



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1.

- Так как A состоит из четырех одинаковых цифр, то A представимо в виде $A = a \cdot 1111 = a \cdot 101 \cdot 11$
 101 и 11 — простые, a — цифра $\Rightarrow B \text{ или } C : 11, : 101$
- $C \leq 99$, так как двузначное $\Rightarrow C$ не может делиться на 101
 $\Rightarrow B : 101$. Очевидно, что единственное трехзначное число, кратное 101 , в записи которого есть 7 это 707 .
- $707 : 11 \Rightarrow C : 11$. В записи C есть $1 \Rightarrow C = 11$.
- $B : 7, C : 7 \Rightarrow A : 7 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow A = 7777$.

Их произведение $7777 \cdot 707 \cdot 11 = (11 \cdot 101 \cdot 7)^2$

Ответ: $7777; 707; 11$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} \stackrel{\sim 2}{=} \frac{x+y+3}{xy} =$$
$$k = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x+4)(y+4)} = \frac{y+y+x-y+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

x, y - положительные $\Rightarrow x+y+3 > 0$.
 $\Rightarrow$ единственный вариант равенства этих
выражений: $xy = (x-4)(y+4)$

$$xy = xy - 4y + 4x - 16.$$

$y = x - 4$ Подставим это в М.

$$M = x^3 - (x-4)^3 - 12 \cdot x \cdot (x-4) =$$
$$= x^3 - (x^3 - 12x^2 + 48x - 64) - 12x^2 + 48x = 64.$$
$$\Rightarrow \underline{M = 64}$$

Ответ: 64.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y + \cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y = 0$$

$$\cos(\pi x - \pi y) + \cos(2\pi y) = 0.$$

$$\cos(\pi x - \pi y) = -\cos(2\pi y)$$

$$\pm 2\pi y = \pi \pm (\pi x - \pi y) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3\pi y = \pi x + \pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi y = -\pi x + \pi(2k+1)$$

$$3y = x + (2k+1), k \in \mathbb{Z}$$

$$y = -x + (2k+1), k \in \mathbb{Z}$$

Умножив: ~~Далее~~ $y = \frac{x}{3} + \frac{2k+1}{3}, k \in \mathbb{Z}$

$$y = -x + 2k+1, k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\arccos \frac{x}{7} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\frac{y}{4}) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}].$$

$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2}.$$

Найдем такие x, y , чтобы равенство выполнялось.

$$\cos(\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

$$\cos(\arccos \frac{x}{7}) \cdot \cos(\arcsin \frac{y}{4}) + \sin(\arccos \frac{x}{7}) \cdot \sin(\arcsin \frac{y}{4}) = 0$$

$$\frac{x}{7} \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{16}} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{49}} \cdot \frac{y}{4} = 0$$

$$\frac{x}{7} \cdot \frac{\sqrt{16-y^2}}{4} + \frac{\sqrt{49-x^2}}{7} \cdot \frac{y}{4} = 0$$

$$x\sqrt{16-y^2} + y\sqrt{49-x^2} = 0.$$

это неравенство, это
существование $\Rightarrow$ потом делен
подставить корни.

$$x^2(16-y^2) = y^2(49-x^2)$$

$$16x^2 - x^2y^2 = 49y^2 - x^2y^2$$

$$16x^2 = 49y^2.$$

$$x, y - \text{целые}$$

$$\Rightarrow y=4, x=7. y \leq 4, x \leq 7$$

$\Rightarrow$ решение: $(0;0), (\pm 7; \pm 4).$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

УЗ. Продолжение

Итого мы имеем,

нам удовлетворяют все $x \in [-7; 7]$, $y \in [-4; 4]$
кроме $0; \pm 4; \pm 7$.

$$\Rightarrow x \in (-7; 0) \cup (0; 7) \quad y \in (-4; 0) \cup (0; 4)$$

Все они должны удовлетворять первому уравнению.

$$3y = x + (2k+1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$y - \text{целое} \Rightarrow x + (2k+1) : 3. \quad \text{Т.к. } |y| \leq 4, |x| \leq 7:$$

x и y разн. четность.

$x = -7; y = \pm 4$ - не подходит по 2-му

$x = -7; y = -2; y = 0; y = 2; y = -4$.

$x = -6; y = -3; -1; 1; 3$.

~~$x = -5; y = -4$~~ . На четный y

четный x кроме ± 4 еще 4 вар.

на четный нечетный кроме ± 7

y еще 5 вар. с ± 7 - 4 вар.

$$\text{Итого } 6 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 38 + 28 = 66.$$

$$y = -x + (2k+1), k \in \mathbb{Z}.$$

Все то же самое, четность

разн., пары те же, вариантов столько же
64.

Но это те же пары $\Rightarrow$

~~64 + 64 = 128~~. Второй раз их не считаем.

Ответ: а) $3y = x + 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$
 $y = -x + 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

б) ~~128~~ 64 пары.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нч.

Если дилетов 4: количество вариантов раздать дилеты: C_n^4 ,
где n - количество участников конкурса.

количество вариантов раздать дилеты,
чтобы Петя и Вась вместе получили C_{n-2}^2 .
Вероятность: $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \frac{4!(n-4)!}{n!} = \frac{12}{n!}$

Если дилетов $x+4$: кол-во вар. раздать: C_n^{x+4}
кол-во вар. раздать чтобы Петя и Вась вместе: C_{n-2}^{x+2}
Вероятность: $\frac{C_{n-2}^{x+2}}{C_n^{x+4}} = \frac{(n-2)!}{(x+2)!(n-4-x)!} \cdot \frac{(x+4)!(n-4-x)!}{n!} = \frac{(4+x)(3+x)}{n!}$

по условию, вторая вероятность в 11 раз больше первой

$$\frac{(4+x)(3+x)}{n!} = \frac{11 \cdot 12}{n!}$$

$$(4+x)(3+x) = 121$$

$$x^2 + 7x - 120 = 0.$$

$$(x+15)(x-8) = 0. \quad \text{Таким образом, количество дилетов увеличилось, } x > 0$$

$$\Rightarrow x = 8$$

$$\Rightarrow \text{Всего дилетов выдано } 8+4=12 \text{ дилетов}$$

Ответ: 12 дилетов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

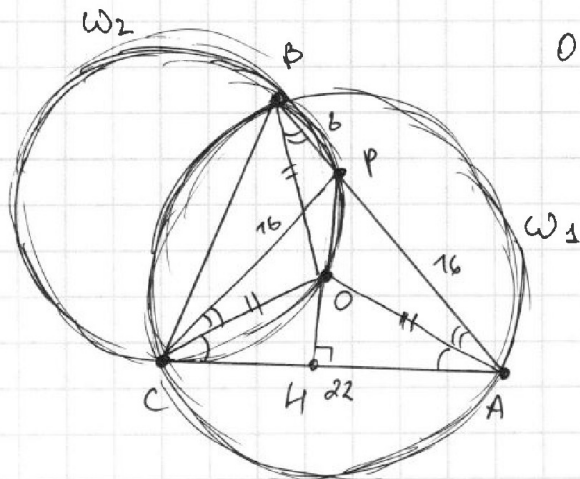
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 5



O - центр ω_1 , описанной около $\triangle ABC$

$\Rightarrow OB = OA = OC$

$\Rightarrow \angle OCA = \angle OAC$ т.к. $\triangle COA$ - равнобедр.

$\Rightarrow \angle OAB = \angle OBA$ т.к.

$\triangle BOA$ - равнобедр.

OCP - вписанный $\Rightarrow$

$\angle PBO = \angle PCO$.

$\Rightarrow \angle OCP = \angle OAP$

$\Rightarrow \angle CAP = \angle PCA \Rightarrow$

$\triangle PCA$ - равнобедренный $\Rightarrow$

$PC = AP = 16$.

O - центр ω_2 описанной $\Rightarrow$

O лежит на перпенд. к AC.

$CP = PA \Rightarrow P$ лежит на серединном перпенд. к AC

$\Rightarrow PO$ - перпенд. к AC

Пусть PO пересечет AC в т. H.

$\Rightarrow$ т.к. центр, H - середина AC, $\angle AHP = 90$

$\Rightarrow AH = 11$ (AC/2)

$\cos \angle A = \frac{AH}{AP} = \frac{11}{16}$

$\sin \angle A = \sqrt{1 - \frac{121}{256}} = \frac{\sqrt{135}}{16}$

$S_{\triangle AHC} = AC \cdot AH \cdot \frac{1}{2} \sin \angle A =$

$= 22 \cdot (8+16) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{135}}{16} = \frac{22 \cdot 24 \cdot \sqrt{135}}{16 \cdot 2} =$

$= \frac{33}{2} \sqrt{135}$

Ответ: $\frac{33}{2} \sqrt{135}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

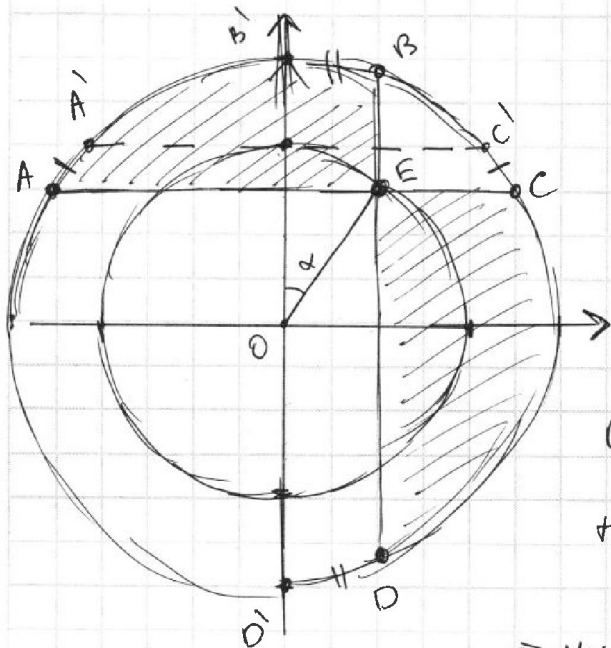
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 \leq 36$ — это круг с центром в $(0;0)$ и радиусом 6.

Прямые $x = -4 \sin \alpha$ и $y = 4 \sin \alpha$ образуют две хорды, одна перпендикулярна оси OX , другая — OY . Сама же точка $(-4 \sin \alpha, 4 \cos \alpha)$ лежит на окружности радиуса 4.

Периметром M является сумма двух хорд и двух дуг, лежащих в левой-верхней и правой-нижней четвертях.



Назовем хорды AC и BD

Теперь возьмем $\alpha = 0$, отметим где же

A', B', C', D' .

Заметим, что $AE \parallel AC \parallel OX$,

$B'D' \parallel BD \parallel OY$

$\angle A'A' = \angle C'C'$, $\angle B'B' = \angle D'D'$

$\Rightarrow \angle A'B' + \angle C'D' = \angle A'B' + \angle C'D'$

Однако, что $\angle A'B' + \angle C'D' =$

полovina полной длины окружности,

т.е. $\angle A'B' = \angle B'C'$, $\angle A'D' = \angle C'D'$

и симметрии

$\Rightarrow \angle A'B' + \angle C'D' = \text{const} = \pi \cdot 6$.

$\Rightarrow$ Мы максимизируем $AC + BD$.

Пусть O — точка $(0;0)$, $E = AC \cap BD$.

$OE = 4$, $\angle EOB' = 4\alpha$. $AO = 6$.

$\Rightarrow AE = 4 \sin \alpha + \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$

$EC = \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} - 4 \sin \alpha$.

$AC = 2 \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$

Аналогично $BD = 2 \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} =$

$= 2 \sqrt{36 - 16 + 16 \cos^2 \alpha}$

$AC + BD = 2 (\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} + \sqrt{20 + 16 \cos^2 \alpha}) = 2a$.

$a \rightarrow \max$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н 6. Продолжение.

$$a^2 = 36 - 16\cos^4\alpha + 20 + 16\cos^2\alpha + 2\sqrt{36 - 16\cos^4\alpha}\sqrt{20 + 16\cos^2\alpha}$$

$$a^2 = 52 + 2\sqrt{36 - 16\cos^4\alpha}\sqrt{20 + 16\cos^2\alpha}$$

$$a^2 = 52 + 8\sqrt{9 - 4\cos^4\alpha}\sqrt{5 + 4\cos^2\alpha}$$

$$\sqrt{9 - 4\cos^4\alpha}\sqrt{5 + 4\cos^2\alpha} \rightarrow \max.$$

$$-16\cos^4\alpha + 16\cos^2\alpha + 45 \rightarrow \max.$$

это параболa ветвейми вниз $\Rightarrow$

max в вершине

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \max \text{ при } \alpha = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$M = 6\pi + 2(\sqrt{36 - 8} + \sqrt{20 + 8}) = 6\pi + 4\sqrt{28} = 6\pi + 8\sqrt{7}.$$

Ответ: $M = 6\pi + 8\sqrt{7}$

$$\alpha = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



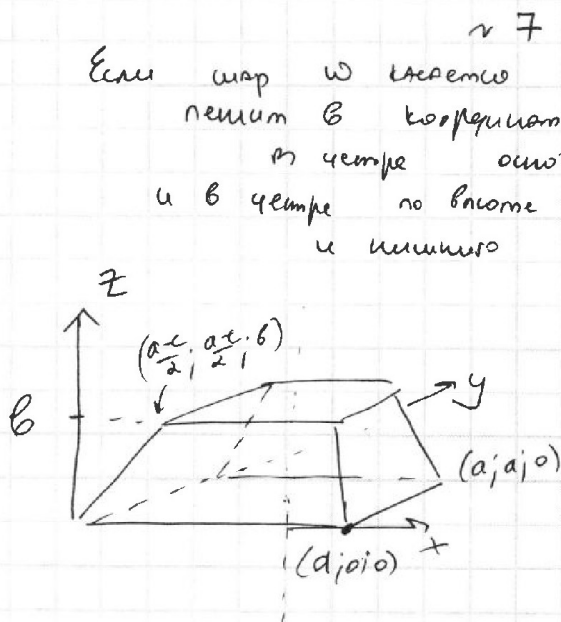
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Введем координатную ось:

x и y направим вдоль двух перпендикулярных ребер большего основания,

ось z — перпендикулярно этому же основанию.

Пусть длина ~~к~~ большего основания — a, меньшего — c, высота — h.

Пусть центр ω — O_2 . Тогда координаты $\tau. O_2$: $(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{b}{2})$.

Центр Ω — O_1 .

$\tau. O_1$ равноудалена от ребер,

$\tau. O_2$ — от граней $\Rightarrow$ точка O_2

и O_2 лежат на одной и той же

линии симметрии, проходящей через

центры оснований вдоль оси z.

Заметим, что если мы увеличим ω до

момента касания с ребром, мы получим Ω ,

т.е. пирамида ~~правильная~~ $\Rightarrow O_1$ и O_2 совпадают.

Посчитаем R_{ω}^2 :

$$R_{\omega}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (h+b)^2$$

где h — расстояние от ω до меньшего основания.

Получим сечение — равнобедренную трапецию

с коор. $(0,0,0)$; $(\frac{a-c}{2}; \frac{a-c}{2}; b)$; $(a,a,0)$; $(\frac{a+c}{2}; \frac{a+c}{2}; b)$

У нас есть окружность, которая касается всех ее ребер $\Rightarrow$ она вписанная

Ее основание ω $\tau. O_2$ и $c \tau. \Omega \Rightarrow$

$$a\sqrt{2} = c$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

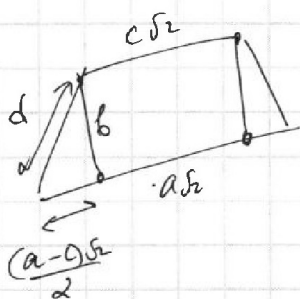


СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н7. Продолжение

Её ребра из т. Пирагора: для Δ из точек $(0;0;0)$; $(\frac{a-c}{2}, \frac{a-c}{2}, b)$ и перпендикуляра из последней точки на основание



$$d^2 = \left(\frac{(a-c)\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{(a-c)^2}{2} + b^2 = \frac{(a-c)^2}{2} + b^2$$

Т.к. трапеция описанная:

$$c\sqrt{2} + a\sqrt{2} = 2d = 2\sqrt{\frac{(a-c)^2}{2} + b^2}$$

Это эквивалентно тому, что

$$d = \frac{(a-c)\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{Угол у основания трапеции} = 45^\circ$$

Заметим, что это и есть угол наклона д-левой грани.

Ответ: 45°



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

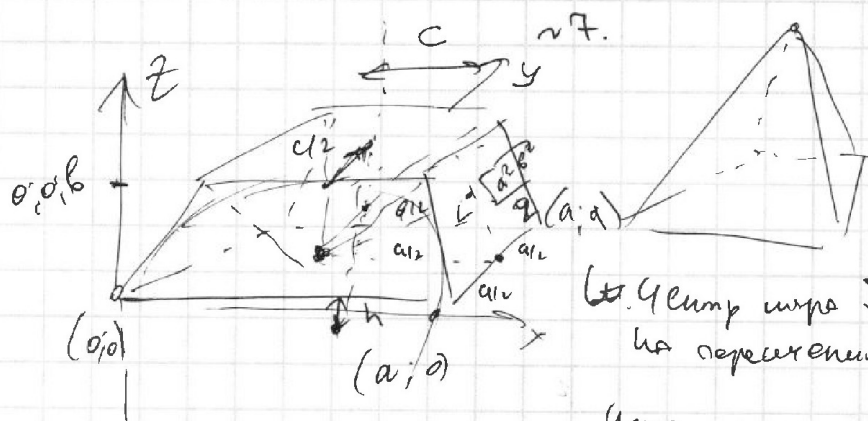
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нб. Черновик

• Сумма дуг постоянна, так как
при движении γ -Е мы симметрично
изменяем одну дугу и другую, т.е.
добавим с одной стороны и вычтем с другой



Центр шара Ω
на пересечении диагоналей.

Центр ω пересечения
трех телесных углов.

По координатам O_1 и O_2

шара.

O_1 - центр Ω

O_2 - центр ω .

$(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$.

В очевидном
серии высоты.

$$R_{\omega} = \frac{b}{2}$$

$$O_2: (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}).$$

$$R_{\Omega}^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2 = (\frac{c}{2})^2 + (h+b)^2.$$

$$O_1: (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -h)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

~6

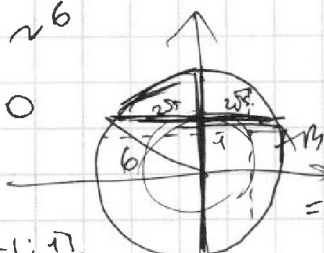
$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

$$4\sin\alpha, 4\cos\alpha \in [-1; 1].$$

$$x^2+y^2 \leq 36 \rightarrow \text{окр. } K: R=6.$$

$$y = 4\cos\alpha - \text{прямая}$$

$$x = -4\sin\alpha - \text{прямая}$$



$$2\pi \cdot 6 + 4\sqrt{5} + 12 =$$

$$AB^2 = AE^2 + EB^2 = 12(\sin\alpha) + 4\sqrt{5} \\ = (a + 2\sqrt{16-a^2})^2 + (\sqrt{36-a^2} - \sqrt{16-a^2})^2$$

$$AB \sim AB. \\ (a + \sqrt{26})^2 +$$

$$y \leq 4\cos\alpha \text{ и } x \geq -4\sin\alpha$$

$$y \geq 4\cos\alpha, x \leq -4\sin\alpha$$

$$\angle AOB + \angle COD = \pi \cdot 6$$

$$\text{точка } (-4\sin\alpha; 4\cos\alpha)$$

$$\text{минимум } \omega$$

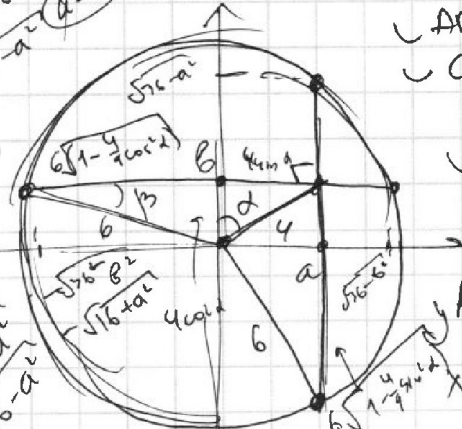
$$\text{окр. и точки } K \text{ и } L$$

$$A = (\sqrt{36-b^2}; b) \\ C = (\sqrt{36-b^2}; b)$$

$$\angle AOB = 2\pi \cdot 6 \cdot \angle AOB \\ \angle COD = 2\pi \cdot 6 \cdot \angle COD$$

$$\angle AOB + \angle COD = \frac{6\sin\alpha}{\sin\alpha} = 4\cos\alpha \\ = 6(\angle AOB + \angle COD) \\ \cos\alpha = \frac{4}{6}$$

$$A = yE = yC. \\ xB = xE = xP. \\ \cos\alpha = 1 - \sin\alpha$$



$$E = (a; \sqrt{16-a^2}) \\ AC = 2\sqrt{36-16-a^2} \\ = 2\sqrt{16-a^2} \\ MP = 2\sqrt{36-a^2}$$

$$AC + MP = 6\sqrt{1 - \frac{4}{6}\cos\alpha} + \sqrt{1 - \frac{4}{6}\cos\alpha} (a/b) - \cos\alpha \cdot E. \\ B = \sqrt{36-a^2} \quad D = \sqrt{36-a^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 5 черновики

$AB = 24$

$\Rightarrow ABC = ?$

$\angle OCB = \angle CBO$
 $\text{т.к. } OB = OC$

$\angle OBA = \angle BAO$
 $\text{т.к. } OB = OA$

$\angle PBO = \angle POB$
 $\text{т.к. } \triangle PBO \sim \triangle BPO$

$\Rightarrow \angle OCP = \angle OAP$

$\angle OCA = \angle OAC$

$\text{т.к. } \triangle OCA \sim \triangle OAC$

$\Rightarrow \angle ACP = \angle PAC \Rightarrow CP = AP = 16$

O лежит на
 центре $\triangle ABC$
 $\Rightarrow PO$ является
 высотой AC .

$OA = 11$
 $PA = 16$

$\cos \angle A = \frac{11}{16}$

$\sin \angle A = \frac{\sqrt{135}}{16}$

$c^2 = 22 \cdot 24 \cdot \frac{\sqrt{135}}{16} \cdot \frac{1}{2}$
 $\times \frac{16^2}{96} = \frac{288}{256} - 1.1 = 1.85$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

> 4 вып. не по числу. ~ 4 Черновик

кон-во случайных событий равно
Чех и ч n 11-класс. = C_n^{4+x}
Страно C_n^{4+x}

Второй вариант
кон-во вариантов,
когда нете и вни
ура получим искомое C_{n-2}^2

$$C_n^{4+x} = 11 \cdot C_n^4$$

$$\frac{n!}{(4+x)!(n-4-x)!} = \frac{11 \cdot n!}{4! \cdot (n-4)!}$$

$$4! \cdot (n-4)! = 11 \cdot (4+x)! \cdot (n-4-x)!$$

$$(n-4)(n-5) \cdot (n-4-x) = 11 \cdot 5 \cdot 6 \cdot (4+x)$$

C_{n-2}^2 - кон-во вар.,
где ни в одной паре

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_n^{2+x}}{C_n^4} = \frac{n!}{(2+x)!(n-2-x)!} \cdot \frac{4! \cdot (n-4)!}{n!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot (n-4)(n-3)}{n(n-1)}$$

C_n^4 - кон-во вар. Страно:

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!} \cdot \frac{4! \cdot (n-4)!}{n!} = \frac{12}{n(n-1)} = (n-4-x)(n-3-x)(4+x)(3+x)$$

$$11 \cdot 12(n-4)(n-3) = 11(n-4-x)(n-3-x)(4+x)(3+x)$$

$$12(n^2 - 7n + 12) = (12 + 7x + x^2)(n^2 - 7n - 2xn + 12 + 7x + x^2)$$

$$12(n^2 - 7n + 12) = (12 + 7x + x^2)(n^2 - 7n + 12) + (12 + 7x + x^2)(x^2 + 7x - 2xn)$$

$$\frac{C_{n-2}^{2+x}}{C_n^{4+x}} = \frac{(n-2)!}{(2+x)!(n-4-x)!} \cdot \frac{(4+x)! \cdot (n-4-x)!}{n!} = \frac{(4+x)(3+x)}{n(n-1)}$$

$2x^2 + 7x - 120 = 0$

$$(4+x)(3+x) = 12 \cdot 11$$

$$12 + 7x + x^2 = 12 \cdot 11$$

$$x^2 + 7x - 120 = 0$$

$$x = 49 + 460 = 509$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 480}}{2} = \frac{-7 \pm 23}{2} = 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1. Черновики

A - четырехзначное и симметричное $\overline{aaaa} : 1111 =$
 B - трехзначное, хотя в него и цифра 7 $= 101 \cdot 11$
 C - трехзначное, хотя в него и цифра 1.

$$\begin{array}{r} 101 \overline{) 1111} \\ \underline{101} \\ 101 \\ \underline{101} \\ 0000 \end{array}$$

A · B · C - искомое натуральное

$$A = a \cdot 101 \cdot 11 \rightarrow B \text{ или } C : 11, : 101.$$

~~1) Пусть C : 11. Тогда C = 11.~~

$$B \leq 99 \Rightarrow B : 101.$$

$$B = 707 \text{ т.к. } = 707 \cdot 7$$

$$101 \cdot 10 > 999$$

101 и вместе цифра 7.

Заметим, что тогда B = 11

$$\Rightarrow C : 11 \Rightarrow C = 11 \text{ т.к.}$$

иначе нет 1.

$$\Rightarrow A = 7777 \text{ т.к. искомое}$$

содержит 7 в 1 числе

Ответ: 7777; 707; 11

~2

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x+4)(y+4)}$$

$$M = x^3 y^3 - 12xy - ?$$

$$x \neq 0, y \neq 0; x \neq -4; y \neq -4$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x+4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{(x+4)(y+4)}$$

$$\text{либо } x+y+3=0, \text{ либо } y = -x-3.$$

$$(x+4)(y+4) = xy.$$

$$M = x^3 + (x+3)^3 + 12x(x+3) =$$

$$= x^3 + (x+3)(x^2 + 6x + 9) + 12x(x+3) = xy - 4y + 4x - 16 = xy$$

$$= x^3 + x^3 + 9x^2 + 9x + 9 + 12x^2 + 36x = 2x^3 + 21x^2 + 45x + 9$$

$$+ 12x^2 + 36x = 2x^3 + 21x^2 + 48x + 9$$

$$xy - 4y + 4x - 16 = xy$$

$$x - y - 4 = 0$$

$$y = x - 4$$

$$\text{вероятно } x=0; x=4; x=-3; x=1$$

$$M \neq 81 \quad M \neq$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

1) $x+y+3=0$. $y=-x-3$

$$M = 2x^3 + 21x^2 + 63x + 21$$

$$21 \cdot 16 = 320 + 16$$

$$x \neq 0, x \neq 4; x = 1; x \neq -3 \Rightarrow$$

$$21 \cdot 9 = 189$$

$$M \neq 8 | M \neq 2 \cdot 64 + 21 \cdot 16 + 63 \cdot 4 + 21 =$$

$$63 \cdot 9 = 189$$

$$= 128 + 336 + 252 + 21 =$$

$$= 588 + 126 + 21 = 716 + 21 = 737$$

$$x, y > 0.$$

$$M \neq 2 + 21 + 63 + 21 = 23 + 144 = 167$$

$$\Rightarrow M > 0$$

$$M \neq -54 + 189 - 189 + 21 = 27$$

$$y = -x - 3 \Rightarrow$$

2mo varia
opara
16-3=13 $\rightarrow$ 13
da to ne
moner

2) $(x-4)(y+4) = xy$ $4x - 4y - 16 = 0$ $y = x - 4$

$$M = x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4) =$$

$$= x^3 - (x^3 - 12x^2 + 48x - 64) - 12x^2 + 48x =$$

$$= 64$$

Orban: 64

$$\frac{x}{7} \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{16}} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{49}} \cdot \frac{y}{4} > 0$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4}) > 0 \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

a) $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$

moner uam x, y on 0 go 2.

$$\sin(s+t) - \sin(s-t) =$$

$$= \sin s \cos t + \sin t \cos s - \sin s \cos t + \cos s \sin t =$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

$$= 2 \sin t \cos s.$$

$$\sin \pi y - \sin \pi x = 2 \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \sin \frac{\pi(y+x)}{2}$$

$$\sin \pi y \sin \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos \pi y \cos \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \sin \pi x \sin \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\cos(2\pi y) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\begin{cases} 2\pi y = \pi y - \pi x + 2\pi k \\ 2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = k - x \\ 3y = x + 2k \\ 2y = y - x + 2k \\ 2y = x - y + 2k \end{cases}$$