



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A - число A можно записать как $1111 \cdot n$ где $n = N$, $n \in [1, 9]$
т.к. число $A \cdot B \cdot C$ - четный квадрат, то при
разложении на простые множители каждая
простая число будет встречаться четное кол-
личество раз. $A: 11, A: 101, A: 11^2, A: 101^2 \Rightarrow B \cdot C: 11, B \cdot C: 101$
т.к. с факторизацией $\Rightarrow B: 101$ т.к. B - трехзначное
и $B: 101 \Rightarrow B: 11 \Rightarrow C: 11$. т.к. $B: 101$ и B в десятичной
форме из цифр 2 то $B = 202$, аналогично $C = 33$
 $A \cdot B \cdot C = 1111 \cdot n \cdot 202 \cdot 33 = 1111^2 \cdot n \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow n \cdot 2 \cdot 3 = x^2 \Rightarrow n: 6 \Rightarrow$
 $\Rightarrow n = 6$ (т.к. $1 \leq n \leq 9$). $\Rightarrow A, B, C$ - однозначные.

Ответ: $[6666, 202, 33]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$x > 0; y > 0 \Rightarrow K > 0$$

$$x \cdot y \cdot K = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \right) \cdot xy = y + x + 2$$

$$(x-1)(y+1) \cdot K = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \right) \cdot (x-1)(y+1) = y+1 + x-1 + 2 = y+x+2 = K \cdot xy$$

$$K(xy - y + x - 1) = K \cdot x \cdot y$$

$$K \cdot x \cdot y + K(x - y - 1) = K \cdot x \cdot y \Rightarrow K(x - y - 1) = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0 \text{ (т.к. } K > 0)$$

$$y = x - 1$$

$$x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1) = x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 3x^2 + 3x = 1$$

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

д)

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \\ \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2} \\ \begin{cases} y = 1 - 3x + 2n_1 \\ y = x + 1 - 2n_2 \end{cases} \end{cases}$$

для $\begin{cases} y = 1 - 3x + 2n_1 \\ y = x + 1 - 2n_2 \end{cases}$ - Δ необходимо чтобы x и y были разн. четности.

если x, y разн. четности то найдем n_2 что $y = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 3x + 2n_1 \\ y = x + 1 - 2n_2 \end{cases} \Rightarrow x, y$ разн. четности.

четности. $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow |x| \leq 5$

$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\arccos \frac{y}{4} \in [0, \pi] \Rightarrow$

$\Rightarrow \arcsin A + \arccos B \leq \frac{3\pi}{2}$ применим равенство только при

$A = 1$ и $B = -1 \Rightarrow$ если $\begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases} \Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$

~~так как x, y суммарно нечетны~~ Δ мы получаем

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \\ |x| \leq 5 \\ |y| \leq 4 \\ \begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases} \\ x, y - \text{разн. четности} \end{cases}$$

~~так как x, y суммарно нечетны~~ Δ мы получаем

1) $x: 2$ и $y: 2$ $x \in \{4, 2, 0, -2, -4\}$ $y \in \{3, 1, -1, -3\}$
 $\Rightarrow$ таких пар $5 \cdot 4 = 20$

2) $x: 1$ и $y: 2$ $x \in \{5, 3, 1, -1, -3, -5\}$ $y \in \{4, 2, 0, -2, -4\}$
 $\Rightarrow$ таких пар $6 \cdot 5 = 30$

но пара $(5, -4)$ не подходит значит пар $20 + 30 - 1 = 49$

Ответ: 49



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a)

$$\text{мы имеем } \pi x = \alpha \quad \pi y = \beta$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 0$$

$$\cos 2\alpha + \cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$\cos 2\alpha = -\cos(\pi - \alpha - \beta) \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = \pi - \alpha - \beta + 2\pi n_1 \\ 2\alpha = \alpha + \beta - \pi + 2\pi n_2 \end{cases} \quad n_1 \in \mathbb{Z} \quad n_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\beta = \pi(2n_1 + 1) - 3\alpha$$

$$\beta = \alpha + \pi(1 - 2n_2)$$

$$\begin{cases} \pi y = \pi(2n_1 + 1) - 3\pi x \\ \pi y = \pi x + \pi(1 - 2n_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2n_1 + 1 - 3x \\ y = x + 1 - 2n_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ~~или~~ пары (x_1, y_1) удовлетворяют равенству $y = 3x + 1 - 3x$

или $y = x + 1$ или ~~$(y_1 + m)$~~ ~~$y_1 + m$~~ $(x_1, y_1 + 2m_1)$ ~~или~~ $m \in \mathbb{Z}$

таким. ~~то~~ равенство $\Leftrightarrow (x_1, y_1)$ таковы, что

$$(\sin \pi x_1 + \sin \pi y_1) \sin \pi x_1 = (\cos \pi x_1 + \cos \pi y_1) \cos \pi x_1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n - количество организационных классов

k - количество билетов в конже месяцы ($k \geq 4$)

Найдём вероятность ни одного попадания на концерты. Для этого найдём все четверки людей где есть Петя и Вова и подсчитаем их общее количество все возможных четверок.

Если в четверке есть Петя и Вова ~~тогда~~, то с ними могут быть ещё два человека $\Rightarrow$ всего таких четверок $C_{n-2}^2 = \frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!}$, а общее количество четверок $C_n^4 = \frac{n!}{4! \cdot (n-4)!} \Rightarrow$ вероятность ни одного попадания в течение месяца $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!}}{\frac{n!}{4! \cdot (n-4)!}} = \frac{(n-2)! \cdot 4!}{n! \cdot 2!}$

аналогично вероятности ни одного попадания в конже месяцы $\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-2)! \cdot k!}{(k-2)! \cdot (n-k)!}}{\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}} = \frac{(n-2)! \cdot k!}{(k-2)! \cdot n!}$

$$\text{По усл. 2, б.} \quad \frac{4! \cdot (n-2)!}{2! \cdot n!} = \frac{(n-2)! \cdot k!}{(k-2)! \cdot n!} \Rightarrow \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$30 = k(k-1)$$

$$k=6 \quad k=5 - \text{не по } k \geq 4$$

Ответ: $k=6$

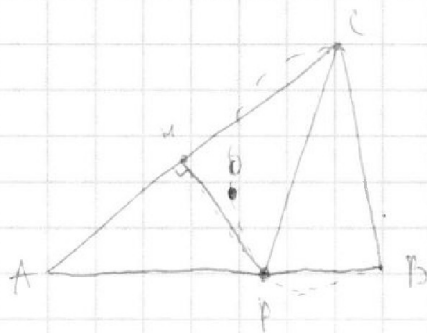


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

O - центр описанной окружности
 $\triangle ABC$.

POCB - линия касания окружности

$$AP = \frac{15}{2}; BP = 5; AC = 9$$

Найти: $S_{\triangle ABC}$

Решение: пусть $\angle COB = \angle CAB = \alpha$

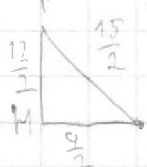
$$\angle CAB = \angle COB \text{ (т.к. } O \text{ - центр окружности)} = 2\alpha$$

$$\angle COB = \angle CPB \text{ (т.к. оба угла опираются на дугу CB)} = 2\alpha$$

$$\angle CAP + \angle ACP = \angle CPB \Rightarrow \alpha + \angle ACP = 2\alpha \Rightarrow \angle ACP = \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle APC - \text{равнобедрен с осн } AC \Rightarrow AP = CP = \frac{15}{2}$$

проведем высоту из точки P на AC



т.к. $\triangle APC$ - равнобедрен по теореме Пифагора $AM \cdot 2 = AC \Rightarrow$
 $\Rightarrow AM = 4,5$. По теореме Пифагора $PM = 6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{15}{2}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \quad AB = AP + PB = \frac{15}{2} + 5 = 12,5$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{4}{5} = 9 \cdot 5 = 45$$

Ответ: 45.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

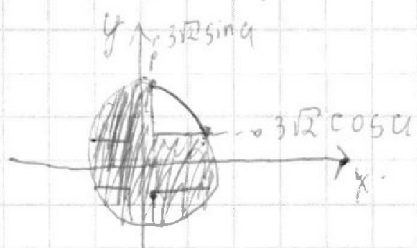
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 \leq 25 \Rightarrow$ вся наша фигура находится в окружн.
с центром в начале координат и радиусом 5

$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \leq 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \geq 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$$

т.е. фигура будет состоять из двух частей



фигура будет перпендикулярна
наименьшему отс. между
и при $\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$
 $3\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 3$
 $3\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = 3$

безумно $\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ тогда $\sin \alpha = \cos \alpha$
или же мы α попытаемся увеличить переместим
и тогда $3\sqrt{2} \sin \alpha_2 \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha_1$
то $3\sqrt{2} (\sin^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2)$ тогда мы имеем $3\sqrt{2} \sin \alpha_2 = 3\sqrt{2} \sin \alpha_1 + k$
а $3\sqrt{2} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 = 3\sqrt{2} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + z$ ($k > 0, z > 0$)
 $(\sin \alpha_1 + k)^2 + (\cos \alpha_1 + z)^2 = \sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1$
 $-2k \sin \alpha_1 + k^2 + 2z \cos \alpha_1 + z^2 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2k \sin \alpha_1 - 2z \cos \alpha_1 > 0 \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

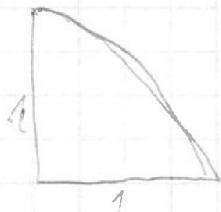
5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



у нас получилось сектор только
вместо радиуса ставим радиус

1 - она равна $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ~~258~~ $10\pi - \frac{\pi}{2} + 2$

Ответ $10\pi - \frac{\pi}{2} + 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(n-2) - (k-2) = n-1-k+2 =$
 $= (n-k)$

$\frac{(n-2)!}{(n-4)!} \cdot \frac{1!}{10} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-4)!}$

$\frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}$
 C_{n-2}^2

$C_n^4 = \frac{(n-4)! \cdot n!}{(n-4)! \cdot 4!}$

$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{4! \cdot (n-2)!}{2! \cdot n!} \cdot \frac{(n-2)! \cdot (n-3)! \cdot (n-4)!}{C_n^4} = \frac{1}{2,5}$

$C_{n-2}^{k-2} = \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}$

$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)! \cdot k!}{(k-2)! \cdot n!}$

$2,5 \cdot \frac{4! \cdot (n-2)!}{2! \cdot n!} = \frac{(n-2)! \cdot k!}{(k-2)! \cdot n!}$

$30 = k(k-1)$

$k^2 - k - 30 = 0$

$k = 56 \pm k = -5$

$\frac{(n-2)!}{(n-4)!} \cdot \frac{1}{C_n^k} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-4)!}$

$\frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{1}{C_n^k} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-4)!}$

$\frac{(n-2)!}{(n-5)!} \cdot \frac{(n-5)!}{n!}$

$k=2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$x + \frac{x^2}{y} + \frac{2x}{y} \quad xy + x^2 + 2x$$

$$y + x + 2 = xy \cdot k$$

$$x-1 + y+1 + 2(x-1)(y+1) = k(x-1)(y+1)$$

$$x^3 - y^3 - 3xy$$

$$x+y + 2(xy - y + x - 1) = k(xy - y + x - 1)$$

$$x+y + 2xy - 2y + 2x - 2 = kxy - ky + kx - k$$

$$(x-y)(x^2 + 2xy + y^2) - 3xy$$

$$2xy - 2y + 2x - y = kx - ky - k$$

$$x^3 + 2xy + y^2 - 3$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

x²

$$xy \cdot k = y + x + 2 \quad x = y + 1$$

$$k \cdot x = 1 + \frac{x}{y} + \frac{2}{y}$$

$$k \cdot y = 1 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x}$$

$$k(x-1)(y+1) = x+y+2$$

$$kx - ky - 1 = 0$$

$$k(xy - y + x - 1) = x+y+2$$

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} + \frac{2}{y} - \frac{2}{x} = 1$$

$$kxy - ky + kx - k = x+y+2$$

$$x^2 - y^2 + 2x - 2y = xy$$

~~(x-1)~~

$$k(x-y-1) = 0$$

$$(x-y)(x+y) + 2(x-y) = xy$$

$$x^3 - (x-1)^3$$

$$x-y-1=0$$

$$(x-y)(x+y+2) = xy$$

$$x^3 - (x-1)^3 = 3x(x-1) = x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 3(x^2 - x)$$

$$x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 3x^2 + 3x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

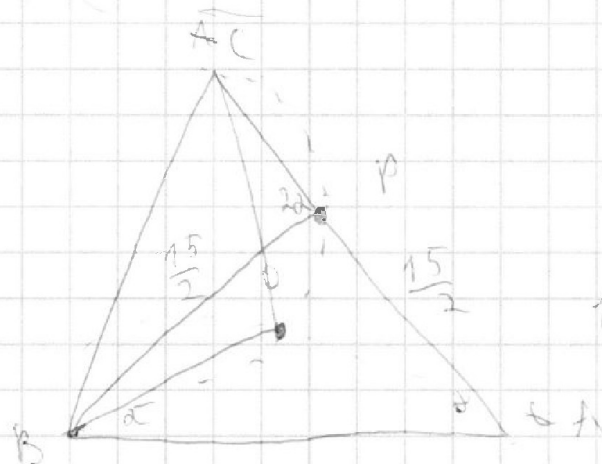
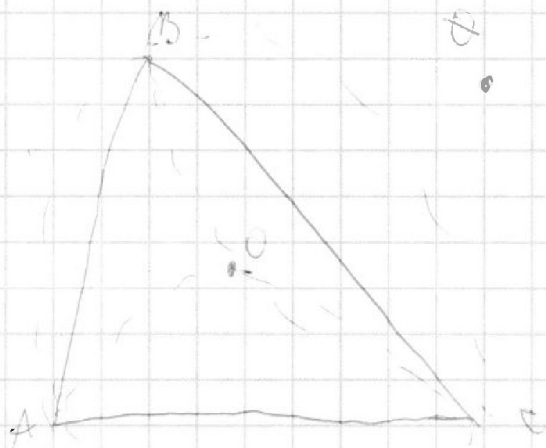
5
☐

6
☐

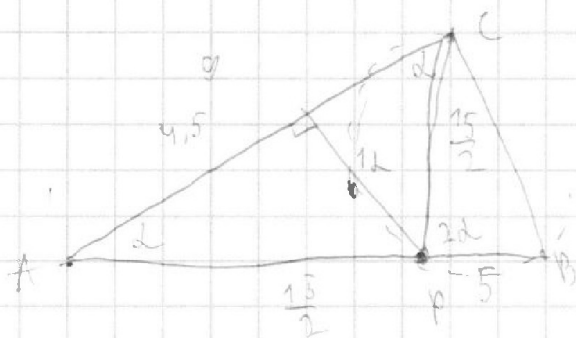
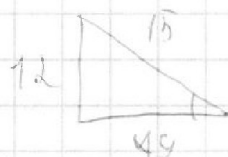
7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$L = \sin \alpha =$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111 \cdot n$$

$$n \in [1, 9] \quad n \in \mathbb{N}$$

$$1111 : 11 = 101 \cdot 11$$

$$101 \cdot 11$$

$$1111$$

$$a \in [1, 9]$$

$$b \in [1, 9]$$

$$c \in [1, 9]$$

$$1111 \cdot n = 101 \cdot k + 11 \cdot c$$

$$a \cdot b \cdot c$$

$$11$$

$$101 \cdot 2$$

$$11 \cdot 3$$

$$1111 \cdot n$$

$$n \cdot c = x^2$$

$$n = 2 \quad n = 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \alpha x + \sin \beta x) \sin \alpha x = (\cos \alpha x + \cos \beta x) \cos \alpha x$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \sin \beta \sin \alpha = \cos^2 \alpha + \cos \beta \cos \alpha$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \quad |x| \leq 5$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha + \cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$\cos 2\alpha = -\cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\pi - \alpha - \beta)$$

$$\cos 2\alpha = -\cos(\alpha + \beta) \quad \cos(\pi - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos 2\alpha$$

$$\cos \alpha = \cos \beta$$

$$2\alpha = \pi - \alpha - \beta + 2\pi n \quad \pi - \alpha - \beta = \alpha + \beta + 2\pi n$$

$$2\alpha = \alpha + \beta - \pi + 2\pi n$$

$$\beta = \pi - 3\alpha$$

$$3\alpha = -\beta + \pi(2n+1)$$

$$1 - 2x = 2y + 2\pi n$$

$$\alpha = \beta + \pi(2n-1)$$

$$\beta = \pi(12n+1) - 3\alpha$$

$$\alpha = \beta + \pi(2n-1)$$

$$y = 1 - 3x - 2n$$

$$\begin{cases} \pi y = \pi(12n+1) - 3\pi x \\ \pi x = \pi y + \pi(2n-1) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \beta = \pi - 3\alpha \\ \beta = \alpha + \pi \\ \alpha = \beta \end{cases}$$



$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha$$



$$\begin{cases} y = 1 - 3x \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 2n + 1 - 3x \\ y = x - 2n + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 3x = 2n + 1 \\ x - y = 2n - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi n \\ \alpha = -\beta + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2n + 1 - 3x \\ x = y + 2n - 1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y_1 = 1 - 3x + 2n_1 \\ y_2 = x + 1 + 2n_2 \end{cases}$$

$$|x| \leq 5 \quad |y| \leq 4$$



$$-4 = 1 - 3x + 2n_1$$

$$5 = 3x - 2n_1$$

$$3x - 2n_1 = 5$$

3

$$\frac{3x}{2} = \frac{5 + 2n_1}{2}$$

30

$$8 \rightarrow (5, 3, 1, -3, -5) \quad (-4, -2, 0, 2, 4)$$

$$(4, 2, 0, 2, 4) \cdot (-3, -1, 1, 3)$$

20

$$4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ -1 \ -2 \ -3 \ -4$$

-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

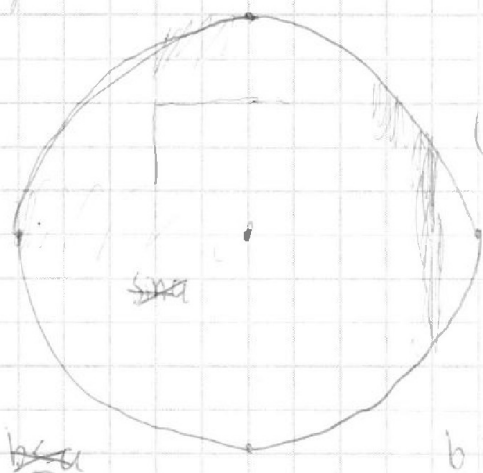
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha \Rightarrow x \leq 3\sqrt{2}$$

$$y \leq 3\sqrt{2} \cos \alpha$$



$$3\sqrt{2} \quad 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sqrt{9+9}$$

$$9 \cdot 2 = 18$$

$$3$$

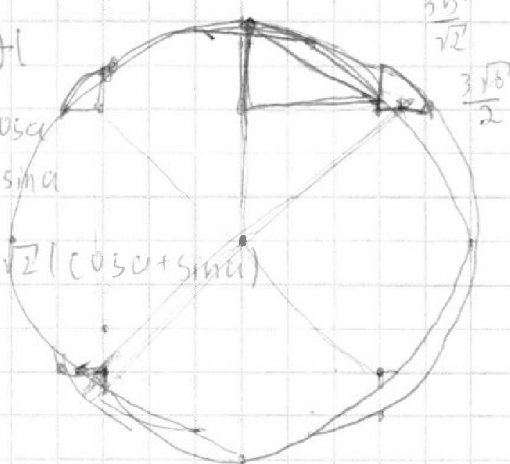
$$(5 - 3\sqrt{2} \cos \alpha)$$

$$5 - 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$5 - 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$10 - 3\sqrt{2}(\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$b \geq a$$



$$x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$2by - 2ax \geq 0$$

$$by \geq ax$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$3^2 + y^2 = 5^2$$

$$x^2 + (x-a)^2 + (y+b)^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2by + b^2 = x^2 + y^2$$

$$a^2 + b^2 + 2by - 2ax = 0$$

$$2ax \leq 2by$$

$$a \geq b$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha$$

$$(3\sqrt{2} \sin \alpha)^2 +$$

$$(5 - 3\sqrt{2} \sin \alpha)^2 + (5 - 3\sqrt{2} \cos \alpha)^2$$

$$25 - 6\sqrt{2} \sin \alpha + 25 - 6\sqrt{2} \cos \alpha + 18$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3(\sqrt{2} \sin \alpha + y)^2 = 25$$

$$\cancel{X} \cos \alpha \quad 3\sqrt{2}c$$

$$X^2 + (3\sqrt{2})^2 \cos^2 \alpha = 25$$

$$X^2 = 25 - 3\sqrt{2}^2 \cos^2 \alpha$$

$$\cancel{X = 3\sqrt{2}}$$

$$X =$$

