6\}$

$6\cdot 2+3\cdot 7=$

$=12+21=33$