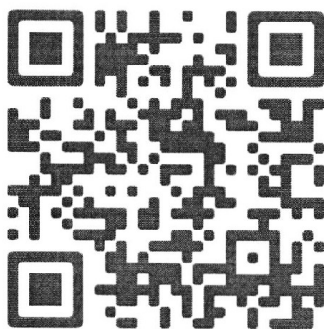




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1 1; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99. Среди них

3 присутствует только в 33 $\Rightarrow C=33 \Rightarrow$

$$1111n \cdot 606 \cdot 33 = m^2$$

$$2n \cdot \underbrace{(3333)}_{\text{целый квадрат}}^2 = m^2 \Rightarrow 2n - \text{квадрат} \therefore 2 \Rightarrow \text{целый}$$
$$2n = \left(\frac{m}{3333}\right)^2 \leftarrow \text{целое число}$$

квадрат. $n < 10 \Rightarrow 2n < 20$, четные квадраты < 20 : 4; 16 $\Rightarrow \begin{cases} n=2 \\ n=8 \end{cases}$

Ответ: (2222; 606; 33); (8888; 606; 33).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1

$A = \overline{nnnn}$, где n - цифра, не равная 0. Тогда

$A = n \cdot 1111 = n \cdot 101 \cdot 11$ (числа 101, 11 - простые)

$ABC : A : (11 \cdot 101)$, ~~ABC~~ ABC - полный квадрат $\Rightarrow$

~~ABC делится~~ ABC на простые входит в чётных степенях $\Rightarrow ABC : (11 \cdot 101)^2 \Rightarrow n \cdot BC : 11 \cdot 101$.

$n < 11 \Rightarrow (n, 11 \cdot 101) = 1 \Rightarrow BC : 11 \cdot 101$

$C < 100, (C, 101) = 1 \Rightarrow B : 101$.

Трёхзначные числа, делящиеся на 101:

101; 202; 303; 404; 505; 606; 707; 808; 909.

Также в одном из них есть 6 $\Rightarrow B = 606 \Rightarrow$

$ABC : B : 606 \Rightarrow ABC : 6, ABC : (2 \cdot 3)$

2 и 3 простые $\Rightarrow$ в ABC они входят в чётных степенях: $ABC : 6^2 \Leftrightarrow 1111n \cdot 606 \cdot C : 6^2 \Leftrightarrow$

$1111n \cdot 101 \cdot C : 6$

$(1111 \cdot 101, 6) = 1 \Rightarrow nC : 6$

$ABC : \cancel{1111} \cdot 11^2 \Rightarrow (n \cdot 606 \cdot C) : (11 \cdot 101) \Rightarrow$

$6nC : 11, (6, 11) = 1, n < 10 \Rightarrow (n, 11) = 1 \Rightarrow$

$= C : 11$. Двухзначные числа, делящиеся на 11:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

☐

2

☒

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$(x \neq 2), (x, y > 0)$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{xy+2x-2y-4} = \frac{x+y+5}{xy+2x-2y-4} \quad | : (x+y+5) > 0$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{xy+2x-2y-4} \Rightarrow xy = xy+2x-2y-4 \Rightarrow x = y+2 > 0+2 = 2$$

$$M = (y+2)^3 - y^3 - 6(y+2)y = (y^3 + 6y^2 + 12y + 8) - y^3 - 6y^2 - 12y = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{x_0 + y_0}{2} \in \mathbb{Z}, \text{ так } y_0 = -x_0 + 2 \cdot \frac{x_0 + y_0}{2}$$

Для $y = -2$; $\emptyset$ - чётных x : -6 ; -4 ; -2 ; 0 ; 2 ; 4 ; 6

7 вариантов, для $y = \pm 1$ - нечётных x : -5 ; -3 ; -1 ; 1 ;

3 ; 5 - 6 вариантов; для $y = 2$ - все чётные x кроме

6 , т.к. тогда не выполнено пер-во из условия.

$$\Rightarrow \text{всего вариантов } 2 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 6 = 32$$

ответ: $\emptyset$ 32.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 3

$$a) \sin^2(\pi x) + \sin(\pi x) \sinh(\pi y) = \cos^2(\pi x) - \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$

$$\cos(\pi x) \cos(\pi y) + \sinh(\pi x) \sinh(\pi y) = \cos^2(\pi x) - \sinh^2(\pi x)$$

$$\cos(\pi y - \pi x) = \cos(2\pi x)$$

$$\begin{cases} \pi y - \pi x = 2\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi y - \pi x = -2\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 2k \\ y = -x + 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 2k \\ y = -x + 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: а) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (x; 3x + 2k); (\text{---}x; -x + 2k)$

б) Заметим, что $\forall a: -1 \leq a \leq 1, \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$, равенство достигается $\Leftrightarrow a = 1$

Если при $x_0; y_0$ определены $\arcsin \frac{x_0}{6}, \arcsin \frac{y_0}{2}$ то

нер-во не выполняется только когда $\begin{cases} \frac{x_0}{6} = 1 \\ \frac{y_0}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 6 \\ y_0 = 2 \end{cases}$

ограничения $\arcsin$: $\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 6 \\ |y| \leq 2 \end{cases}$

Заметим, что $y = 3x + 2k \equiv x \pmod{2}, -x + 2k \equiv x \pmod{2} \Rightarrow x$ и y

одной чётности во всех решениях

Приём для любой пары (x_0, y_0) одинаковой чётности найдётся подходящее целое k , например



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 4

Пусть n - кол-во одноклассников, k - количество билетов в конце месяца.

Все ~~возм.~~ варианты распределения билетов равновероятны. Таких вариантов C_n^4 в начале месяца и C_n^k в конце.

Как подходят исходы, когда у Пети и Васи оказались ^{билеты} билеты. Значит остальные распределены между их одноклассниками. — C_{n-2}^2 и C_{n-2}^{k-2} способами соответственно в начале и в конце месяца.

Тогда вероятности условий на вероятности записывается так: $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \cdot 6 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$

$$6 \cdot \frac{4! (n-2)(n-3)}{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3) \cdot 2!} = \frac{k! (n-2)(n-3) \dots (n-k+1)}{n(n-1) \dots (n-k+1) (k-2)!} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-k)!} \cdot (k-2)!$$

$$\cdot \frac{6 \cdot 12}{n \cdot (n-1)} = \frac{k \cdot (k-1)}{n \cdot (n-1)} \cdot (n(n-1))$$

$$k^2 - k - 72 = 0$$

$$(k-9)(k+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=9 \\ k=-8 - \text{не подх., } k > 4 \end{cases}$$

ответ: 9.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Th sin } \triangle ABC: 2AO = \frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{AC}{\sin \beta} \Rightarrow AO \sin \beta = \frac{AC}{2};$$

$$AO \sin \gamma = \frac{AB}{2}$$

$$AO \sin \beta = AP \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{AB}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AB}{2AP} = \frac{30}{2 \cdot 25} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot 35 \cdot 30 = 4 \cdot 35 \cdot 3 = 420$$

Ответ: 420.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

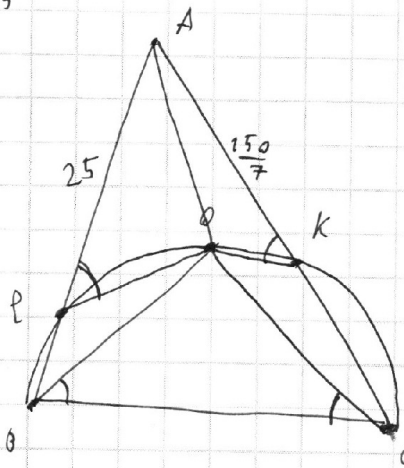
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5



Пусть $k \neq l$, $k = \omega_2 \cap AC$

По св-ву секущих из 1 т.

$$AB \cdot AP = AK \cdot AC$$

$$\frac{30 \cdot 25^5}{357} = AK = \frac{150}{7}$$

$$\triangle BOC - p-\sqrt{} \Rightarrow \angle OBC = \angle OCB.$$

$$\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC - \text{центральный в } \omega_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle OBC = 90^\circ - \angle BAC.$$

$$\angle BAC = \alpha$$

$$\triangle BOC - \text{вне} \Rightarrow \angle OPB = 180^\circ - \angle OBC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle APO = \angle OBC = 90^\circ - \alpha$$

$$\text{Аналогично } \angle AKO = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle AOB = 2\angle ACB \Rightarrow \angle BAO = 90^\circ - \angle ACB$$

$$\angle AOC = 2\angle ABC \Rightarrow \angle CAO = 90^\circ - \angle ABC$$

$$\angle ACB = \gamma; \angle ABC = \beta$$

$$\text{Th sin в } \triangle APO: \frac{AO}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{AP}{\sin(180^\circ - \angle BAO - \angle APO)} = \frac{AP}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{AP}{\sin \beta}$$

$$\text{Th sin в } \triangle AKO: \frac{AO}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{AK}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{AK}{\sin \gamma}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично для отрезка CD - его длина $= 2|x_c| =$

$$= 2 \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$M = 2 \left(\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} + \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} \right) + 13 \pi$$

~~1) M не зависит от π , 2) не зависит~~

$$P(\alpha) = \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} + \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$

$$M = 2 P(\alpha) + 13 \pi \Rightarrow M \rightarrow \max \Leftrightarrow P(\alpha) \rightarrow \max \Leftrightarrow P^2(\alpha) \rightarrow \max$$

$$P^2(\alpha) = 169 - 50 \sin^2 \alpha + 169 - 50 \cos^2 \alpha + 2 \sqrt{169^2 + 50^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha -$$

$$- (50 \sin^2 \alpha + 50 \cos^2 \alpha) \cdot 169} = 2 \cdot 169 - 50 + 2 \sqrt{169^2 - 169 \cdot 50 + 50^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} -$$

т.к. надо максимизировать подкор. выражение
max достигается, когда $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \rightarrow \max$.

$$\sin^2 2\alpha \rightarrow \max \Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = 1 \\ \sin 2\alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \\ \alpha = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$P(\alpha)_{\max} = \sqrt{P^2(\alpha)_{\max}} = \sqrt{288 + 2 \sqrt{169^2 - 2 \cdot 169 \cdot 25 + 25^2 \cdot 1}} = \sqrt{288 + 2 \cdot \sqrt{(169 - 25)^2}} =$$

$$= \sqrt{288 + 2 \cdot 144} = \sqrt{4 \cdot 12^2} = 24$$

$$M_{\max} = 2 \cdot 24 + 13 \pi = 48 + 13 \pi$$

Ответ: $M = 48 + 13 \pi$, $\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \\ \alpha = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N 6

$$(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \quad (1)$$

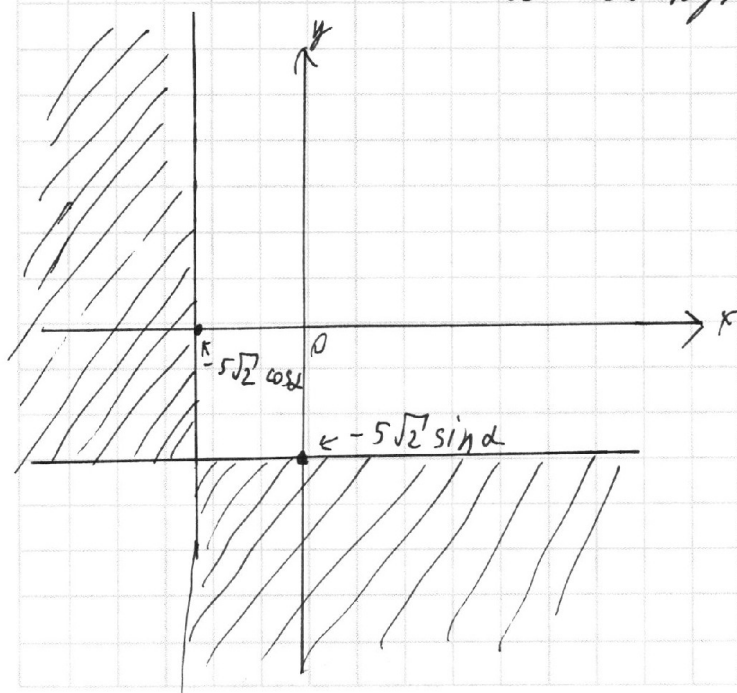
$$x^2 + y^2 \leq 169 \quad (2)$$

(2) - кер-во, задающее круг радиуса 13 с центром в $(0;0)$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \geq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0 \end{cases} \\ x = -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y = -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \\ x = -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y = -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$$

На плоскости эта совокупность изображается так:



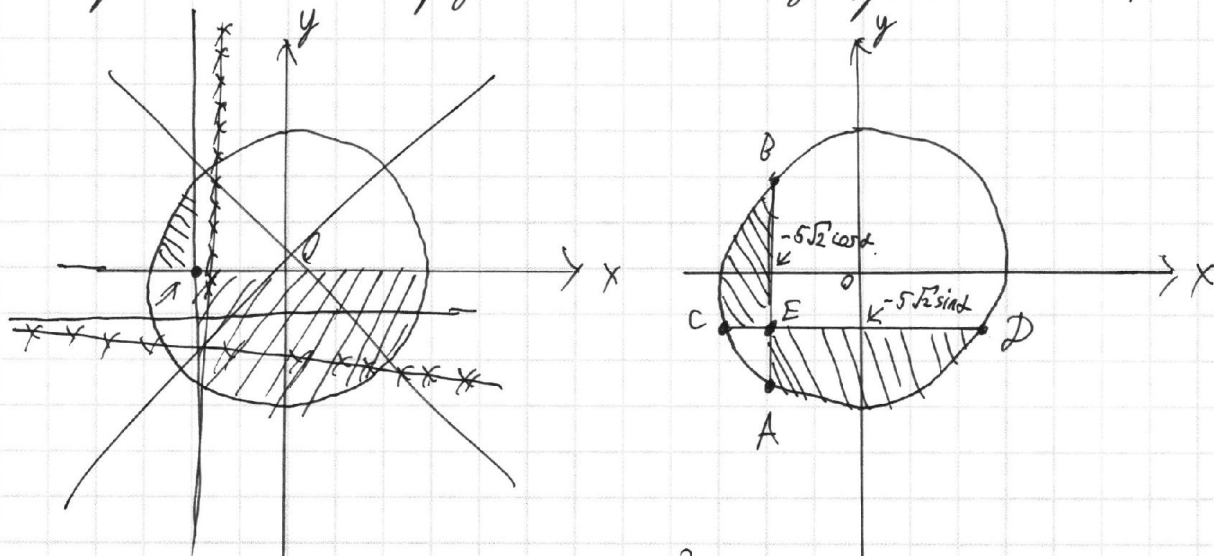
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В пересечении с кругом площадь изображается;



Обозначим т. пер. $\{x = -5\sqrt{2} \cos \alpha\}$ и окружности за A и B
 $(y_A \leq y_B)$ и т. пер. $y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$ и окружности за C и D.
 $(x_C \leq x_D)$

Периметр Φ складывается из длины дуг BC и AD и AB + CD.

$$CD \cap AB = E, \angle BED = 90^\circ \Rightarrow \frac{1}{2}(\overset{\sim}{BC} + \overset{\sim}{AD}) = 90^\circ \Rightarrow$$

$\overset{\sim}{BC} + \overset{\sim}{AD} = \pi$ (т.к. угол между хордами равен половине сум. дуг)
 Сумма длин дуг BC и AD = $(\overset{\sim}{BC} + \overset{\sim}{AD}) \cdot r = \pi \cdot 13 = 13\pi$

$$x_A = -5\sqrt{2} \cos \alpha, A \in \text{окр.} \Rightarrow x_A^2 + y_A^2 = 169 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_A^2 = 169 - 50 \cos^2 \alpha$$

A и B симметричны отн. $Ox \Rightarrow AB = 2|y_A| = 2\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$

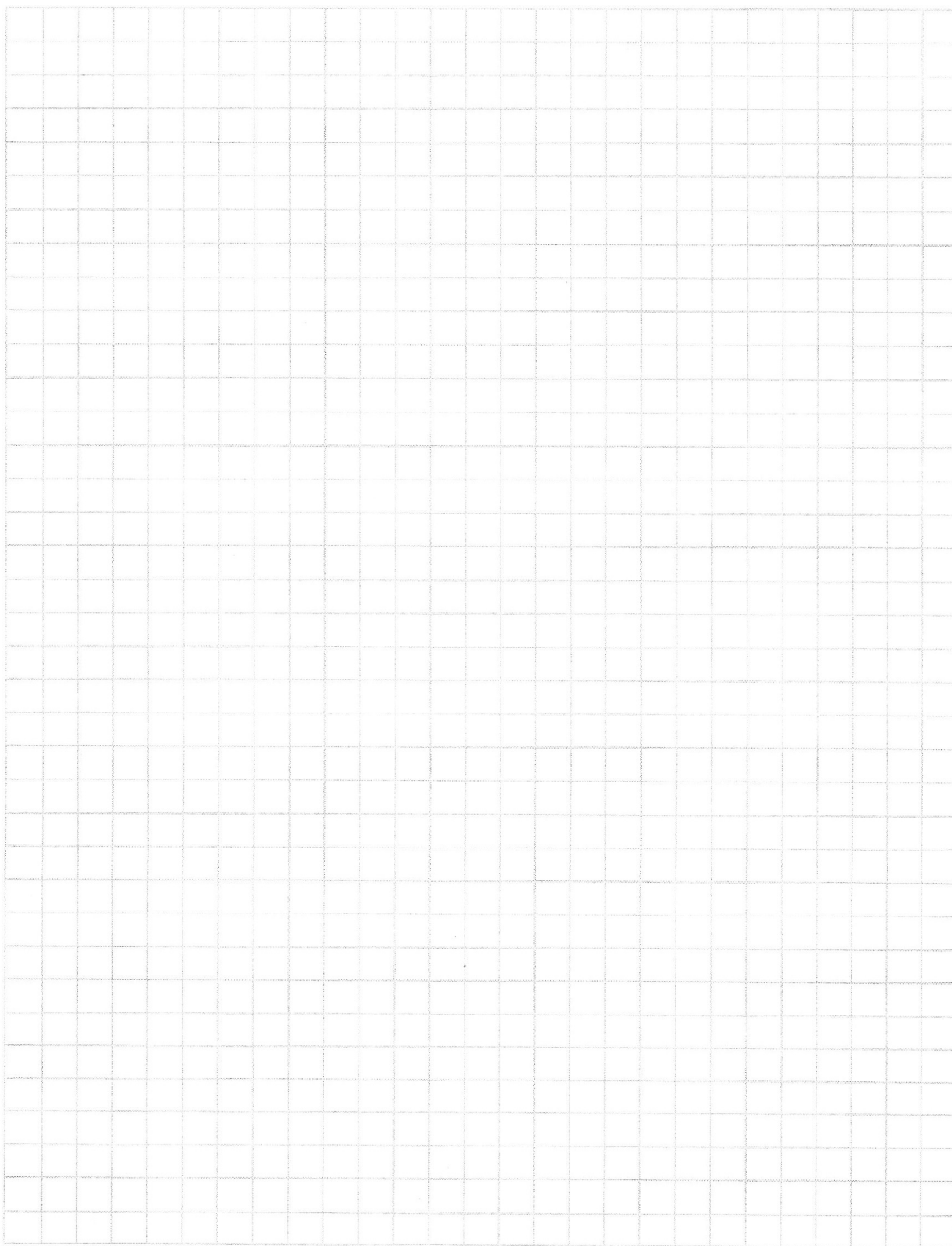


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



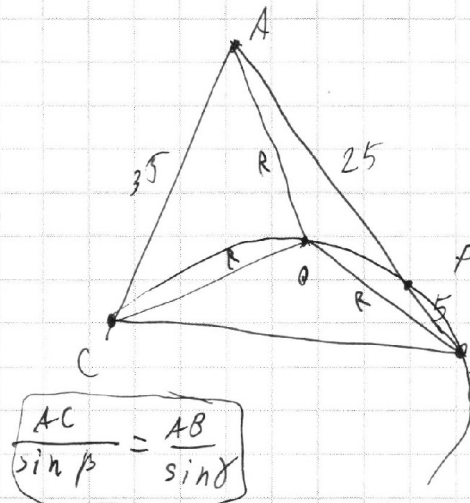
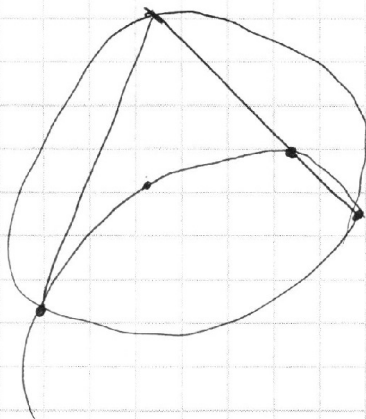


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



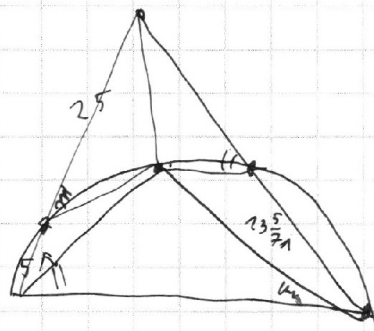
$$25 \cdot 30 = 35 \cdot (35 - x)$$

$$150 = 245 - 7x$$

$$7x = 95$$

$$x = 10 + \frac{25}{7} = 13 \frac{5}{7}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 35 \\ \times 12 \\ \hline 70 \\ 35 \\ \hline 420 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

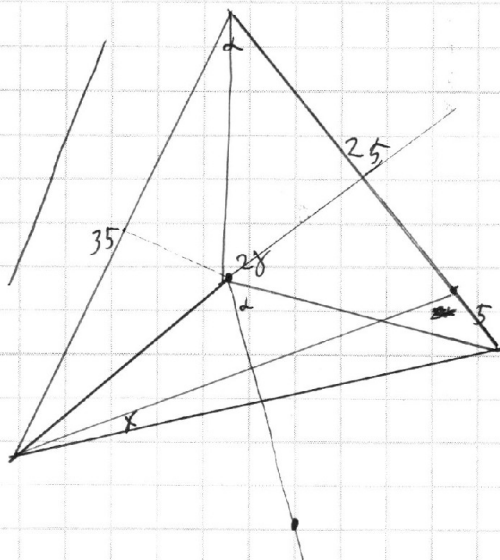


СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$11 + 4 + 6 = 21$$



$$28 + \alpha$$

$$25 \cdot 30 =$$

$$2R' = \frac{R}{\cos \alpha}$$

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R$$

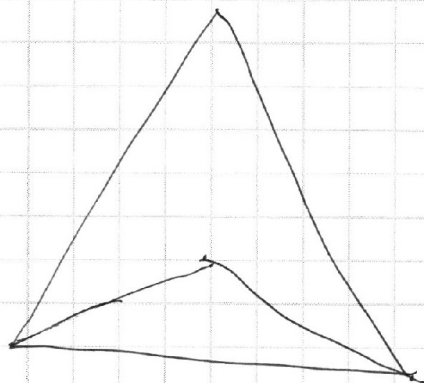
$$R \sin \alpha = \frac{AB}{2}$$

$$\frac{R}{\cos \alpha} = 2R'$$

$$R = \frac{30}{2 \sin \alpha} = \frac{35}{2 \sin \alpha}$$

$$\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{30}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha =$$



$$25 \cdot 30 = R^2 - 2RR' \cos(2\alpha + \alpha) =$$

$$= R^2 \cdot \left(1 - \frac{2R}{R} \cos\right)$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha$$

$$R^2 \left(1 - \cos 2\alpha + \frac{\sin 2\alpha \sin \alpha}{\cos \alpha}\right) =$$

$$= R^2 (2 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha \tan \alpha \cos \alpha) =$$

$$= R^2 \cdot \sin \alpha (2 \sin \alpha + \tan \alpha \cos \alpha) =$$

$$= R \cdot \frac{AB}{2} \cdot (2 \sin \alpha + \tan \alpha \cos \alpha) =$$

$$\frac{AB}{2} (AB + \tan \alpha \cdot R \cos \alpha)$$

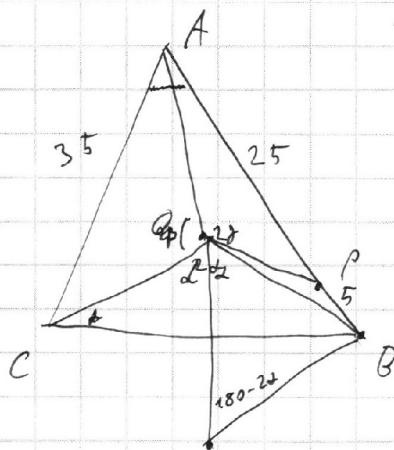


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \alpha = 1$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{AC}{\sin \beta} = 2R$$

$$\frac{AB}{\sin \gamma} = 2R$$

$$\frac{R}{\cos \alpha} = 2R'$$

$$R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \angle AOO' = R'^2$$

$$= 25 \cdot 30$$

$$R^2 - 2R \cdot \frac{R}{2 \cos \alpha} \cdot \cos(\alpha + 2\alpha) =$$

$$= R^2 - R^2 \left(1 - \frac{\cos(\alpha + 2\alpha)}{\cos \alpha}\right) =$$

$$= R^2 \cdot \left(\frac{\cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha} \right)$$

$$= R^2 (1 - \cos 2\alpha -$$

$$k|x| \leq 6$$

$$\arcsin z \leq \frac{\pi}{2}$$

$$= 2 \arcsin x$$

при ген. x и y

нер-во не вып. при

$$x = 6$$

$$y = 2$$

$$= \frac{2 \sin \alpha \sin 2\alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin \pi y \sin \pi x + \cos \pi y \cos \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi y - \pi x) = \cos 2\pi x$$

$$\pi y - \pi x = 2\pi x + 2\pi k$$

$$\pi y - \pi x = -2\pi x + 2\pi k$$

$$y = 3x + 2k$$

$$y = -x + 2k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n \cdot 1111 \cdot \begin{bmatrix} 6 & - \\ -6 & - \\ - & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & - \\ -3 & \end{bmatrix} : 101^2$$

$1111 = 11 \cdot 101$ $\nearrow$ $\begin{matrix} \nearrow 101 \\ \nearrow 606 \end{matrix}$

$$n \cdot 1111 \cdot 606 \cdot \begin{bmatrix} 3 & - \\ -3 & \end{bmatrix} = n \cdot 101 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 101 \cdot \begin{bmatrix} 3 & - \\ -3 & \end{bmatrix}$$

$$n \cdot \begin{bmatrix} 3 & - \\ -3 & \end{bmatrix} \cdot 66 = m^2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{xy}$$

$n=1$ — не т

$$(x-2)(y+2) \quad \text{---} \quad (n, 6) = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & - \\ -3 & \end{bmatrix} : 66$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(xy+2x-2y-4)}$$

$$n:2, n:3 \Rightarrow$$

$$2x - 2y - 4 = 0$$

$$n \cdot 33 \cdot 66 = m^2$$

$$x \neq 2 \quad x = y + 2$$

$$n \cdot 2 = m^2$$

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6(y^2 + 2y) = 8$$

$$\boxed{\begin{matrix} n=2 \\ n=8 \end{matrix}}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$2 \sin \left(\pi \frac{x+y}{2} \right) \cos \pi \left(\frac{x-y}{2} \right) \sin \pi x = -2 \sin \pi \frac{x+y}{2} \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) \cos \pi x$$

$$\sin \pi \frac{x+y}{2} = 0$$

$$\cos \pi \frac{(x-y)}{2} \sin \pi x = \cos \pi x \cdot \sin \left(\frac{x-y}{2} \right) \pi$$

$$\pi \frac{x+y}{2} = 2\pi k$$

$$\pi \frac{x+y}{2} = \pi + 2\pi k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 4\pi k \\ x+y = 2 + 4\pi k \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{4! \cdot (n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot 2!} = \frac{12}{n \cdot (n-1)}$$

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)(n-3) \dots (n-k+1) \cdot k!}{n(n-1) \dots (n-k+1) \cdot (k-2)!} = \frac{k \cdot (k-1)}{n(n-1)}$$

$$k \cdot (k-1) = 6 \cdot 12$$

$$k^2 - k - 6 \cdot 12 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 6 \cdot 12 = 289 = 17^2$$

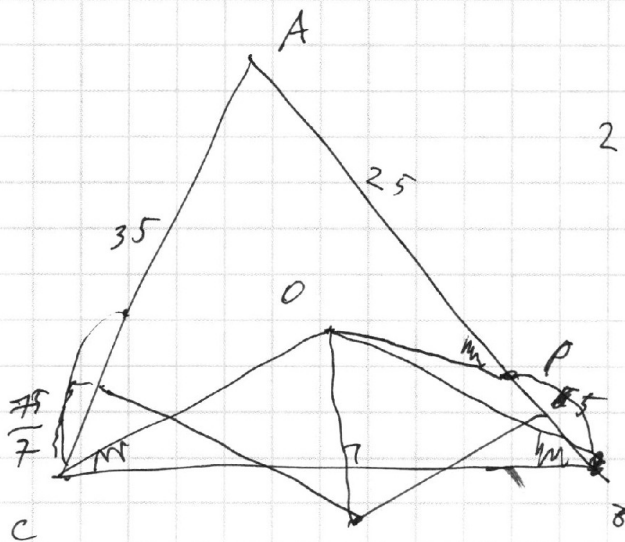
$$k_1 = \frac{1+17}{2} = 9$$

$$k_2 =$$

$$\begin{array}{r} 269 \\ + 2 \\ \hline 338 \\ 288 \end{array}$$

$$169^2 - 169 \cdot 50 + 25^2 \cdot 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$4 \cdot 2\pi R \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \pi R$$



$$25 \cdot 30 = 55 \cdot (35 + x)$$

$$150 = 265 + 7x$$

$$x = (35 - \frac{150}{7})$$

$$\frac{R}{\sin 90^\circ - \alpha} = \frac{R}{\cos \alpha}$$

$$\frac{2AB}{\sin 2\alpha}$$

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = R$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

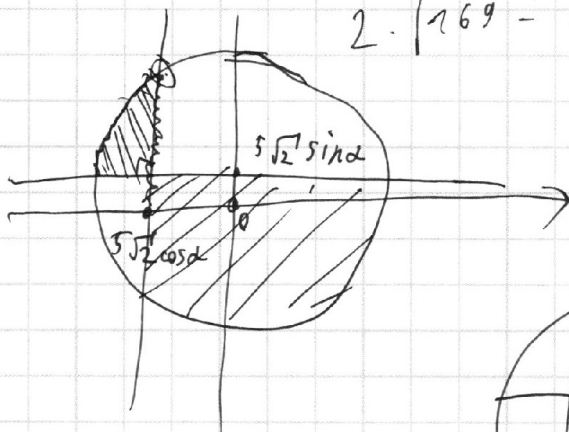
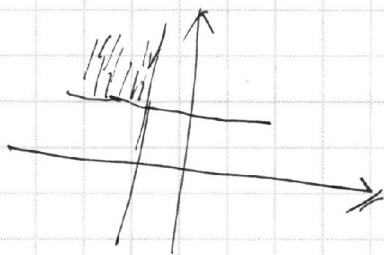
Реш

$$x \leq 5\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$y \geq 5\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$x \geq 5\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$y \leq 5\sqrt{2} \sin \alpha$$



$$2 \cdot \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$

$$10 + 2 \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$2 \cdot \sqrt{169 \cdot 2 - 50 + \sqrt{169^2 + 50^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 169 \cdot 50}$$

