



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 11

$$A = \overline{nnnn} = \overline{nn} \cdot 101 = n \cdot 11 \cdot 101, \text{ где } n \text{ цифра } (\in [1; 9])$$

, т.к. $A \cdot B \cdot C = x^2$, то $B \cdot C$ должно делиться на 101 (101-простое). Но $C < 100 \Rightarrow B \not\equiv 101 \Rightarrow$

$$B \equiv 101. \text{ Тогда } B \in \{101; 202; 303; 404; 505; 606; 707; 808; 909\}.$$

Из условия B имеет цифру 1 $\Rightarrow B = 101$.

Заметим также, что $A \equiv 11$, $A \cdot B \cdot C = x^2 \Rightarrow B \cdot C \equiv 11$,

$$\text{но } B = 101 \not\equiv 11 \Rightarrow C \equiv 11 \Rightarrow C \in \{11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99\}$$

Из условия C имеет цифру 5 $\Rightarrow C = 55$

$$x^2 = A \cdot B \cdot C = n \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 5 \Rightarrow n = 5 \cdot a^2,$$

$$\text{но } n \in [1; 9] \Rightarrow \begin{matrix} a^2 \geq 0 \\ a^2 < 2 \end{matrix} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow$$

$$n = 5. \Rightarrow A = 5555 \quad B = 101 \quad C = 55$$

Ответ: $A = 5555 \quad B = 101 \quad C = 55$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x, y > 0$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow (x+y+1) \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-3)(y+3)} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-3)(y+3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} xy = (x-3)(y+3) \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = xy - 3y + 3x - 9 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 9 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 + y \quad (y > 0)$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy = \\ &= 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy = 3x^2 + 6xy + 3y^2 = 3(x^2 - 2xy + y^2) = \\ &= 3 \cdot (x-y)^2 = 3 \cdot 9 = 27 \end{aligned}$$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2(\pi x) - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2(\pi x) + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x) = \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y$$

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi - 2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\begin{cases} \pi - 2\pi x = \pi x - \pi y \\ \pi - 2\pi x = \pi y - \pi x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = x - y \\ 1 - 2x = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

Ответ: а) $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 1 - x \end{cases}$

$$b) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi \Rightarrow \frac{x}{4} \in [-1; 1] \quad \frac{y}{9} \in [-1; 1] \Rightarrow$$

$$x \in [-4; 4], \quad y \in [-9; 9], \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$y = 1 - x:$$

$$x = -4 \quad x = -3 \quad x = -2 \quad x = -1 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2 \quad x = 3 \quad x = 4$$

$$y = 5 \quad y = 4 \quad y = 3 \quad y = 2 \quad y = 1 \quad y = 0 \quad y = -1 \quad y = -2 \quad y = -3$$

$$y = 3x - 1$$

$$x = -4 \quad x = -3 \quad x = -2 \quad x = -1 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2 \quad x = 3 \quad x = 4$$

$$y = -13 \quad y = -10 \quad y = -7 \quad y = -4 \quad y = -1 \quad y = 2 \quad y = 5 \quad y = 8 \quad y = 11$$

По области определения подходит 15 пар (x, y) .

Заметим, что

$$\arccos(a) + \arccos(b) \leq 2\pi \text{ всегда, т.к. } \arccos(\frac{x}{4}) \in [0; \pi]$$

$$\Rightarrow \arccos(a) + \arccos(b) = 2\pi \Leftrightarrow a = 1 \quad b = 1.$$

Тогда если $\arccos(\frac{x}{4}) + \arccos(\frac{y}{9}) = 2\pi \Rightarrow x = 4 \quad y = 9$, но такой пары среди 15-ти нет $\Rightarrow$

$$\arccos(\frac{x}{4}) + \arccos(\frac{y}{9}) < 2\pi \text{ выполняется для всех}$$

15 пар $\Rightarrow$

Ответ: б) 15 пар.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

Пусть k - кол-во k -классников
Вероятность того, что Пета и Васи получат билеты в начале месяца = $\frac{C_{k-2}^2}{C_k^4}$ ← распределение 2-х билетов среди всех, кроме Пети и Васи

C_k^4 ← распределение 4-х билетов среди всех

$$\frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} = \frac{\frac{(k-2)!}{2! \cdot (k-4)!}}{\frac{k!}{4! \cdot (k-4)!}} = \frac{(k-2)! \cdot 4!}{k! \cdot 2!} = \frac{24}{k \cdot (k-1) \cdot 2} = \frac{12}{k \cdot (k-1)}$$

Аналогично, если в конце месяца дали L билетов

$$\frac{C_{k-2}^{L-2}}{C_k^L} = \frac{\frac{(k-2)!}{(L-2)! \cdot (k-L)!}}{\frac{k!}{(k-L)! \cdot L!}} = \frac{(k-2)! \cdot L!}{(L-2)! \cdot k!} = \frac{(L-1) \cdot L}{(k-1) \cdot k} = \frac{L^2 - L}{k \cdot (k-1)}$$

Известно, что:

$$\frac{12}{k \cdot (k-1)} \cdot 3,5 = \frac{L^2 - L}{k \cdot (k-1)} \Rightarrow 12 \cdot 3,5 = L^2 - L \Rightarrow$$

$$L^2 - L - 42 = 0 \quad \text{По Т.Виета} \quad L_1 = 7 \quad L_2 = -6. \quad \text{Т.к.}$$

$$L - \text{это кол-во билетов} \Rightarrow L = 7$$

Ответ: 7 билетов

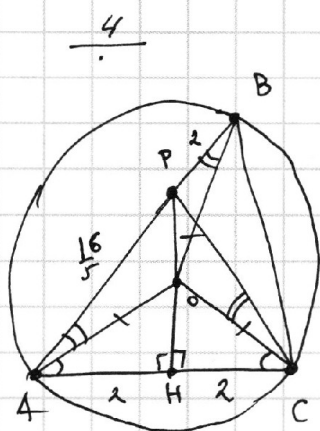


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Задача №5

Дано: O - центр окр. ABC

P: PBCO - впис., P ∈ AB.

AP = $\frac{16}{5}$; BP = 2; AC = 4 S_{ABC} = ?

Решение: Заметим, что

∠OCP = ∠OBP = α, т.к. POCB - впис.

∠PAO = ∠OBP = α, т.к. OB = OA. ∠OAC = ∠OCA = β, т.к. OC = OA. ⇒

∠PAC = ∠PCA = α + β ⇒ PC = PA = $\frac{16}{5}$. Т.к. PC = PA и

OC = OA ⇒ PO - пер. к AC ⇒ PO - высота, медиана,

бис. к APC. H - пересечение AC и PO. Тогда

$$AH = HC = \frac{AC}{2} = 2$$

По Т. Пифагора

$$PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{256}{25} - 4} = \sqrt{\frac{256 - 100}{25}} = \sqrt{\frac{156}{25}} = \frac{2}{5}\sqrt{39}$$

$$\sin \angle PAH = \frac{PH}{AP} = \frac{\frac{2}{5}\sqrt{39}}{\frac{16}{5}} = \frac{\sqrt{39}}{8} \Rightarrow \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$S_{ABC} = \sin \angle BAC \cdot BA \cdot CA \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \left(\frac{16}{5} + 2\right) \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{39} \cdot 5,2 \cdot 4}{8 \cdot 2} = \frac{5,2 \cdot \sqrt{39}}{4} = 1,3 \cdot \sqrt{39}$$

Ответ: $1,3 \cdot \sqrt{39}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6 (продолжение)

$$2(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2}) \leq 4\sqrt{7}$$

$$(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2}) \leq 2\sqrt{7}, \text{ все в левых частях проскороит}$$

$$9-x^2 + 9-y^2 + 2\sqrt{81-9(x^2+y^2)+x^2y^2} \leq 28$$

$$18-4 + 2\sqrt{81-36+x^2y^2} \leq 28$$

$$2\sqrt{45+x^2y^2} \leq 28-14$$

$$\sqrt{45+x^2y^2} \leq 7$$

$$45+x^2y^2 \leq 49$$

$$x^2y^2 \leq 4$$

$$|xy| \leq 2. \text{ Известно, что } |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow$$

$$|xy| \leq 2 \Rightarrow 2(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2}) \leq 4\sqrt{7}.$$

Равенство достигается при $x^2=2$ $y^2=2$

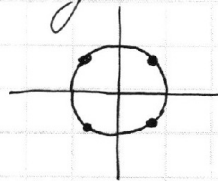
$$|x|=|y|=\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} x &= 2\cos\alpha \\ y &= 2\sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$AB+CD \leq 4\sqrt{7} \quad \pi + AB+CD \leq \pi + 4\sqrt{7} \Rightarrow$$

периметр $\varphi(\alpha) \leq \pi + 4\sqrt{7}$ и он достигается при

$$\begin{cases} \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pi k + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi k - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$\text{Ответ: при } \alpha \begin{cases} \alpha = \pi k + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi k - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



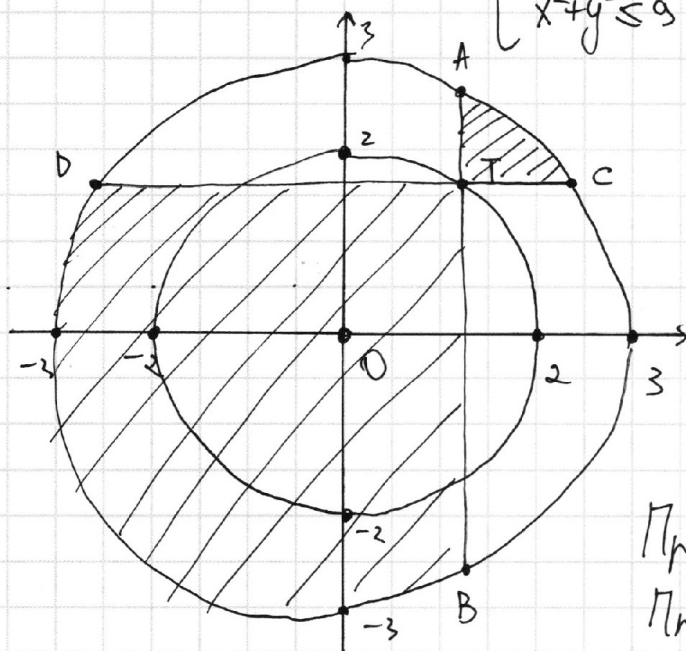
СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Представим это все на координатной плоскости.

Заметим, что точка $(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$ лежит на окр. радиуса 2 и центром в центре координат, т.к. $(2\cos\alpha)^2 + (2\sin\alpha)^2 = 4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4 = 2^2$. Пусть это точка T.



Проведем $AB \ni T$, $AB \parallel Oy$
Проведем $CD \ni T$, $CD \parallel Ox$

Тогда совокупность заштрихованных областей и есть $\mathcal{F}(\alpha)$.

(в ATC $x \geq 2\cos\alpha; y \geq 2\sin\alpha; x^2+y^2 \leq 9$; в DTB $x \leq 2\cos\alpha; y \leq 2\sin\alpha; x^2+y^2 \leq 9$) ($x^2+y^2 \leq 9$ означает, что $(x; y)$ находится внутри (включая границу) окружности с $r=3$ и центром в O).

$AB \perp CD \Rightarrow \overline{AD} + \overline{CB} = \overline{AC} + \overline{BD}$, при этом $\overline{AB} + \overline{CB} + \overline{BD} + \overline{DA} = 2\overline{AC} + 2\overline{BD} = 2(\overline{AC} + \overline{BD})$.
 $\Rightarrow \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AT} + \overline{TC} + \overline{DT} + \overline{TB} = \overline{AT} + \overline{AB} + \overline{CD}$. AB и CD хорды ~~окружности радиуса 3~~

~~Если обозначить $T = (x; y)$, то $A = (x; \sqrt{9-x^2})$ $B = (x; -\sqrt{9-x^2})$ $C = (\sqrt{9-y^2}; y)$ $D = (-\sqrt{9-y^2}; y) \Rightarrow AB + CD = 2(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2})$. $x^2+y^2=4$~~

Добавьте докажем, что $2(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2}) \leq 4\sqrt{7}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left(\frac{DT-TC}{2}\right) \cdot \left(\frac{BT-AT}{2}\right) = \frac{(DT-TC)(BT-AT)}{4} = 4$$

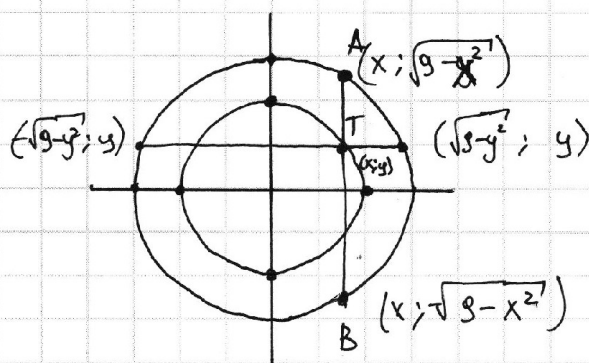
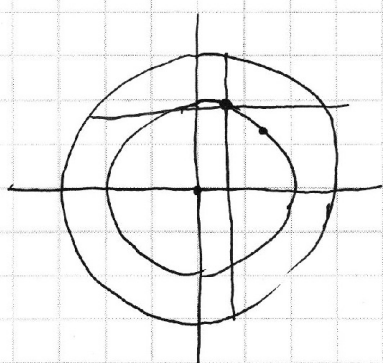
$$|DT-TC| \cdot |BT-AT| = 1$$

$$(BT-TC)^2 \cdot (BT-AT)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$(DT^2 + TC^2 - DT \cdot TC)(BT^2 + AT^2 - BT \cdot AT) = 1$$

$$x = 3 - y$$



11

$$2\sqrt{9-x^2} + 2\sqrt{9-y^2} - \text{макс.}$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\frac{32}{18}$$

$$4\sqrt{8}$$

$$x=y=1$$

$$8\sqrt{2}$$

$$2(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2}) \leq 8\sqrt{2}$$

$$\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2} \leq 4\sqrt{2}$$

14

$$51-6=45$$

$$9+x^2+9-y^2+2\sqrt{81-9(x^2+y^2)+x^2y^2} \leq (4\sqrt{2})^2$$

$$18-4+2\sqrt{81-36+x^2y^2} \leq 32$$

$$2\sqrt{45+x^2y^2} \leq 18$$

$$\sqrt{45+x^2y^2} \leq 9$$

$$45+x^2y^2 \leq 81$$

$$x^2y^2 \leq 36$$

$$x \cdot y \leq 6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

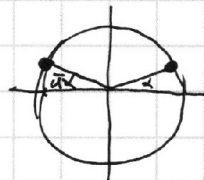
$$\sin^2(\pi x) - (\sin(\pi y) \cdot \sin(\pi x)) = \cos^2(\pi x) + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x) = \cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x$$

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\cos(\pi - 2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\begin{cases} \pi - 2\pi x = \pi y - \pi x \\ \pi - 2\pi x = \pi x - \pi y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = y - x \\ 1 - 2x = x - y \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\begin{cases} y = 1 - x \\ y = 3x - 1 \end{cases}$$

$$\arccos\left(\frac{x}{4}\right) + \arccos\left(\frac{y}{9}\right) < 2\pi$$

$$\arccos\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$x \in [-4; 4]$$

$$\cos(l) = \frac{x}{4}$$

$$y \in [-9; 9]$$

$$\arccos\left(\frac{x}{4}\right) = l$$

$$y = 1 - x$$

$$y = 5$$

$$x = -4$$

$$y = 4$$

$$x = -3$$

$$y = 3$$

$$x = -2$$

$$y = 2$$

$$x = -1$$

$$y = 1$$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$x = 1$$

$$y = -1$$

$$x = 2$$

$$y = -2$$

$$x = 3$$

$$y = -3$$

$$x = 4$$

$$y = 3x - 1$$

$$y = -13$$

$$x = -4$$

$$y = -10$$

$$x = -3$$

$$y = -7$$

$$x = -2$$

$$y = -4$$

$$x = -1$$

$$y = -1$$

$$x = 0$$

$$y = 2$$

$$x = 1$$

$$y = 5$$

$$x = 2$$

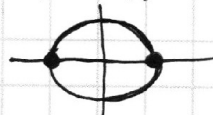
$$y = 8$$

$$x = 3$$

$$y = 11$$

$$x = 4$$

$$\arccos(-1) + \arccos\left(\frac{5}{9}\right)$$



$$= 2\pi \Rightarrow$$

$$\alpha = \beta = 1$$

$$\arccos\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$\arccos(a) + \arccos(b) \leq 2\pi$$

$$a \in [0; 1] \quad b \in [0; 1]$$

$$\frac{x}{4} = 1$$

$$\frac{y}{9} = 1$$

$$||$$

$$x = 4$$

$$y = 9$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



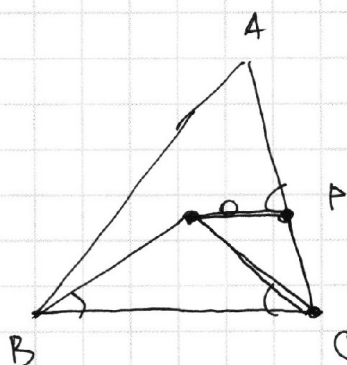
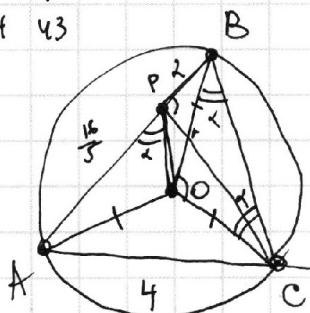
$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k}$$

~~k~~ ~~дана~~. 11-классников

~~4~~ ~~3~~
~~k~~ ~~k~~

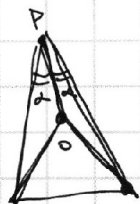
$$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot (k-1)$$

12 21 31 41
 13 23 32 42
 14 24 34 43



$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$156 = 3 \cdot 52 = \frac{16}{5} = \frac{32}{10} = 3,2$$



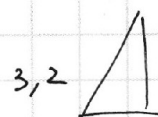
$$\frac{16}{5}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 26 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 13 =$$

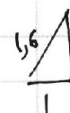
$$PO = \text{дана} = 4\sqrt{39}$$

$\triangle APC$

$\triangle ABC$



3,2 2 13



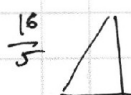
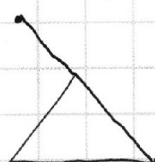
$$\sqrt{1,6 - 1} = \sqrt{2,56 - 1} =$$

$$= \sqrt{1,56} =$$

$$\frac{25}{64} \quad \sqrt{\frac{39}{64}}$$

$$\sqrt{\frac{256}{25} - 4} =$$

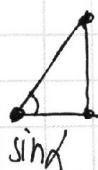
$$= \sqrt{\frac{156}{25}} = \frac{\sqrt{156}}{5} = \frac{2\sqrt{39}}{5}$$



cos



$$\sin \angle PAH = \frac{\frac{2\sqrt{39}}{5}}{\frac{16}{5}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$



$$\cos \alpha = \frac{2 \cdot 5}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$S_{ABC} = \sin \angle BAC \cdot AC \cdot BA \cdot \frac{1}{2} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2}) \leq 4\sqrt{7}$$

$$\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2} \leq 2\sqrt{7}$$

$$9-x^2+9-y^2+2\sqrt{81-9(x^2+y^2)+x^2y^2} \leq 28$$

$$18-4+2\sqrt{81-36+x^2y^2} \leq 28$$

$$\sqrt{45+x^2y^2} \leq 7$$

$$45+x^2y^2 \leq 49$$

$$x^2y^2 \leq 4$$

~~$$xy \leq 2$$~~

$$|xy| \leq 2$$

известно, что $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$$\Rightarrow |xy| \leq 2 \Rightarrow AB+CD \leq 4\sqrt{7}.$$

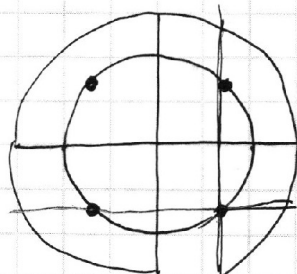
При этом равенство достигается при

$$|x|=|y|=\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

~~$x=y$~~

$$x=2\cos \alpha$$

$$y=2\sin \alpha$$



$$x = \pi k + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi k - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

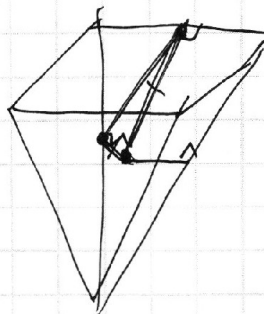
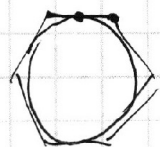
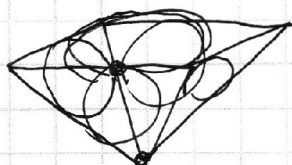
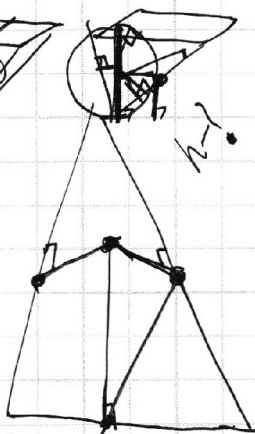
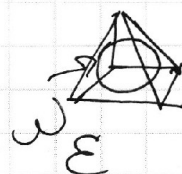
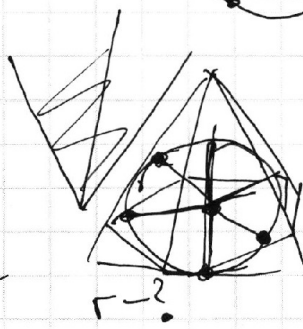
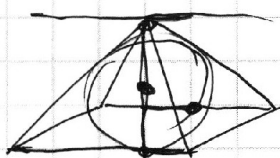
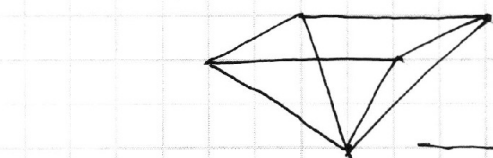
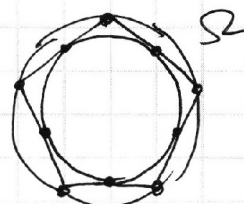
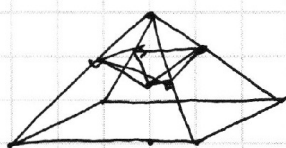
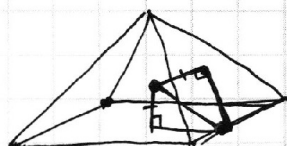


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = (x-3)(y+3) \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} xy = xy - 3y + 3x - 9 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

~~$xy = 3x - 3y = 9$~~

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x = y + 3 &\Leftrightarrow x = y + 3 \\ x \neq 3 &\quad \text{т.к. } y \neq 0 \end{aligned}$$

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x =$$

$$= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x$$

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x)$$

~~$\cos(\pi x)$~~

$$\cos(\pi(1-2x)) = \cos(\pi y - \pi x)$$

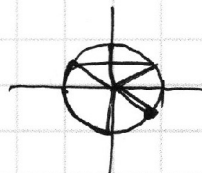
$$\pi(1-2x) = \pi y - \pi x$$

$$\pi(1-2x) = \pi x - \pi y$$

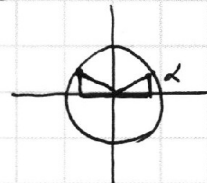
~~$1-2x = x$~~

$$1-2x = y - x$$

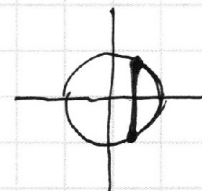
$$1-2x = x - y$$



$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - 9xy &= \\ &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy = \\ &= 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy = \\ &= 3x^2 - 6xy + 3y^2 = \\ &= 3 \cdot (x^2 - 2xy + y^2) = \\ &= 3 \cdot (x-y)^2 = 3 \cdot 9 = \underline{\underline{27}} \end{aligned}$$



$$-\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3333 = 33 \cdot 101 =$$

$$nnnn = n \cdot 11 \cdot 101$$

101

202

303

404

505

606

707

808

909

$$101 \cdot 101 \cdot 11 \cdot n, n \in [1; 9]$$

$$11 \cdot n \cdot x^2$$

$$101 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 5 \cdot n = x^2$$

$$n = 5 \cdot a^2, \text{ но } n \in [1; 9] \Rightarrow a^2 < 2 \Rightarrow$$

$$a^2 \leq 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow n = 5.$$

$$\text{Обеи: } A = 5555$$

$$B = 101$$

$$C = 55$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow xy = (x-3)(y+3)$$

$$(x+y+1) \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-3)(y+3)} \right) = 0 \quad \vee \quad \begin{cases} (x+y+1) = 0 \\ \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} = \frac{\frac{(k-2)!}{2! \cdot (k-4)!}}{\frac{k!}{(k-4)! \cdot 4!}} = \frac{\frac{(k-2) \cdot (k-3)}{2}}{\frac{(k-3)(k-2)(k-1)(k-4)}{24}} =$$



$$= \frac{1}{\frac{(k-1) \cdot k}{12}} = \frac{12}{(k-1) \cdot k}$$

$$\frac{C_{k-2}^{L-2}}{C_k^L} = \frac{\frac{(k-2)!}{(k-L)! \cdot (L-2)!}}{\frac{k!}{(k-L)! \cdot L!}} = \frac{\frac{(k-2)!}{(L-2)!}}{\frac{k!}{L!}} = \frac{L!}{k!} = \frac{L \cdot (L-1)!}{k \cdot (k-1)!} = \frac{L \cdot (L-1)!}{k \cdot (k-1)!}$$

$$= \frac{(k-2)! \cdot L}{k! \cdot (L-2)!} = \frac{(L-1) \cdot L}{(k-1) \cdot k}$$

$$7 \cdot 6 = 42$$

$$2(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2}) =$$

$$\frac{12}{(k-1) \cdot k} \cdot 3,5 = \frac{(L-1) \cdot L}{(k-1) \cdot k}$$

$$12 \cdot 3,5 = L^2 - L$$

$$L^2 - L - 42 = 0$$

$$L_1 = 7 \quad L_2 = -6$$

$$36 + 6 - 42$$

$$49 - 7 - 42$$

"

$$(L=7)$$

$$2(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2}) \leq 4\sqrt{8}$$

$$\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2} \leq 4\sqrt{2}$$

$$18 - 4 + 2\sqrt{81 - 36}$$

$$9 - x^2 + 9 - y^2 + 2\sqrt{81 - 9(x^2 + y^2) + x^2 y^2} \leq 32$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 \leq 9$$

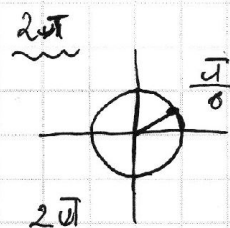
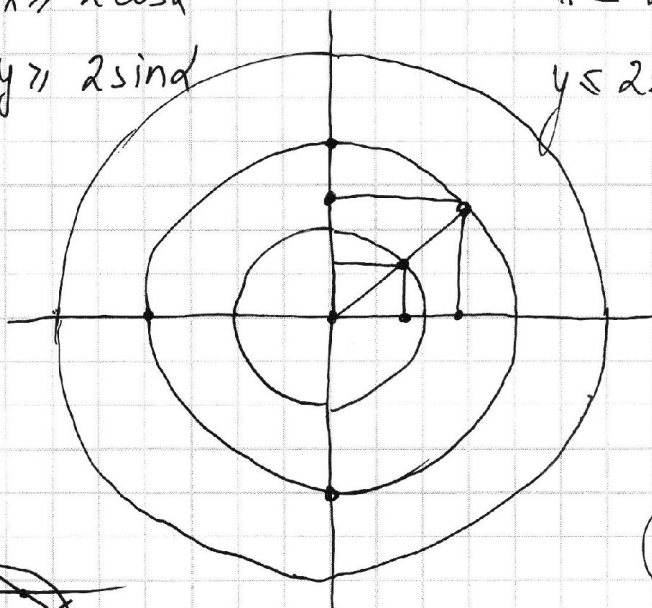
$$xy - 2 \cdot \cos \alpha \cdot y - 2 \cdot \sin \alpha \cdot x - 4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$x \geq 2 \cos \alpha$$

$$x \leq 2 \cos \alpha$$

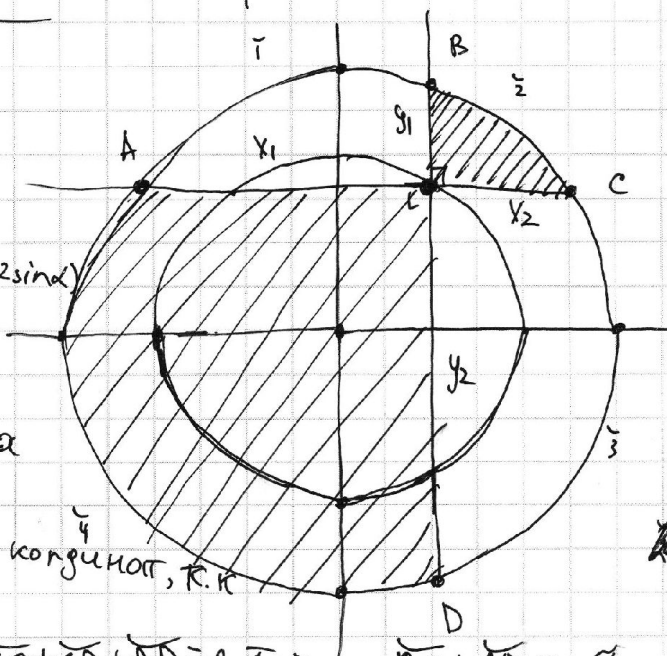
$$y \geq 2 \sin \alpha$$

$$y \leq 2 \sin \alpha$$



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(2 \sin \alpha)^2 + (2 \cos \alpha)^2 = 4 \sin^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha$$



$$x_2 - x_1 = y_2 - y_1$$

$$x \geq 2 \cos \alpha$$

$$y \geq 2 \sin \alpha$$

замечим, что точка $(2 \cos \alpha; 2 \sin \alpha)$ лежит на окружности с радиусом 2 и центром в начале координат, т.е.

$$AC \perp BD \Rightarrow$$

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{BC} + \vec{AD}$$

$$+ \text{т.к. } \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = 2\vec{AC} \Rightarrow \vec{BC} + \vec{AD} = \vec{AC}$$

$$(2 \cos \alpha)^2 + (2 \sin \alpha)^2 = 4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 4 = 2^2$$