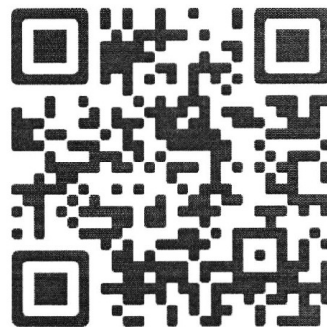




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111, \text{ где } a - \text{цифра т.е. } 1 \leq a \leq 9$$

~~В~~ $B = \overline{bcbcb}$

c - цифра

$$\text{Тогда } ABC = a \cdot 1111 \cdot B \cdot c = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot c.$$

$$a \leq 9, \text{ а } 101 - \text{ простое} \Rightarrow \text{т.к. } c \leq 9 \Rightarrow c \text{ не дел на } 101 \Rightarrow B : 101 \Rightarrow$$

$$\text{значит т.к. } ABC - \text{квадрат} \Rightarrow Bc : 101 \text{ т.к. } 101$$

имеет степень вхождения ≥ 2 .

$$\text{Тогда } B = 101 \cdot b, \text{ где } b \leq 9 \text{ т.к. если } b \geq 10 \Rightarrow B \geq 10 \cdot 101 > 10000 - \text{не}$$

$$\Rightarrow a \cdot 11 \cdot 101 \cdot b \cdot 101 \cdot c = k^2 \Rightarrow ab \cdot 11 \cdot c - \text{квадрат, но } 11 - \text{простое}$$

$$\text{а } a, b \leq 9 \Rightarrow c : 11 \Rightarrow c = 11 \cdot c', \text{ где } 1 \leq c' \leq 9, \text{ т.к. } \prod_{11} (ab \cdot 11 \cdot c)$$

$$\text{если } c' \geq 10 \Rightarrow c \geq 11 \cdot c' \geq 110 - \text{не} \Rightarrow \text{имею}$$

$$ab \cdot c \cdot 11 = ab \cdot c' \cdot 11^2 -$$

$$\text{квадрат} \Rightarrow ab \cdot c' - \text{квадрат, но } b \text{ и } c \text{ содержат } b \text{ и } c \text{ по 3 раза}$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } B \text{ имеет вид } b0b \text{ и } c \text{ имеет вид } c'c' \Rightarrow b = 6, \text{ а}$$

$$c' = 3 \Rightarrow a \cdot 3 \cdot 6 - \text{квадрат} \Rightarrow 9 \cdot a \cdot 2 - \text{кв} \Rightarrow 2a - \text{квадрат} \Rightarrow$$

$$a : 2 \text{ т.к. } \prod_2 (2a) \geq 1 \Rightarrow \text{тогда что тогда кв } \prod_2 (2a) \geq 2$$

$$\Rightarrow \prod_2 (a) \geq 1 \Rightarrow a = 2, 4, 6, 8 : a = 2 - \text{гда получается 4-кв.}$$

$$a = 4 - \text{нет } 2 \cdot 4 = 8 - \text{не кв}$$

$$a = 6 - \text{нет } 2 \cdot 6 = 12 - \text{не кв}$$

$$a = 8 - \text{гда получается } a \cdot 2 = 8 \cdot 2$$

$$16$$

$\Rightarrow$ $\forall$ тройки abc

$$\text{Ответ: } (2222, 606, 33) \quad (8888, 606, 33)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{matrix} x \rightarrow x-2 \\ y \rightarrow y+2 \end{matrix} \Rightarrow \text{величина } K \text{ сохраняется, а значит}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} + \frac{5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy} = K = \frac{(x-2) + (y+2) + 5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

обз: $x \neq 0$ $y \neq 0$

считая что в знаменателе не 0, веро тогда в правую часть графа была бы неопределено $\Rightarrow$

так же $x+y+5 \geq 5 > 0$ $\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-2)(y+2)}$

$\Rightarrow$ можно сократить

$\Rightarrow$ тогда $\xrightarrow{\text{т.к. можили не 0.}}$ $xy = (x-2)(y+2) \Leftrightarrow xy = xy - 2y + 2x - 4 \Leftrightarrow 2(x-y) = 4$

$\Leftrightarrow x-y=2$. тогда $x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy = 2(x^2 + xy + y^2) - 6xy$

$= 2(x^2 + xy + y^2 - 3xy) = 2(x^2 - 2xy + y^2) = 2(x-y)^2 = 8 \Rightarrow$ ~~выраж~~ ^{всегда}

выражение $K=8$ или веро уса задачи.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{a) } (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow \sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \\ &= \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x \Leftrightarrow \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \sin \pi y \sin \pi x + \cos \pi y \cos \pi x \\ &\Leftrightarrow \cos 2\pi x = \cos(\pi y - \pi x) \end{aligned}$$

но $\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \cos 2\pi x$ и $\sin \pi y \sin \pi x + \cos \pi y \cos \pi x = \cos(\pi y - \pi x)$

$(\cos^2 t = \cos^2 t - \sin^2 t)$

из этих условий

Тогда $\cos 2\pi x = \cos(\pi y - \pi x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi x + 2\pi k = \pi y - \pi x + 2\pi l; \quad l, k \in \mathbb{Z} \\ -2\pi x + 2\pi k = \pi y - \pi x + 2\pi l; \quad l, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi x - \pi y + \pi x = 2\pi(l - k); \quad l, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z \in \mathbb{Z} \\ \pi y - \pi x + 2\pi x = 2\pi(k - l); \quad l, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi(3x - y) = 2\pi z \\ \pi(y + x) = 2\pi z \end{cases}$$

$z \in \mathbb{Z}, \pi \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 2z \\ y + x = 2z \end{cases} \quad z \in \mathbb{Z}$

Тогда найдем y 2 уравнения

пар $z \in \mathbb{Z} : (x, 3x - 2z) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ где фиксируем z , а x пробегает $\mathbb{R}$

$z \in \mathbb{Z} : (x, 2z - x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\begin{cases} (x, 2z - x) \\ (x, 3x - 2z) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{Z} \text{ любое целое.}$

б) Заменяю $\arcsin(\dots)$ от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow$ если достигается равенство

то только тогда когда $\arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2}$ и $\arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\frac{x}{6} = 1 \Leftrightarrow x = 6$ и $\frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow y = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Так же если x и y удовлетворяют неравенству $\Rightarrow$ оба сириса

присуща определены $\Rightarrow$
$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2. \end{cases}$$
 и при

этой точка $(x, y) = (6, 2)$ не достигается ^{только тогда} ~~тогда~~ ^{строгий} ~~строгий~~ ^{знак}.

разберу 2 множества решений и посмотрю когда они совпа-

дают: ① когда совпадают: $(x, 2z-x) = (x, 3x-2z)$

тогда $2z-x = 3x-2z \Leftrightarrow 4z = 4x \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow y = x$ т.е.

② тогда разберём 1ое множество решений вида $(x, 2z-x)$:

тогда x и y одной чётности (и $x \sum$ чётна) $\Rightarrow$ для чёт x

подходят только чёт y от -2 до 2 , а для нечёт x - нечёт

$y \Rightarrow$ решений вида $x \neq y = 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 12 + 21 = 33$

$\uparrow$ $\#$ нечёт x $\uparrow$ $\#$ нечёт y от -2 до 2 $\leftarrow$ $\#$ чёт x от -6 до 6

тогда $\#$ пар $(x, y) = 33 - 1 = 32$ ^(-1, 1) ^{не считается}

③ тогда разберём 2ое множество решений тогда $x \equiv 3x \equiv 3x-2z = y$

$\Rightarrow x$ и y такая же чётность как и y и x . тогда для каждого x

тогда ~~аналогично~~ $\#$ пар: $21 + 12 = 33$ если

① x - нечёт

можно подобрать 2 значения z так

чтобы y - нечёт

и $\in [-2; 2]$ ^{тогда} ^{можно} ^{сам}

② x - чёт ^{можно} ^{подобрать} ^{2 так}

чтобы y - чёт

и $\in [-2; 2]$ ^{тогда} ^{можно} ^{сам}

$\Rightarrow$ всего мы посчитали $\#$ пар x и y одной чётности

и y $\Rightarrow$ $33 + 33 - 5 - 1$ ^{нужно} ^с ^{вычитаем} ⁼ ² ^{все} ^{ли} ^{решения} ^{не} ^{интересны}.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
5 ИЗ 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Будем считать что n билетов одинаковы. Тогда в первом случае их равно 4 $\Rightarrow$ общее число исходов C_n^4 . Число исходов где Петя и Вася с билетами C_{n-2}^2 , т.к. Петя Вася и еще 2 $\Rightarrow$ есть 2 еще каких-то одинаковых билета

Петя и Вася которые вытратили и число версий их вытраты $C_{n-2}^2 \Rightarrow$ вероятность до: $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$

Пусть билетов стало $x \Rightarrow$ общее # исходов $= C_n^x$.

Число исходов где Петя и Вася с билетами $\Rightarrow C_{n-2}^{x-2}$ т.к.

в этих исходах среди $n-2$ человек нужно как-то распределить $x-2$ билета $\Rightarrow$ и есть нужное # исходов

$\Rightarrow$ вероятность $\frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$. По условию: $\frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^4} \cdot 6 = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-2)!}{(2!) \cdot (n-4)!} \cdot 6 = \frac{(n-2)!}{(x-2)! \cdot (n-x)!} \Leftrightarrow \frac{(4!) \cdot (n-4)!}{x! \cdot (n-x)!}$$

$$\frac{(n-2)!}{2!} \cdot \frac{4!}{(n-4)!} \cdot 6 = \frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{x!}{(x-2)!}$$

$$n! = (n-1) \cdot n \cdot (n-2)!$$

$$x! = (x-1) \cdot x \cdot (x-2)!$$

$$\Leftrightarrow \frac{4!}{2 \cdot n \cdot (n-1)} \cdot 6 = \frac{x \cdot (x-1)}{n \cdot (n-1)} \Leftrightarrow \frac{24}{2} \cdot 6 = x \cdot (x-1) \Leftrightarrow 72 = x \cdot (x-1)$$

$$\frac{24}{2} \cdot 6 = x \cdot (x-1) \Leftrightarrow 72 = x \cdot (x-1)$$

$$\Rightarrow x=9 \rightarrow 9 \cdot (9-1) = 72 \rightarrow \text{га}. \text{ причем } x(x-1) > (x-2)(x-1)$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{N} > 1$ $x(x-1)$ ^{монотонно} возрастает $\Rightarrow$ у $x(x-1) = 72$ только одно решение (или можно указать что $x(x-1)$ - пер. возрастающая

функция с нулями 0 и 1 при $x \geq 1$ - возрастает $\Rightarrow x=9$ одно решение $\Rightarrow$ Ответ: 9.

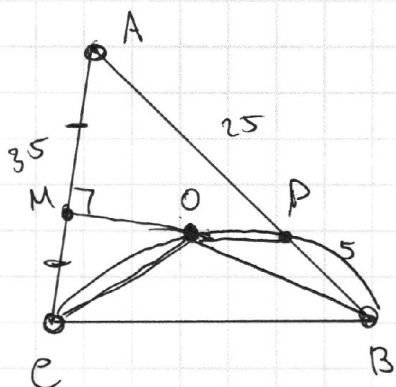


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
6 ИЗ 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. O - центр описанной окружности $\Rightarrow$

$\angle COB = 2\angle A \Rightarrow$ т.к. $\triangle COB$ - равн. ($OC = OB$) $\Rightarrow$

$\angle OCB = \frac{180^\circ - \angle COB}{2} = 90^\circ - \angle A$ тогда

т.к. P $\in$ стороне AB $\Rightarrow \angle OPA = \angle OCB$ - уг.

вписанности $\angle OPB \Rightarrow$ Пусть $OP \cap AC = M$
(OP и AC пересекаются)

тогда $\angle PMC = 180^\circ - \angle MPA - \angle MAP = 180^\circ - \angle A - (90^\circ - \angle A) = 90^\circ \Rightarrow OM \perp$

AC $\Rightarrow$ т.к. перпенд. к AC проходит через центр $\Rightarrow M$ - перпендикуляр

из O к AC попадает на середину AC $\Rightarrow M$ - сер. AC.

Тогда $AP \cdot \cos \angle A = AM = \frac{AC}{2} \Rightarrow 25 \cdot \cos \angle A = \frac{35}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \angle A = \frac{35}{50} = \frac{7}{10} \Rightarrow \sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \sqrt{\frac{51}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$

Тогда $S_{ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin \angle A}{2} = \frac{35 \cdot (25+5) \cdot \frac{\sqrt{51}}{10}}{2} =$

$= \frac{35 \cdot 3 \cdot \sqrt{51}}{2}$ кг.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА
1 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

рассмотрю множество точек по отдельности:

$x^2 + y^2 \leq 169$ — задает множество точек находящихся на расстоянии ≤ 13 от точки с координатами $(0,0)$

$(0,0)$

$$(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \rightarrow$$

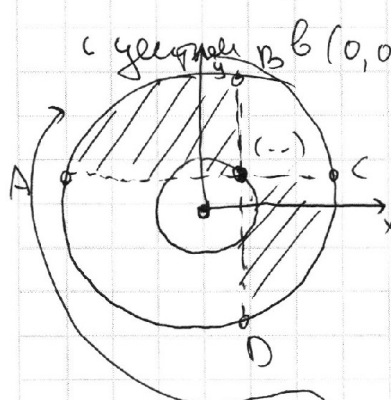
задает множество точек

либо левее и выше чем прямая

$x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$ и выше чем

$y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$ либо наоборот.

замечу что $(-5\sqrt{2} \cos \alpha)^2 + (-5\sqrt{2} \sin \alpha)^2 = 25 \cdot 2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 50 \Rightarrow$ точка $(-5\sqrt{2} \cos \alpha, -5\sqrt{2} \sin \alpha)$ находится на расстоянии от точки $(0,0)$ на $\sqrt{50} \forall \alpha \Rightarrow$ множество таких координат лежит на окружности



с центром в $(0,0)$ и радиусом $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

получается что фигура $\Phi(\alpha)$ как получается.

берётся точка $(-5\sqrt{2} \cos \alpha, -5\sqrt{2} \sin \alpha)$

через неё проводится 2 перпендикулярные

прямые и ординате $cos \alpha$ и пересекается

с окр $x^2 + y^2 = 169$ получается что $\Phi(\alpha)$ —

объединение двух кусков как на рисунке Φ заштриховано

Замечу что её периметр равен (если $A \in BC$ и $AC \parallel \Phi$)

окр с $BD \parallel Oy$ и пусть A



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
8 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит что получим четырёхугольник $ABED$ (вписан)
 $\hookrightarrow$ точка $(-5\sqrt{2}\cos\alpha, -5\sqrt{2}\sin\alpha) = X$. Тогда пусть $AC \parallel OX$
 $BD \parallel OY$ и A и B лежат с X и Y вписан $\Rightarrow$ искомым

периметр = $|AB| + BX + XD + DX + XC + AC + |CD|$. Значит
 что $\xrightarrow{\text{длины } g \text{ и } r}$

$$|AB| + |CD| = 13\pi \cdot k \quad \frac{AB + CD}{2} = \frac{AC + BD}{2} =$$

$= 90^\circ \Rightarrow |AB| + |CD| = 180^\circ \Rightarrow$ сумма этих g и r составляет $\frac{1}{2}$
 $\Rightarrow$ окружность $= \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 2\pi = 13\pi$ $\Rightarrow$ $|AB| + |CD| = 13\pi$ отсюда.

что так $BX + XD + DX + XC = BD + AC$. Значит

что $y = -5\sqrt{2}\sin\alpha$ пересечение с $x^2 + y^2 = 169 \Rightarrow 2$ точки

мысли $x^2 + (-5\sqrt{2}\sin\alpha)^2 = 169 \Leftrightarrow x^2 = 169 - 50\sin^2\alpha$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{169 - 50\sin^2\alpha} \quad (169 - 50\sin^2\alpha \geq 169 - 50 > 0)$$

$$\Rightarrow AC = \text{расстояние между } A \text{ и } C = 2\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha} = l_1$$

аналогично $BD = \text{расстояние между } B \text{ и } D = 2\sqrt{169 - 50\cos^2\alpha} = l_2$

т.к. $x = -5\sqrt{2}\cos\alpha$ и $x^2 + y^2 = 169$ в 2 х точках.

$$x^2 + y^2 = 169 - x^2 = 169 - 50\cos^2\alpha \Rightarrow y = \pm \sqrt{169 - 50\cos^2\alpha} = l_2$$

Тогда $AC + BD = l_1 + l_2 \leq 2\sqrt{\frac{l_1^2 + l_2^2}{2}} = \sqrt{4(169 - 50\cos^2\alpha + 169 - 50\sin^2\alpha)}$

$$= \sqrt{4(2 \cdot 169 - 50(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha))} = 2\sqrt{2(338 - 50)} = 2\sqrt{2 \cdot 288}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
9 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 144} = 2 \cdot 2 \sqrt{144} = 2 \cdot 2 \cdot 12. \text{ Тогда } l_1, l_2 \geq 0$$

$$\text{Периметр } P(\Delta) \leq 2 \cdot 2 \cdot 12 + |AB| + |CD| = 48 + 1311$$

$$\text{Достигается равенство когда } p.\text{-во } l_1 + l_2 = 2 \sqrt{\frac{l_1^2 + l_2^2}{2}}$$

$$\Leftrightarrow (l_1 + l_2)^2 = 4 \left(\frac{l_1^2 + l_2^2}{2} \right) \Leftrightarrow l_1^2 + 2l_1l_2 + l_2^2 + 2l_1^2 + 2l_2^2$$

$$\Leftrightarrow l_1^2 + l_2^2 = 2l_1l_2 \Leftrightarrow l_1^2 - 2l_1l_2 + l_2^2 = 0 \Leftrightarrow (l_1 - l_2)^2 = 0$$

$$\text{т.е. только тогда когда } l_1 = l_2 \Rightarrow 2 \sqrt{169 - 50 \cos^2 \angle} =$$

$$= 2 \sqrt{169 - 50 \sin^2 \angle} \Leftrightarrow 169 - 50 \sin^2 \angle = 169 - 50 \cos^2 \angle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 50 \sin^2 \angle = 50 \cos^2 \angle \Leftrightarrow \cos^2 \angle = \sin^2 \angle \Leftrightarrow |\cos \angle| = |\sin \angle|$$

$$\text{что верно при } \angle = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \leftarrow \text{и есть}$$

и значения $\angle$ при котором достигается р-во.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

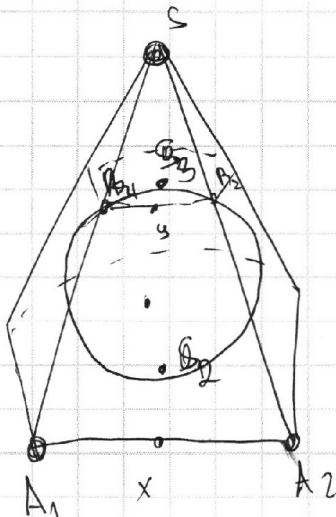
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
10 ИЗ 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

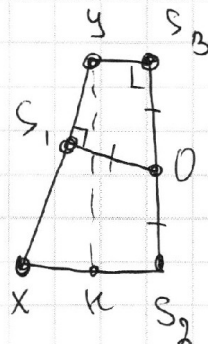
Рассмотрю усечённую пирамиду описанную в условии:
Пусть её вершина - точка S и основание
 $A_1 \dots A_n$, в торе основания $B_1 \dots B_n$
где B_i на $A_i \Rightarrow$ рассмотрим сферу



и. Она касается всех боковых граней

$B_1 \dots B_n$ и $A_1 \dots A_n \Rightarrow$ рассмотрим
её 1-касая S_1 м. SA_1A_2 и $A_1 \dots A_n$
и B_1, B_2 . через них проведем
касательную L , и $L \cap A_1A_2 = X$

Тогда в L :
есть трапеция XS_2S_1Y



10-центр сферы
(и)

Тогда
О - центр окруж
сферы/переход в

опр. кас YS_2 и $XS_1 \Rightarrow XO$ -бисс $\angle X$ и YO -бисс $\angle Y$

$$\Rightarrow \angle YXO + \angle XOY = \frac{1}{2} \angle YXS_2 + \frac{1}{2} \angle XYS_1 = \frac{1}{2} (\angle YXS_2 + \angle XYS_1) \\ = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ \Rightarrow \angle XOY = 90^\circ. \text{ Тогда } SO - \text{высота в}$$

прямоугольном $\Delta \Rightarrow$ известно что (х): $YS_2 = YS_1$

$$YS_1 \cdot S_1X = OS_1^2 = r^2, \text{ r-радиус сферы}$$

и $XS_2 \cdot YS_2 \rightarrow$ т.к XO и YO -бисс $\angle X$ и $\angle Y$ (и)

$$XS_2 \cdot YS_2 = OS_2^2 = r^2 \text{ как в } \Delta XOS_1 = \Delta YOS_2 \text{ как в } \Delta XOS_1 \text{ и } \Delta YOS_2 \\ \text{и } \angle XOS_1 = \angle YOS_2 \text{ и } OS_1 = OS_2 \Rightarrow S_1X = XS_2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

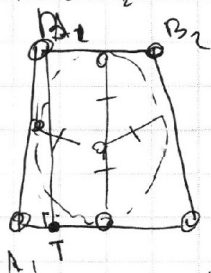
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА

11 ИЗ 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7-е Мы явно знаем задание $\angle S_2$ и r сфера
 ω . То что Ω касается $\forall$ ребер означает что мы
 рассмотрим плоскость $B_1A_1B_2A_2 \Rightarrow$ она содержит
 ω Ω окружность касающаяся четырехугольника $A_1B_1A_2B_2$.
 $\Rightarrow A_1A_2B_2B_1$ - описанный четырехугольник.



Тогда по д-ву (прямую) описанного

$$A_1A_2 + B_2B_1 = A_2B_2 + A_1B_1$$

$$2A_1B_2$$

$$\frac{1}{2} \angle B_1S_2B_2 = \frac{1}{2} \angle$$

Пусть теперь высота пирамиды на шари. основание h , проекция
 центра
 основания пирамиды на шари. Самая ребро - a , $b = 4S_2$

O_1 - центр шара, основание, O_2 - центр верхнего $\Rightarrow \angle O_1A_1$

$$\angle A_1X = \frac{1}{2} \angle \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow A_1A_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \angle \cdot a$$

$$4 \left(\frac{1}{2} \angle \cdot a + \frac{1}{2} \angle \cdot b \right)^2 \quad B_1B_2 = \frac{1}{2} \angle \cdot b \Rightarrow B_1B_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \angle \cdot b$$

$$\text{Тогда } \angle \text{ и проекция } A_1 \text{ на } A_1A_2 \Rightarrow 4A_1B_2^2 = 4(A_1T^2 + TB_2^2) =$$

$$= 4 \left(\frac{1}{2} \angle^2 + \left(\frac{A_1A_2 - B_1B_2}{2} \right)^2 \right) = 4(a+b)^2 + \left(\frac{1}{2} \angle \cdot a - \frac{1}{2} \angle \cdot b \right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \angle \cdot a \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \angle \cdot b \right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \angle \cdot b \cdot \frac{1}{2} \angle \cdot a = a^2 + 2ab + b^2 \neq \left(\frac{1}{2} \angle \cdot a \right)^2$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \angle \cdot b \right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \angle \cdot b \cdot \frac{1}{2} \angle \cdot a \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} \angle \cdot b \cdot \frac{1}{2} \angle \cdot a = (a+b)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \angle \right)^2 ab = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \angle = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
12 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть также $SX = t$ тогда $\frac{S_{\Delta}(S A_1, X_2)}{S_{\Delta}(S B_1, B_2)} = \frac{SX \cdot A_1 X / 2}{S_2 y \cdot B_1 B_2 / 2}$

т.е. можно выразить как-то SX :

$SX = \frac{yX}{a} \cdot \frac{A_1 A_2}{A_1 A_2 - B_1 B_2}$ из Тн. Паласа Пусть $B_1 B_2 = S_2 S_2 y$
т.е. $yX = yk^2 + kX^2$ по Тн. Паласа. А значит $yX = kX^2$

т.к. $yX^2 = (2r)^2 = 4ab$ и $kX^2 = (b-a)^2$ т.к. $kX = (b-a)$

$\Rightarrow yX^2 = yk^2 + kX^2 = 4ab + (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab + 4ab = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$
т.к. $X S_2 S_2 y$ т.е. $X S_2 S_2 y$

$\Rightarrow yX = a+b \Rightarrow SX = \frac{(a+b) \cdot a}{a-b}$

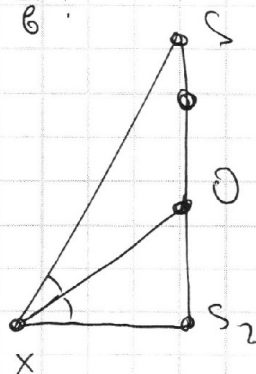
Тогда нужное отношение $= \frac{SX \cdot A_1 X}{S_2 y \cdot B_1 B_2} = \frac{\frac{(a+b)a}{a-b} \cdot 2 + g \frac{1}{2} a}{b \cdot 2 + g \frac{1}{2} b}$

$= \frac{(a+b)a^2}{(a-b)b^2}$ и т.д. $\frac{a}{b}$

т.е. $B \in S S_2 X$:
O - центр сферы
O - биссектрисы
т.е. $B \in S S_2 X$

$\angle(A_1 S A_2, A_1 A_2 \dots A_n)$

$r = S_2 O = S S_2 \cdot \frac{X S_2}{X S_2 + X S} = h \cdot \frac{b}{b + \frac{(a+b)a}{a-b}} = h \cdot \frac{b(a-b)}{ab - b^2 + ab + a^2}$
 $= h \cdot \frac{b(a-b)}{a^2 + 2ab - b^2} = h b / (a+b) = \sqrt{\left(\frac{(a+b)a^2}{(a-b)^2} - b^2\right)} \cdot \frac{b}{a+b}$



$h^2 = SX^2 - XS_2^2 = \left(\frac{(a+b)a}{a-b}\right)^2 - b^2 = \frac{(a^2 + 2ab + b^2)a^2 - b^4(a^2 + 2ab)}{(a-b)^2} = \frac{a^4 + 2a^3b - 2b^3a - b^4a^2}{(a-b)^2} = \frac{a^4 + 2a^3b - 2b^3a - b^4a^2}{(a-b)^2}$

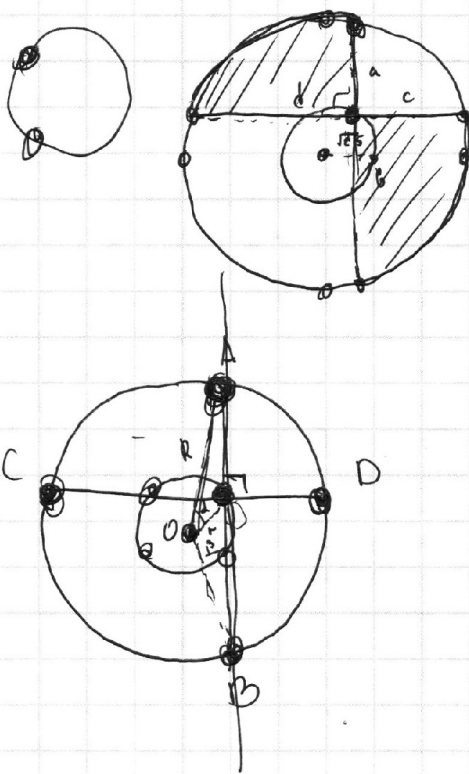


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

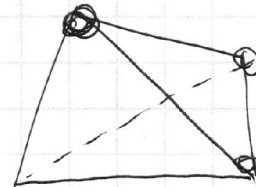
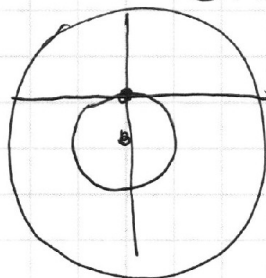
СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\pi}{2} - 5ix$$

$$a+b+c+d \leq 2 \text{ дано}$$



$$A + B +$$

$$(A+B)$$

$$x+y \rightarrow \max$$

$$||$$

$$\sin(A+B) \cdot 2AO \sin + 2AO \cdot \sin(A+B-180^\circ)$$

$$\sin(A) + \sin(A+2\varphi-180^\circ)$$

$$169 - 50 = 119$$

$$x = -5\sqrt{2} \cos \alpha \rightarrow y = \pm \sqrt{119} \sin \alpha$$

$$2$$

$$y = \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$|\cos \alpha| = |\sin \alpha|$$

$$2 \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{2}}$$

$$\geq 2 \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} + 2 \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$2\sqrt{A^2} + 2\sqrt{B^2}$$

$$2(A+B)$$

$$2(169 + 169 - 50)$$

$$\sqrt{\frac{4(2 \cdot 169 - 50)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 \cdot (338 - 50)}{2}} = \sqrt{2(288)}$$

$$A+B \leq 2 \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{2}} =$$

$$\begin{matrix} -5 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{matrix}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \left(z - \frac{x}{2} \right) < \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{4}{3} 6$$

$$\frac{x}{6} = 1 \quad z - \frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{z}{3} - \frac{x}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{z}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow z = 4$$

$$y = -10$$

$$y = 2$$

$$-3 \leq \frac{x}{6} \leq 1$$

$$-1 \leq z - \frac{x}{2} \leq 1$$

$$-6 \leq x \leq 6$$

$$-2 \leq z - x \leq 2$$

-113 бер

→ 3 бер

39 бер $x=6$
 $y=2$

(38)

$$(x, 3x-2z)$$

анализирую

$$(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0$$

$$(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0$$

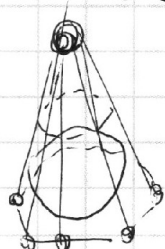
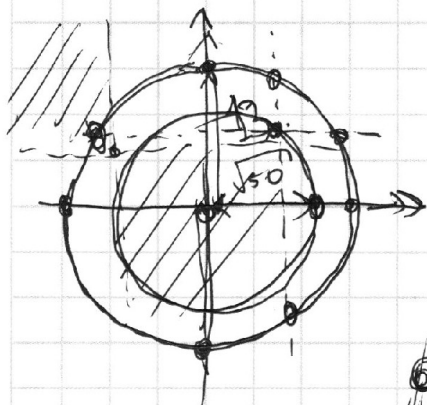
$$x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$5\sqrt{2}$$

$$(-5\sqrt{2} \cos \alpha, -5\sqrt{2} \sin \alpha)$$

$$25 \cdot 2 \cos^2 \alpha + 25 \cdot 2 \sin^2 \alpha = 100 \cdot 50$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

м! A - хорды.
 B - трезуб.
 C - глгх

$$A \cdot B \cdot C = k^2$$

$$2 \sqrt{(2r)^2 + (B-A)^2} =$$

a, b, c от 1 до 9.

$$a \cdot 11 \cdot 11$$

$$B: 101 \Rightarrow B = 808$$

$$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot b \cdot 101 \cdot c \cdot 11 = k^2 \Rightarrow abc = k^2$$

$$a=1 \rightarrow b=2, c=2, c=8$$

$$b=6 \\ c=3$$

$$a=2 \quad a=8$$

(w2)

$$K =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy-2y+2x-4}$$

$$\textcircled{1} \begin{aligned} (x-y)\pi + 2\pi k \\ 2x\pi + 2\pi l \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \begin{aligned} (x-y)\pi + 2\pi k \\ 2\pi l - 2\pi x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-y+2k \\ 2x+2l \end{aligned}$$

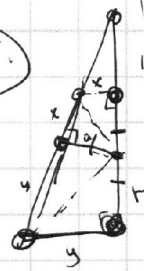
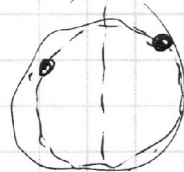
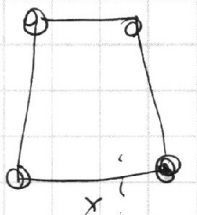
$$-y+2k = x+2l$$

$$\cos \pi x \quad x+y=2(k-l)$$

$$\sin \pi x + \cos \pi x \quad (x, 22-x)$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\cos((x-y)\pi) = \sin \pi y \sin \pi x + \cos \pi y \cos \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \cos 2\pi x$$



$\sqrt{xy}$

$$yx = k^2$$

$$x = \frac{r^2}{y}$$

$$2(x^2 + xy + y^2) - 6xy = 2(x-y)^2 = 8$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$2x\pi$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{9}{6} < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{22-x}{6} < \pi$$

4 да на прямой. концы.

4+x CB A

$$C_n^4$$

$$C_n^4$$

$$\frac{C_{n-2}^2 \cdot 6}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$$

$$\left(\frac{\cos \angle A = \frac{35}{25}}{\cos \angle B = \frac{25}{35}} \right) \Rightarrow \frac{35}{25} = \frac{25}{35}$$

$$25 \cdot \cos \angle A = \frac{35}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \angle A = \frac{35}{25 \cdot 2}$$

$$= \frac{7}{10}$$

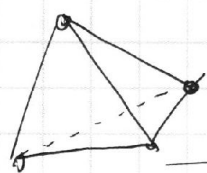
$$2\angle C = 180^\circ + \angle B$$

$$\sin \angle A = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$(\angle C = \angle A)$$

$$180^\circ - \angle C = (180^\circ - \angle B)$$

$$180^\circ - \angle C$$



$$\frac{\sin \angle B}{\sin(\angle C - \angle A)}$$

$$\frac{\sin \angle B}{\sin(\angle C - \angle A)} = \frac{25}{5}$$

$$AO$$

$$AO = \cos \angle A \cdot \frac{25}{\sin \angle B}$$

$$72 = 12 \cdot 6 = x(x-1)$$

$$8 \cdot 9 \Rightarrow \boxed{x=9}$$

$$\frac{(n-2)!}{x! (n-x)!} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$\frac{\sin \angle C}{\sin \angle B} = \frac{30}{35}$$

$$\sin \angle A \cos \angle B + \sin \angle B \cos \angle A = \frac{30}{35}$$

$$\cos \angle A + \cos \angle B \cdot \sin \angle A = \frac{30}{35}$$

$$\frac{\sin \angle B}{\sin \angle A}$$

$$AO = \frac{35}{2 \sin \angle B}$$

$$= AO = \frac{35}{2} \cdot \sin \angle B$$

