МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$

   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

Число A представимо в виде $x \cdot 1111$, где x – цифра, из которой сделано число A

$\Rightarrow A = x \cdot \underbrace{11 \cdot 101}_{\text{простые числа}}$

$\Rightarrow A \cdot B \cdot C \vdots 101 \Rightarrow A \cdot B \cdot C \vdots 101^2$, т.к. ABC – квадрат и 101 – простое

C по условию двузначное $\Rightarrow < 100$, x – цифра $\Rightarrow < 100$

$\Rightarrow$ если $ABC \vdots 101^2$, то $B \vdots 101$, т.к. 101 – простое

B – трёхзначное и $B = k \cdot 101$ для какого-то нат. k

$\Rightarrow B = \overline{k0k}$, хотя бы одна из цифр B по условию 7

$\Rightarrow k = 7 \Rightarrow B = 707 = 7 \cdot 101$

$ABC \vdots 11$, т.к. $A \vdots 11 \Rightarrow ABC \vdots 11^2$, т.к. ABC – квадрат и 11 – простое

x – цифра $\Rightarrow < 10 \Rightarrow A \not\vdots\, 11^2$; $B = 707 \not\vdots\, 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow C \vdots 11 \Rightarrow C = q \cdot 11$ для какого-то нат. q, причём C – двузначное $\Rightarrow C = \overline{qq} \Rightarrow$ т.к. хотя бы 1 цифра $= 1$, $C = 11 = 1 \cdot 11$

$\Rightarrow A = x \cdot 11 \cdot 101$, $B = 7 \cdot 101$, $C = 11$

$\Rightarrow ABC = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7x$; ABC – квадрат и $x > 0$, < 10

$\Rightarrow x = 7 \Rightarrow A = 7 \cdot 11 \cdot 101 = 7777$, $B = 7 \cdot 101 = 707$, $C = 11$. Тогда $ABC = (7 \cdot 11 \cdot 101)^2$

Ответ: $(7777; 707; 11)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\cancel{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{xy}=\frac{1}{(x-4)}+\frac{1}{(y+4)}+\frac{3}{(x-4)(y+4)} \quad \Big| \cdot xy(x-4)(y+4)}$$

$$\cancel{y(x-4)(y+4)+x(x-4)(y+4)+3(x-4)(y+4)=xy(y+4)+xy(x-4)+3xy}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{xy}=\frac{1}{(x-4)}+\frac{1}{(y+4)}+\frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y}{xy}+\frac{3}{xy}=\frac{x+y}{(x-4)(y+4)}+\frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy}=\frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$\Rightarrow x+y=-3$ или $xy=(x-4)(y+4)$ $\quad (x, y, x-4, y+4 \neq 0)$

$x+y=-3$ или $xy=xy+4x-4y-16$

$\Rightarrow x+y=-3$ или $x-y=4$ $\quad (x, y, x-4, y+4 \neq 0)$

По условию $x, y>0 \Rightarrow x+y>0$ (а также $x, y, y+4>0$)

$\Rightarrow x-y=4$ $\quad (x, y>0,\ x-4\neq 0)$

$x^3-y^3-12xy=(x-y)(x^2+xy+y^2)-12xy=$

$=4x^2+4xy+4y^2-12xy=4(x^2-2xy+y^2)=$

$=4(x-y)^2=64$ (подставили $x-y=4$)

64 достигается, например, при $y=1$, $x=5$ $\left(K=\frac{9}{5}\right)$

Ответ: 64

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$

$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \sin \pi x \cdot \sin \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$

$\cos(2\pi y) = \cos(\pi x - \pi y)$

$\Rightarrow 2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi k_1$

или $\qquad k_1, k_2$ – целые

$2\pi y = -\pi x + \pi y + 2\pi k_2$

$\Rightarrow \quad 3y = x + 2k_1$ или $y = -x + 2k_2 \quad k_1, k_2$ – целые

$y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}k_1$

$\Rightarrow$ все пары вида $\left(x; \frac{x}{3} + \frac{2}{3}k_1\right)$ и $(x; -x + 2k_2)$,

где k_1 и k_2 – любые целые числа

а) Ответ: $\left(x; \frac{x}{3} + \frac{2}{3}k_1\right)$, $(x; -x + 2k_2)$ (k_1, k_2 – целые)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 4

Пусть одиннадцатиклассников всего n, билетов в конце месяца выделено k.

Всего вариантов распределить 4 билета C_n^4, k билетов – C_n^k. Теперь посчитаем, сколько вариантов распределить билеты так, что и Вася, и Петя попадают на концерт. Можно просто распределить оставшиеся $4-2=2$ и $k-2$ билетов соответственно между оставшимися одиннадцатиклассниками $\Rightarrow$ искомых вариантов C_{n-2}^2 и C_{n-2}^{k-2} соответственно. Все случаи равновероятны $\Rightarrow$ изначальная вероятность Васе и Пете одновременно попасть на концерт $\dfrac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$, конечная $\dfrac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$.

Обозначим их за p и q соответственно.

$$p = \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2!}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}} = \frac{4!}{2!}\cdot\frac{1}{(n-1)n} = 4\cdot 3\cdot\frac{1}{(n-1)n}$$

$$q = \frac{\frac{(n-2)!}{(k-2)!\cdot\cancel{(n-k)!}}}{\frac{n!}{k!\cdot\cancel{(n-k)!}}} = \frac{k!}{(k-2)!}\cdot\frac{1}{(n-1)n} = k\cdot(k-1)\cdot\frac{1}{(n-1)n}$$

$$((n-2)-(k-2)=(n-k))$$

По условию $q = 11p \Rightarrow \dfrac{q}{p} = 11$

$$\Rightarrow \frac{k(k-1)}{12} = 11 \Rightarrow k^2 - k = 132 \Rightarrow (k-12)(k+11) = 0$$

$k>0 \Rightarrow k = 12$, то есть было выделено 12 билетов

Ответ: 12 билетов

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

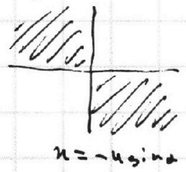
СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

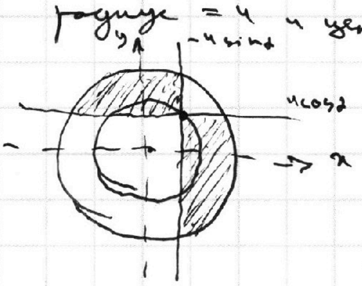
№6

$x^2+y^2 \le 36$ ограничивает круг радиусом 6 с центром в $(0;0)$

$(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0$ делит плоскость на 4 части прямыми $x=-4\sin\alpha$, $y=4\cos\alpha$ и берутся левая верхняя и правая нижняя части, включая прямые ($x=-4\sin\alpha$ или $y=4\cos\alpha$; или $x<-4\sin\alpha$, $y>4\cos\alpha$; или $x>-4\sin\alpha$, $y<4\cos\alpha$)



Точка пересечения прямых — $(-4\sin\alpha; 4\cos\alpha)$ всегда лежит на окружности $x^2+y^2=16$, т.к. $(-4\sin\alpha)^2+(4\cos\alpha)^2 = 16(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=16$. Эта окружность имеет радиус $=4$ и центр в $(0;0)$. (точка пересечения прямых всегда лежит внутри круга $x^2+y^2\le 36$)



Тогда искомый периметр состоит из 2 дуг окружности $x^2+y^2=36$ и двух соответствующих хорд этой же окружности. Прямые $x=-4\sin\alpha$ и $y=4\cos\alpha$ всегда перпендикулярны, а значит угловая величина искомых дуг всегда $\frac{\pi}{2}$, то есть сумма их длин всегда равна полупериметру окружности $x^2+y^2=36$, то есть равна $\frac{2\pi\cdot 6}{2}=6\pi$. $\Rightarrow$ нужно максимизировать сумму длин хорд. По теореме Пифагора* эти длины выражаются как $2\cdot\underbrace{\sqrt{36-16\cos^2\alpha}}_{a}$ и $2\cdot\underbrace{\sqrt{36-16\sin^2\alpha}}_{b}$. Заметим, что $a^2+b^2 =$

$= 72-16(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=72-16=56=const$; $a,b\ge 0 \Rightarrow$

максимальная сумма достигается при равенстве a и b

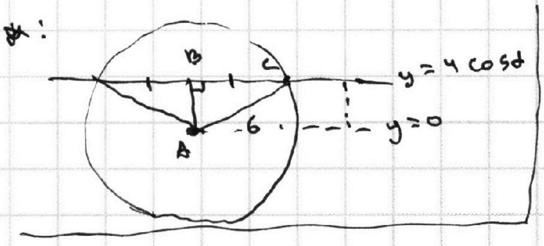
(Нер-во между средним арифметическим и средним квадратическим: $a^2+b^2=\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2$; $2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge a+b$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

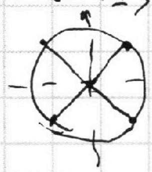


N6 (продолжение)

Мы помним, что если обозначить длины хорд за $2a$ и $2b$, то a^2+b^2 фиксировано $\Rightarrow$ т.к. $a, b \geq 0$, $a+b$ max ~~...~~ достигается при $a=b$. Если $a=b$, $\sqrt{36-16\cos^2\alpha}=\sqrt{36-16\sin^2\alpha}$

$\Rightarrow 16\cos^2\alpha = 16\sin^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha=\sin^2\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\sin\alpha$



$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}$, где k – любое целое число

$\Rightarrow a=b=\sqrt{36-\frac{16}{2}}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

$\Rightarrow$ Сумма длин хорд max $= 2(2\sqrt{7})+2(2\sqrt{7})=8\sqrt{7}$

$\Rightarrow$ $M_{max} = 8\sqrt{7}+6\pi$ и достигается при всех $\alpha = \frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}$, где k ~~...~~ – любое целое

Ответ: $8\sqrt{7}+6\pi$; $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, k – целое.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

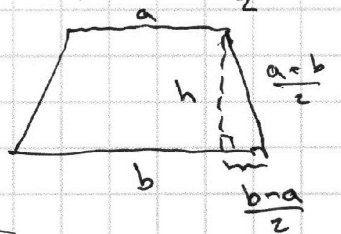
СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 7

Пусть у этой правильной усечённой пирамиды большее основание — правильный n-угольник со стороной b, меньшее — правильный n-угольник со стороной a. ~~[illegible]~~

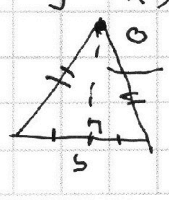
Если спроецировать центр шара Ω на боковую грань, мы получим точку, равноудалённую от рёбер этой грани на ней самой, т.к. центр шара равноудалён от всех рёбер усечённой пирамиды (⇒ проекции равны). Т.к. каждая боковая грань — р/б трапеция (усечённая прав. пирамида), то ~~[illegible]~~ проекция центра Ω — центр вписанной окружности боковой грани ⇒ каждая боковая грань — описанная р/б трапеция ⇒ ~~[illegible]~~ сумма боковых сторон a+b ⇒ каждая из них равна $\frac{a+b}{2}$



⇒ по теореме Пифагора $h=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{ab}{2}-\left(-\frac{ab}{2}\right)}=\sqrt{ab}$

Проведём прямую, соединяющую центры оснований нашей усечённой пирамиды. ~~[illegible]~~. Центр сферы, вписанной в усечённую правильную пирамиду, лежит на этой прямой и делит отрезок её, заключённый между основаниями, пополам (лежит на всех биссекторах равных углов между основанием и боковыми гранями). Центр вписанной сферы — это центр шара ω. Эта прямая проходит через центр каждого основания и перпендикулярна им обоим.

Заметим, что расстояние от центра правильного n-угольника до его стороны (сторона длины s) вычисляется по формуле $\frac{s}{2}\cdot ctg\left(\frac{180°}{n}\right)$, т.к. каждая сторона видна под углом $\frac{360°}{n}$



$\frac{\frac{360°}{n}}{2}=\frac{180°}{n}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

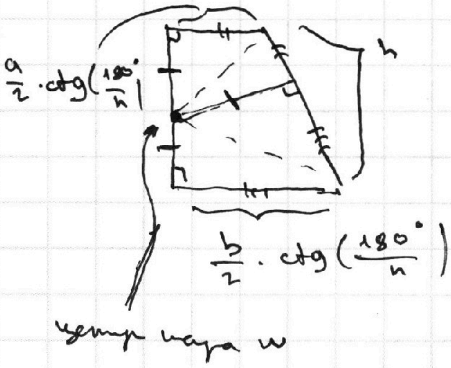
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№7 (продолжение)

Возникает следующая картина:



Отрезки, отмеченные 1 чертой равны радиусу шара ω

Заметим, что тогда $h = \frac{a}{2}\cdot ctg(\frac{180°}{n}) + \frac{b}{2}\cdot ctg(\frac{180°}{n})$.

$\Rightarrow \sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}\cdot ctg(\frac{180°}{n})$

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$, ~~[illegible]~~

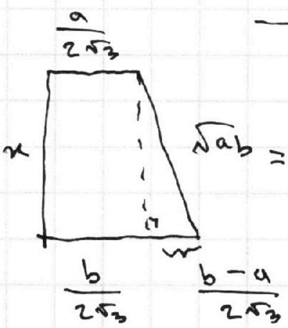
поскольку нер-во о средних и $a \neq b$

(если $a = b$, основания равны и это не усеч. пирамида)

$\Rightarrow ctg(\frac{180°}{n}) < 1$

$n \geq 3$ и при $n \geq 4$ $0 < \frac{180°}{n} \leq 45° \Rightarrow ctg(\frac{180°}{n}) \geq 1$

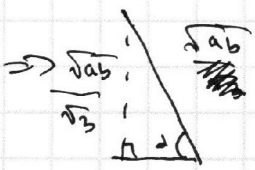
$\Rightarrow \underline{n = 3} \Rightarrow ctg(\frac{180°}{n}) = ctg(60°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$



~~[illegible]~~ $\Rightarrow$ по теореме Пифагора

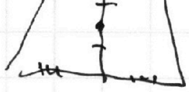
$x = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

~~Ответ:~~ Очевидно, что искомая пирамида для $n = 3$ существует (центр Ω - пересечение сер. пер. к "~~[illegible]~~ "серединным высотам" боковых граней, лежит на прямой, соед. центры оснований)



Ответ: $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

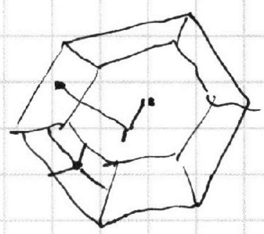
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

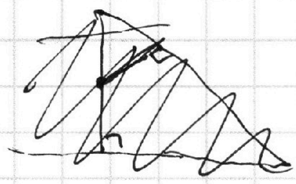
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

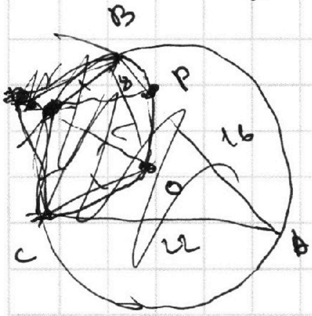
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

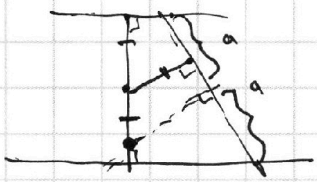
боковая
Каждая грань - ~~впис~~ описанный четырёхугольник





R - радиус
r - вписанный.
s - площадь верхн
S - площадь нижн

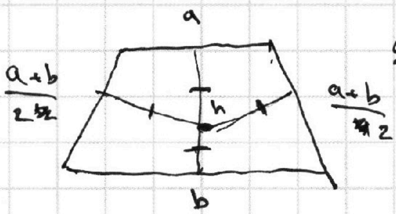




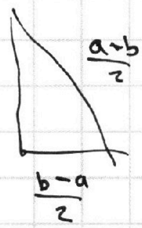
α - искомый угол

X - боковая площадь

$X \cdot \cos\alpha + s = S$



$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$



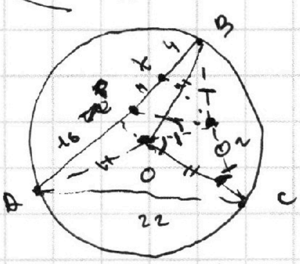
$\sqrt{\frac{(a+b)^2}{\ }}$

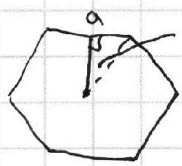
$\frac{\sqrt{(a+b)^2-(b-a)^2}}{2} = \sqrt{ab}$

$S = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$

Пусть n вершин на основании

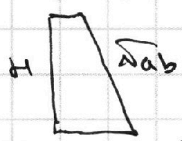
n сторон по a





$\frac{180°}{n} \Rightarrow \frac{a}{2}\cdot ctg\left(\frac{180°}{n}\right)$

$\frac{a}{2}\cdot ctg\left(\frac{180°}{n}\right)$

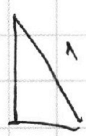


$ab = \left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)^2 ctg^2\left(\frac{180°}{n}\right)$

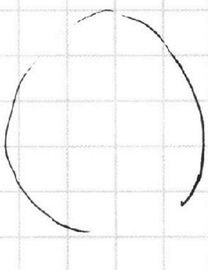
$H = \sqrt{ab - \left(\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\right)^2 ctg^2\left(\frac{180°}{n}\right)}$ $\frac{b}{2}\left(ctg\left(\frac{180°}{n}\right)\right)$

$H = ctg\left(\frac{180°}{n}\right)\cdot\sqrt{ab}$

$\Rightarrow ctg\left(\frac{180°}{n}\right)$



$\frac{\cos}{\sin}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!