



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- Пусть A составлено из одинаковых цифр x . $\Rightarrow A = x \cdot 1111$
- $A = x \cdot 101 \cdot 11$, $ABC = x \cdot 101 \cdot 11 \cdot BC = n^2 \Rightarrow BC : 101, 11, x$
- C не может быть $: 101$, т.к. ^{оно} ~~явно~~ двузначное $\Rightarrow C : 11$.
- Если число $: 11$ и содержит в себе единицу - это 11.
 $C = 11$. А т.к. B не может быть кратно 101 и 11 одновременно (оно простое, а $101 \cdot 11 = 1111$) и B содержит 7, то оно кратно 101, и ~~то~~ может быть равно 101, 202, 303, ..., 909, из которых подходит 707.
 - $B = 707$, $C = 11$, $ABC = x \cdot 7 \cdot 101^2 \cdot 11^2$, $x \leq 9$, $x : 7$
 $\Rightarrow x = 7$. Тогда подходит единственная тройка натуральных чисел $(7777; 707; 11)$.
- Ответ: $(7777; 707; 11)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}$$

$$k = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow \frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$(x+y+3)((x-4)(y+4) - xy) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y = -3 \\ 4x-4y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = -3 \\ x-y = 4 \end{cases}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy$$

$$\textcircled{1} \quad x-y=4 \quad M = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy = 4(x^2 - 2xy + y^2)$$

$$M = 4(x-y)^2 = 4^2 = 16$$

$$\textcircled{2} \quad x+y = -3 \quad M = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = (x-y)(9 - xy) - 12xy$$

$$M = 9x - 9y - x^2y + xy^2 - 12xy \quad y = -x-3$$

$$M = x^3 + (-x-3)^3 - 12x(-x-3) = x^3 + x^3 + 3x^2 + 9x + 27 + 12x^2 + 36x = 2x^3 + 15x^2 + 45x + 27$$

$x, y > 0 \Rightarrow x+y$ не может быть отрицательной

$\Rightarrow$ подходит только случай $\textcircled{1}$

Ответ: 16.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть в конце месяца было выделено k баскетб. способов выбрать одиннадцатки-в с билетами в начале месяца C_n^4 , а в конце $- C_n^k$.

Если Петя и Вася едут на концерт, способов C_{n-2}^2 и C_{n-2}^{k-2} , где n - общее кол-во игроков в. p_1 и p_2 - вероятности

в начале и в конце $\Rightarrow p_2 = 11 p_1$

$$p_2 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{11 \cdot C_{n-2}^2}{C_n^4} = 11 p_1$$

$$\frac{(n-2)! \cdot (k-2)! \cdot (n-k)!}{(n-k)! \cdot n! \cdot k!} = \frac{11 \cdot (n-2)! \cdot 2! \cdot (n-4)!}{(n-4)! \cdot n! \cdot 4!}$$

$$\frac{(k-2)!}{k!} = \frac{11 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} \Rightarrow \frac{1}{k(k-1)} = \frac{11}{4 \cdot 3}$$

$$12 = 11k^2 - 11k \Rightarrow 11k^2 - 11k - 12 = 0$$

$$\Delta = 121 + 4 \cdot 11 \cdot 12 = 121 + 528 = 649$$

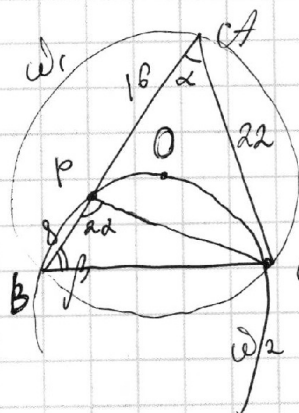


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



• Даны $\angle A = \alpha$, т.к. $\angle BOC$ - центральный,
 $\angle B = \beta$
 $\angle BOC = 2\angle A = 2\alpha$.

• $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$ как впис., опр. хорду
ду.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BA \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} 22 \cdot 24 \cdot \sin \alpha$$

• По теореме косинусов $PC^2 = 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cos \alpha$
из $\triangle APC$

$$\text{из } \triangle BPC: BC^2 = 8^2 + PC^2 - 2 \cdot 8 \cdot PC \cdot \cos 2\alpha$$

$$\cdot \frac{PC}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin 2\alpha} \text{ по т. синусов из } \triangle BPC, \frac{PC}{\sin 2\alpha} = \frac{22}{\sin 2\alpha} \text{ из } \triangle APC$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{22}{\sin \beta} \text{ из } \triangle ABC$$

$$\cdot \sin \alpha = \frac{BC \sin \beta}{22} = \frac{PC \sin 2\alpha}{22} =$$

$$\cancel{22 \sin \alpha} = \frac{PC \sin 2\alpha}{22} \Rightarrow PC = \frac{22^2 \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{(16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cos \alpha) \sin \alpha}{22}$$

$$22 = \frac{4(64 + 121 - 176 \cos \alpha)}{22} \cdot 2 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \quad 11 = 2(185 - 176 \cos \alpha) \cdot \cos \alpha$$

$$2 \cdot 176 \sqrt{2} - 2 \cdot 185 \cos \alpha + 11 = 0$$

$$\Delta = 185^2 - 11 \cdot 2 \cdot 176 = 34225 - 3872 = 30353$$

$$\phi_{1,2} = \frac{185 \pm \sqrt{30353}}{2 \cdot 176} \quad \# \quad \frac{185 + \sqrt{30353}}{2 \cdot 176} \rightarrow \downarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{185 + \sqrt{30353}}{2 \cdot 176} \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{(185 + \sqrt{30353})^2}{2^2 \cdot 176^2}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 24 \cdot \sqrt{1 - \frac{(185 + \sqrt{30353})^2}{2^2 \cdot 176^2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

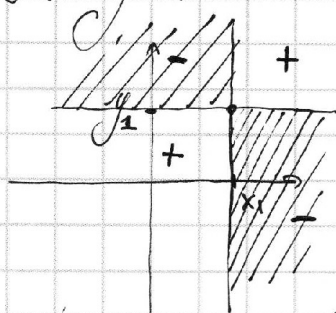
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

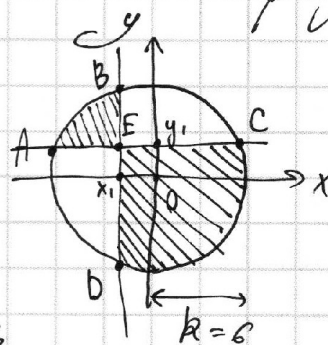
(подсказка: область вышесказанная)
— окружность с ц. $(0; 0)$ и $R = 6$



при некотором α $(x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) = 0$
при $x_1 = -4\sin\alpha$ и $y_1 = 4\cos\alpha$
 $\Rightarrow$ график вышесказан как на рисунке

Тогда фигура $\Phi(\alpha)$ вышесказан как:

P — периметр $\Phi(\alpha) \Rightarrow P = AC + BB + \overset{\sim}{AB} + \overset{\sim}{CB}$



1) Найти градусные меры дуг $\overset{\sim}{AB}$ и $\overset{\sim}{CB}$
равны φ_1 и φ_2

По формуле угла между хордами $\angle AEB = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 90^\circ$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \pi, \quad \overset{\sim}{AB} + \overset{\sim}{CB} = \varphi_1 R + \varphi_2 R = R(\varphi_1 + \varphi_2) = 6\pi$$

2) точки B и D:

$$\begin{cases} x = -4\sin\alpha \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases}; \quad \begin{aligned} y^2 &= 36 - x^2 = 36 - 16\sin^2\alpha \\ y &= \pm \sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} \end{aligned}$$

$$BD = y_B - y_D = 2\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}$$

точки A и C:

$$\begin{cases} y = 4\cos\alpha \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases}; \quad \begin{aligned} x^2 &= 36 - y^2 = 36 - 16\cos^2\alpha \\ x &= \pm \sqrt{36 - 16\cos^2\alpha} \end{aligned}$$

$$AC = x_C - x_A = 2\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}$$

Максимально при $AC + BD = 2(\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} + \sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}) \rightarrow$ максимально

$$AC + BD = 2(\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} + \sqrt{16\sin^2\alpha + 20}) = 4(\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + \sqrt{4\sin^2\alpha + 5})$$



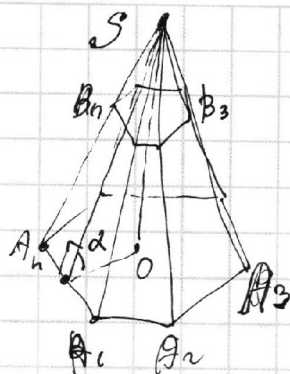
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

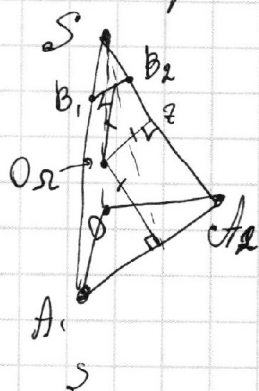
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

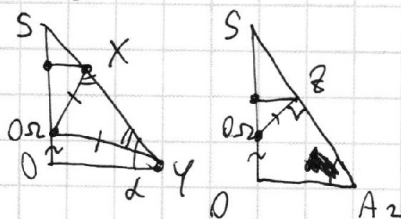


Пусть все боковые ребра пересекаются в точке S , O - центр правильного n -ка $A_1A_2 \dots A_n$. Тогда SO - высота пирамиды. Возвращим α - угол между боковой гранью и основанием.

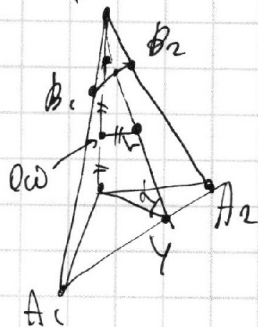
Центры ω и Ω лежат на SO из симметрии прав. пирамиды относительно SO .



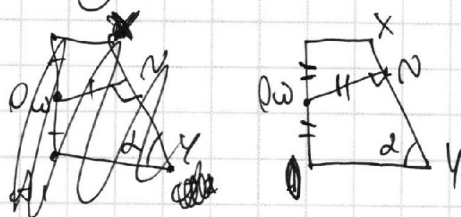
Пусть Ω касается B_1B_2 и A_1A_2 в т. X и Y , а B_2A_2 тогда X и Y лежат на серед. перп-ке из S к A_1A_2 (из симметрии)



$$O\Omega X = O\Omega Y = R_\Omega$$



Пусть ω касается грани A_1SA_2 в т. N . Тогда N лежит на XY , $O\omega$ - середина высоты усеченной пирамиды.



$$O\omega N = \omega N = R_\omega$$

$O\omega Y$ - биссектриса угла $\angle ONY$
 $\Rightarrow \angle \omega YO = \frac{\alpha}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} x \ x \ x \ x : 11 \\ 4 \ 7 \ 8 \\ \hline 1 \end{array} \quad A \cdot B \cdot C = n^2$$

$$A = x \cdot 1111 = x \cdot 11 \cdot 101$$

$$\begin{array}{r} 4 \ 7 \ 8 : 101 \\ \hline 4 \ 7 \ 8 \end{array} \rightarrow 101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909, \dots$$

$$B \cdot C : 11 \Rightarrow C = 11$$

$$B \cdot C : x$$

$$B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot 11 \Rightarrow x = 7$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$$

$$x, y > 0$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy$$

$$k = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$k = \frac{x+y+3}{xy}$$

$$\Rightarrow (x-4)(y+4) = xy$$

$$xy - 4y + 4x - 16 = xy$$

$$\rightarrow -4y + 4x - 16 = 0$$

$$M = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy$$

$$M = 4x^2 + 4y^2 - 8xy = 4(x^2 - 2xy + y^2) = 4(x-y)^2 = 4^3$$

$$x, y \in \mathbb{R} \quad (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$(a) \sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$$

$$-\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi x - \pi y) + \cos 2\pi y = 0$$

$$2 \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}y \right) = 0$$

где $\cos \alpha = 0$

$\rightarrow$ одна из функций

$\rightarrow$ одна из

$$\begin{cases} x+y = 2n \\ x-3y = 2n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}(x+y) = \pi n \\ \frac{\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}y = \pi n \end{cases}$$

$$(b) x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha \in [0; \pi]$$

$$\beta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\frac{3\pi}{2} \geq \alpha - \beta \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{7} + 1 \\ \frac{y}{4} + 1 \end{cases} \begin{cases} x \neq 7 \\ y \neq 4 \end{cases}$$

$$x \in [-7; 7] \setminus \{7\}$$

$$y \in [-4; 4] \setminus \{4\}$$

$$\Rightarrow 7 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = 35 + 4 = 39$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n, 48?$

$$p_1 = \frac{1 \cdot 1 \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)} = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{48 \cdot 47} = \frac{1}{2256}$$

$n, k?$

$$p_2 = \frac{1 \cdot 1 \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n+1-k)}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n+1-k)} = \frac{1}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n+1-k)}$$

n $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

C_n^4 - выбрать 4 человек с билетами

C_{n-2}^4 - не выбрать 4 человек

$$p_1 = 1 - \frac{C_{n-2}^4}{C_n^4}$$

$$p_2 = 1 - \frac{C_{n-2}^k}{C_n^k}$$

$$p_2 = 11 \cdot p_1$$

$$11 - \frac{11 \cdot \frac{(n-2)! \cdot 4!}{(n-6)!}}{\frac{n! \cdot 4!}{(n-4)!}} = 1 - \frac{\frac{(n-2)! \cdot k!}{(n-2-k)!}}{\frac{n! \cdot k!}{(n-k)!}}$$

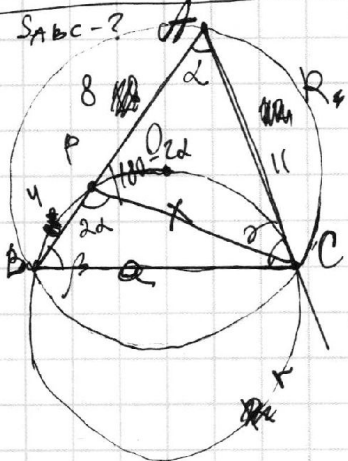
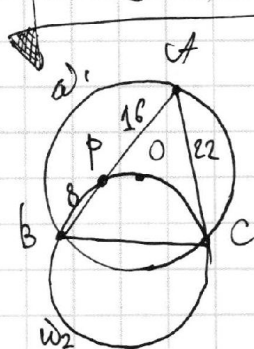
$$10 = \frac{11 \cdot (n-4)(n-5)}{n \cdot (n-1)} \cdot \frac{(n-k)(n-1-k)}{n(n-1)}$$

$$10n(n-1) = 11(n^2 - 9n + 20) - (n^2 - n - 2nk + k + k^2)$$

$$0 = n^2 - 89n + 220 - n^2 + n + 2nk - k - k^2$$

$$k^2 + k(1-2n) - 88n + 220 = 0$$

$$D = (1-2n)^2 + 88n \cdot 4 - 220 \cdot 4 = 1 - 4n + 4n^2 + 88n \cdot 4 - 220 \cdot 4$$



$$BC^2 = 121 + 144 - 2 \cdot 11 \cdot 12 \cos 2 = 265 - 264 \cos 2$$

$$PC^2 = 64 + 121 - 2 \cdot 88 \cos 2 = 185 - 176 \cos 2$$

$$BC^2 = 16 + 185 - 176 \cos 2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{185 - 176 \cos 2} \cdot \cos 2$$

$$\angle BOC = 2\alpha$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 12 \cdot \sin 2$$

$$\frac{11}{\sin \beta} = \frac{12}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin 2} = 2R$$

$$a^2 = 16 + x^2 - 8x \cos 2\alpha = 16 + x^2 - 8x(2\cos^2 \alpha - 1)$$

$$a^2 = 265 - 264 \cos 2$$

$$a^2 = 16 + x^2 - 8x \left(\frac{265 - a^2}{132} - 1 \right)$$

$$\frac{265 - a^2}{264} \sin 2\alpha = \frac{11 \sin 2\alpha}{x}$$