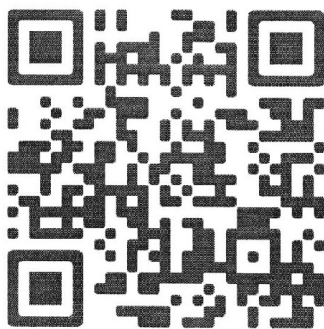
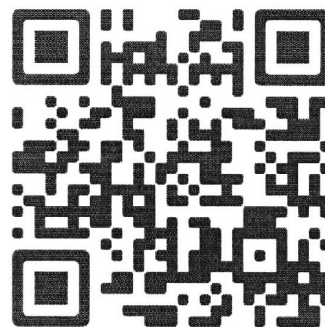




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Пётя и Вася высчитали, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

число A представимо в виде $n \cdot 1111$, где n - цифра,
у которой сдвинуто число A

$$\Rightarrow A = n \cdot 11 \cdot 101$$

↑
трехзначное число

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C : 101 \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 101^2, \text{ т.к. } ABC - \text{палаграм}$$

и 101-простое

$$C \text{ по условию трехзначное} \Rightarrow C < 100, n - \text{цифра} \Rightarrow C < 100$$

$$\Rightarrow \text{если } ABC : 101^2, \text{ то } B : 101, \text{ т.к. } 101 - \text{простое}$$

$$B - \text{трехзначное и } B = k \cdot 101 \text{ для некоторого нам. } k$$

$$\Rightarrow B = \overline{kok}, \text{ одна из цифр } B \text{ не делится } 7$$

$$\Rightarrow k=7 \Rightarrow B=707=7 \cdot 101$$

$$ABC : 11, \text{ т.к. } A : 11 \Rightarrow ABC : 11^2, \text{ т.к. } ABC - \text{палаграм}$$

и 11-простое

$$n - \text{цифра} \Rightarrow C < 10 \Rightarrow A \cdot 11^2; B=707 \cdot 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C : 11 \Rightarrow C = q \cdot 11 \text{ для некоторого нам. } q, \text{ причем}$$

$$C - \text{трехзначное} \Rightarrow C = \overline{qq} \Rightarrow \text{т.к. } q \text{ одна цифра} =$$

$$21, C=11=1 \cdot 11$$

$$\Rightarrow A=n \cdot 11 \cdot 101, B=7 \cdot 101, C=11$$

$$\Rightarrow ABC = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7n; ABC - \text{палаграм и } n > 0, C < 10$$

$$\Rightarrow n=7 \Rightarrow A=7 \cdot 11 \cdot 101=7777, B=7 \cdot 101=707,$$

$$C=11. \text{ Тогда } ABC=(7 \cdot 11 \cdot 101)^2$$

$$\text{Ответ: } (7777; 707; 11)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{(x-4)} + \frac{1}{(y+4)} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} \quad | \cdot xy(x-4)(y+4)$$

$$y(x-4)(y+4) + x(x-4)(y+4) + 3(x-4)(y+4) = xy(y+4) + xy(x-4) + 3xy$$

$$+1222 \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{(x-4)} + \frac{1}{(y+4)} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y}{xy} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y}{(x-4)(y+4)} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\Rightarrow x+y+3 = 3 \quad \text{или} \quad xy = (x-4)(y+4) \quad (x, y, x-4, y+4 \neq 0)$$

$$x+y = -3 \quad \text{или} \quad xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$\Rightarrow x+y = -3 \quad \text{или} \quad x-y = 4 \quad (x, y, x-4, y+4 \neq 0)$$

$$\text{По условию } x, y > 0 \Rightarrow x+y > 0 \quad (\text{а также } x, y, y+4 > 0)$$

$$\Rightarrow x-y = 4 \quad (x, y > 0, x-4 \neq 0)$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - 12xy &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = \\ &= 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy = 4(x^2 - 2xy + y^2) = \\ &= 4(x-y)^2 = 64 \quad (\text{подставив } x-y=4) \end{aligned}$$

$$64 \text{ достигается, например, при } y=1, x=5 \quad (k = \frac{9}{5})$$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

☐

2

☐

3

☒

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

СТРАНИЦА

 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \sin \pi x \cdot \sin \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\cos(2\pi y) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\Rightarrow 2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi k_1$$

или

 $k_1, k_2 - \text{целые}$

$$2\pi y = -\pi x + \pi y + 2\pi k_2$$

$$\Rightarrow 3y = x + 2k_1 \quad \text{или} \quad y = -\frac{x}{3} + 2k_2 \quad k_1, k_2 - \text{целые}$$

$$y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}k_1$$

$$\Rightarrow \text{все пары чисел } (x; \frac{x}{3} + \frac{2}{3}k_1) \text{ и } (x; -\frac{x}{3} + 2k_2),$$

где k_1, k_2 — любые целые числа

$$a) \text{ Ответ: } (x; \frac{x}{3} + \frac{2}{3}k_1), (x; -\frac{x}{3} + 2k_2) \quad (k_1, k_2 - \text{целые})$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть одноплатных машин всего n , билетов в одну сторону выдано k .

Всего вариантов распределить билеты C_n^k , k билетов - C_n^k . Теперь рассмотрим, сколько вариантов распределить

билетов так, что и Васа, и Тера пойдут на концерт.

Можно просто распределить оставшиеся $n-2 \geq 2$ и $k-2$ билетов соответственно между оставшимися одноплатными машинками $\Rightarrow$ числом вариантов C_{n-2}^2 и C_{k-2}^2

C_{n-2}^{k-2} соответственно. Все случаи равновероятны $\Rightarrow$

изучаемая вероятность Васа и Тера одновременно

пойдут на концерт $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^k}$, полная $\frac{C_{k-2}^2}{C_n^k}$.

Обозначим их за p и q соответственно.

$$p = \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2!}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}} = \frac{4!}{2!} \cdot \frac{1}{(n-1)n} = 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{(n-1)n}$$

$$q = \frac{\frac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot (n-k)!}}{\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}} = \frac{k!}{(k-2)!} \cdot \frac{1}{(n-1)n} = k \cdot (k-1) \cdot \frac{1}{(n-1)n}$$

$((n-2) - (k-2) = (n-k))$

По условию $q = 11p \Rightarrow \frac{q}{p} = 11$

$$\Rightarrow \frac{k(k-1)}{12} = 11 \Rightarrow k^2 - k = 132 \Rightarrow (k-12)(k+11) = 0$$

$k > 0 \Rightarrow k = 12$, то есть было выдано 12 билетов

Ответ: 12 билетов



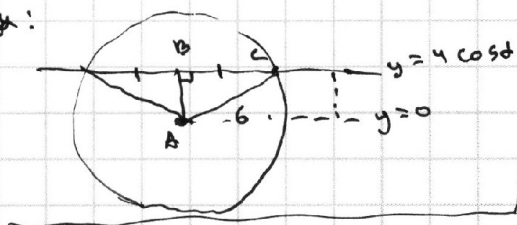
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4:



N6 (предложение)

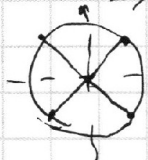
Мы покажем, что если суммарно
длины хорд $2a$ и $2b$,
то $a^2 + b^2$ фиксировано $\Rightarrow$ т.н.

$a, b \geq 0$, $a+b$ max ~~достигается~~ достигается

- достигается при $a=b$. Если $a=b$, $\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} = \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$

$$\Rightarrow 16 \cos^2 \alpha = 16 \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \pm \sin \alpha$$



$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ где } k -$$

- любое целое число

$$\Rightarrow a=b = \sqrt{36 - \frac{16}{2}} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow \text{Сумма длин хорд max} = 2(2\sqrt{7}) + 2(2\sqrt{7}) = 8\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow M_{\max} = 8\sqrt{7} + 6\pi \text{ и достигается при всех } \alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ где } k - \text{любое целое}$$

$$\text{Ответ: } 8\sqrt{7} + 6\pi; \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k - \text{целое.}$$



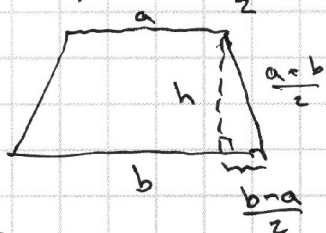
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у этой правильной усечённой пирамиды ^{N2} основание - правильный n -угольник со стороной b , меньшее основание - правильный n -угольник со стороной a . ~~Вывести~~

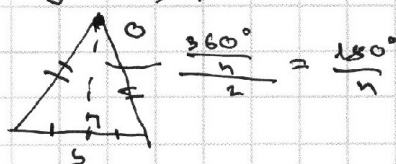
Если спроецировано центр шара Ω на боковую грань, мы получим точку, равноудалённую от рёбер этой грани на ней самой, т.е. центр шара равноудалён от всех рёбер усечённой пирамиды ($\Rightarrow$ все углы равны). Т.е. и сама боковая грань - ρ -треугольник (усечённая прав. пирамида), но ~~са~~ ρ -треугольник центра Ω - центр вписанной окружности боковой грани $\Rightarrow$ высота боковой грани - описанный ρ -треугольник $\Rightarrow$ ~~вывести~~ сумма боковых сторон $a+b \Rightarrow$ высота из них равна $\frac{a+b}{2}$



$$\Rightarrow \text{по теореме Пифагора } h = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{ab}{2} - \left(-\frac{ab}{2}\right)} = \sqrt{ab}$$

Проведём грань, соединяющую центры оснований нашей усечённой пирамиды. ~~Вывести~~ Центр сферы, вписанной в усечённую правильную пирамиду, лежит на этой грани и делит отрезок её, заключённый между основаниями, ^{равной} ~~равной~~ ^{частям} (лежит на всех биссектрисах $\angle$ между основаниями и боковыми сторонами). Центр вписанной сферы - это центр шара ω . Эта грань проведём через центр ω ^{находящегося} основания и перпендикулярна им ~~биссектрисе~~.

Заметим, что расстояние от центра правильного n -угольника до его стороны (сторона длины s) вычислится по формуле $\frac{s}{2} \cdot \cot\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$, т.е. каждая сторона круга рад ^{угол} $\frac{360^\circ}{n}$





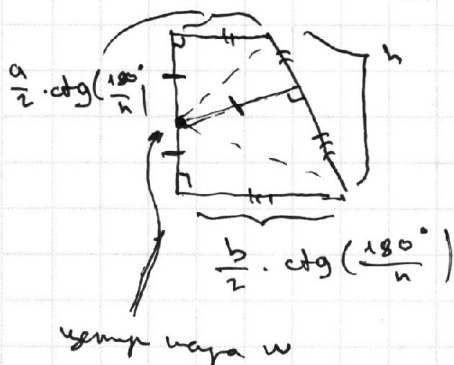
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (отголосок)

Рассуждаем следующим образом:



Отрезки, отнесенные к радиусу равно
радиусу круга w

$$h = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) + \frac{b}{2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

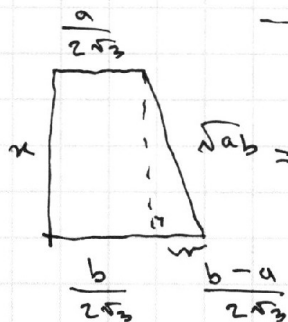
$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}, \text{ так как } a \neq b$$

тогда радиус круга w > радиусу круга w
(если a = b, основания равны и это не упр.)
выражения

$$\Rightarrow \operatorname{ctg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < 1$$

$$n \geq 3 \text{ и при } n \geq 4 \quad 0 < \frac{180^\circ}{n} \leq 45^\circ \Rightarrow \operatorname{ctg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \geq 1$$

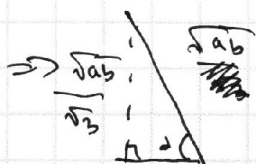
$$\Rightarrow n = 3 \Rightarrow \operatorname{ctg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \operatorname{ctg}(60^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2\sqrt{3}}$$

так как $\Rightarrow$ по теореме Пифагора

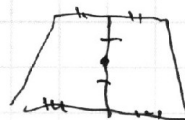
$$h = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}}$$

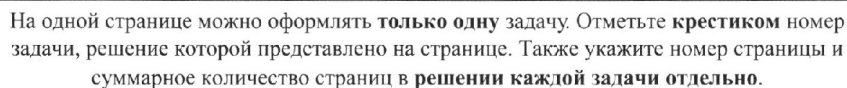


$$\angle = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Очевидно, что искомого круга для n=3
существует (центр O - пересечение сер. пер-
к "серединам высотам" оснований трапеции, перпен-
дикулярно, соединяя центры оснований)

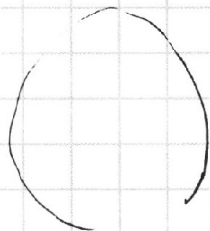
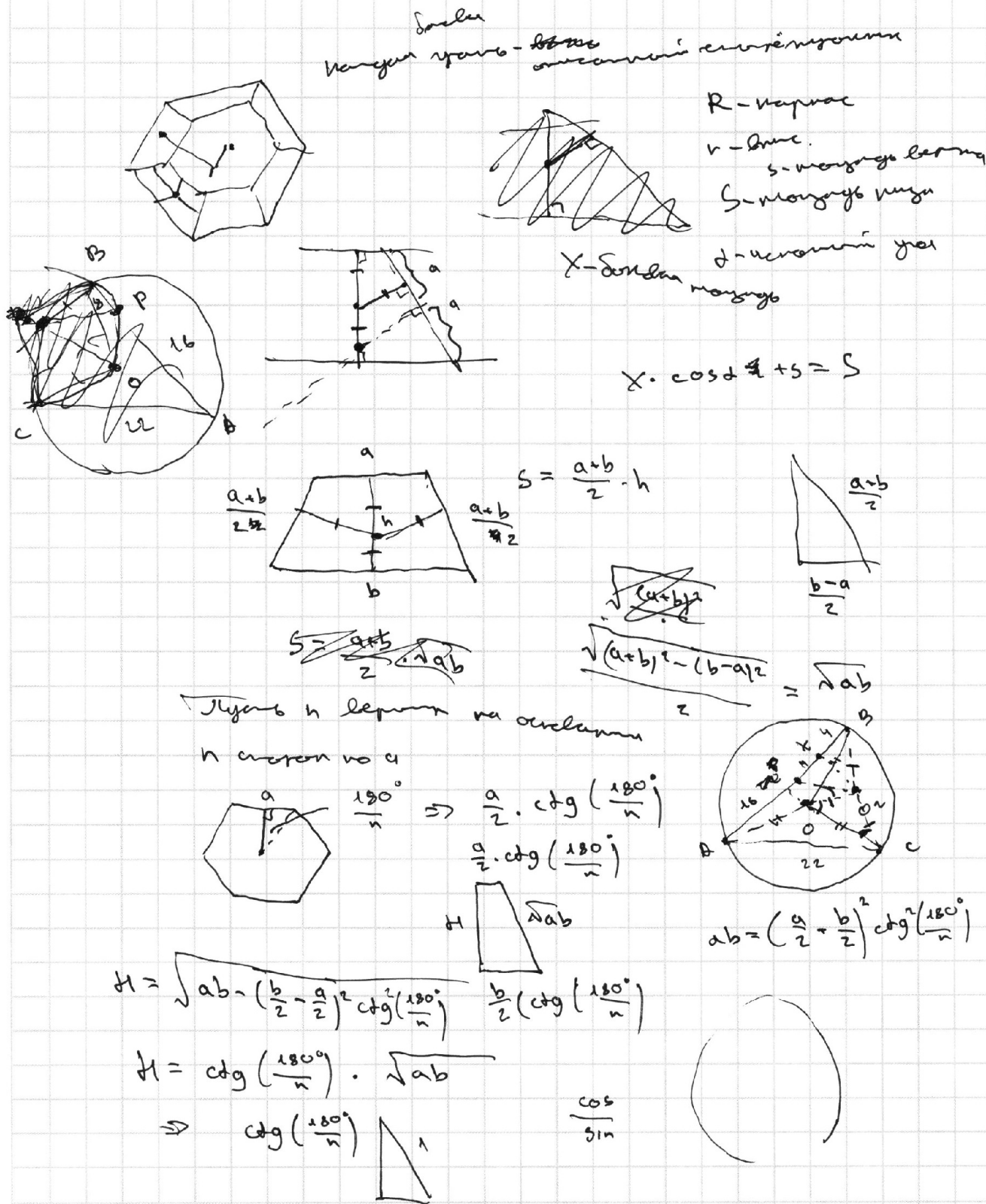
$$\text{Ответ: } \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$





1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

