



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 1, а  $y$  — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 3xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе поехать на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{15}{2}$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 9$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

11) продолжение

Итак.  $B: 11$ . Тогда, в каком числе ит-мель 101?

$$\left. \begin{array}{l} a \leq 9 \\ a \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow a \neq 101 ; \quad \left. \begin{array}{l} c \in \mathbb{N} \\ c \leq 99 \\ \text{(однознач.)} \\ \text{(ит-мель)} \end{array} \right\} \Rightarrow c \neq 101 \Rightarrow B: 101.$$

След.,  $B: 1111$  - но  $B \leq 999$  - предпр. число  $\Rightarrow$  одна пара чисел

максимум цифр  
не больше 3х

Ответ: (6666; 202; 33)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1) Так.  $A$  - ступ. число, сост. из одинаковых цифр, то  $A$  можно представить в виде:  $A = \overline{aaaa}$ ,  $\begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ a \leq 9 \end{cases} \Rightarrow \underline{A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101}$

Тогда,  $A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = k^2, k \in \mathbb{N}$

След., так как 11 и 101 - простые числа, то чтобы получить квадрат некоторого натурального числа, необходимо иметь четное кол-во множителей 11 и 101 в этом произведении: хотя бы два.

• Посмотрим, в каком числе может содержаться мн-ть 11:

I сл.  $a : 11$ , но  $a \leq 9$  - противоречие. В а мн-ть 11 содержит, не может

II сл.  $C : 11$ : Так.  $C$  - двузн. и кратно 11, его можно представить как:  $C = \overline{cc}, \begin{cases} c \in \mathbb{N} \\ c \leq 9 \end{cases}$

Так. по условию хотя бы одна цифра  $C$  равна 3, то  $C = \underline{33}$ .

• В каком числе мн-ть 101?  $C = 33 \nmid 101, a \leq 9 \Rightarrow a \nmid 101$ , след.,  
 ~~$B : 101$~~  Так.  $B$  - трёхзначная, но  $B$  можно представить как:  $B = \overline{b0b}, \begin{cases} b \in \mathbb{N} \\ b \leq 9 \end{cases}$

Так. по условию хотя бы одна цифра  $B$  равна 2, то  $B = \underline{202}$

След.,  $A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = a \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 101^2 = k^2$

След.,  $a \cdot 2 \cdot 3$  - кв. кат. числа, след., в  $a$  содержит мн-ты: 2 и 3.

$\Rightarrow \begin{cases} a : 6 \\ a \leq 9 \\ a \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \underline{a = 6} \Rightarrow \underline{A = 6666}$  Также самую удобную запись:  $(6666, 202, 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2  $x, y > 0$

Условие о невырожденности  $K$ :  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy+x-y-1}$$

П.к.  $x > 0, y > 0$ , то  $x+y+2 > 2 > 0$ . На  $x+y+2$  можно разбить ~~одну часть~~ <sup>на четыре</sup>

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{xy+x-y-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = xy + x - y - 1 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ x, y > 0 \end{cases}$$

Получим, пусть  $M$ :  $M = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$

След.,  $\forall x, y > 0$   $M = 1$ .

Ответ: 1





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = -3x + 1 + 2k \\ y = x - 1 + 2n \\ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \\ x \in [-5; 5) \\ y \in [-4; 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 1 + 2k, (I) \\ y = x - 1 + 2n, (II) \\ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \\ x \in [-5; 4] \\ y \in [-4; 3] \end{cases}$$

$$(I): \quad \begin{aligned} -5 \leq x \leq 4 & \quad | \cdot (-3) \\ 15 \geq -3x \geq -12 & \quad | + 1 + 2k \\ 3 \geq 16 + 2k \geq \underbrace{-3x + 1 + 2k}_{=y} \geq -11 + 2k \geq -4 \end{aligned}$$

$$\text{След. } 2k + 16 \leq 3 \Rightarrow \underline{k \leq -7}, \quad 2k - 11 \geq -4 \Rightarrow \underline{k \geq 4}$$

$$\begin{cases} k \leq -7 \\ k \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$(II): \quad \begin{aligned} -5 \leq x \leq 4 & \quad | -1 + 2n \\ -4 \leq -6 + 2n \leq \underbrace{x - 1 + 2n}_{=y} \leq 3 + 2n \leq 3 \end{aligned}$$

$$\text{След. } \begin{aligned} 2n - 6 \geq -4 & \quad \Rightarrow \underline{n \geq 1} \\ 2n + 3 \leq 3 & \quad \Rightarrow \underline{n \leq 0} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} n \geq 1 \\ n \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

След. таких пар целых чисел нет. Ответ: 0



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$a) \begin{cases} \sin \pi x + \sin \pi y \\ \sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y \end{cases} \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$x, y \in \mathbb{R}$   
диф. нем

$$0 = \cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y)$$

$$2 \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \quad \text{След.};$$

$$\begin{cases} \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0 \\ \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 + 2k \\ x - y = 1 + 2n \end{cases}, \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{След.} \begin{cases} y = -3x + 1 + 2k \\ y = x - 1 + 2n \end{cases} \quad \text{Ответ: } (a; -3a + 1 + 2k), \quad a \in \mathbb{R}; \quad k \in \mathbb{Z}; \\ (b; b - 1 + 2n), \quad b \in \mathbb{R}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

б)  $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$ . Не определено арксинуса и арккосинуса:

$$\arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \arccos \frac{y}{4} \leq \pi \Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$

Нер-во выполняется при любых значениях арксинуса и арккосинуса, кроме случая интервала:

$$\text{След.} \begin{cases} \arcsin \frac{x}{5} \neq \frac{\pi}{2} \\ \arccos \frac{y}{4} \neq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq -1 \\ -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq -4 \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-5; 5) \\ y \in [-4; 4) \end{cases}$$

Теперь найдем на это решение уравнение, с учетом, что только по усл.  $x, y \in \mathbb{Z}$ :





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

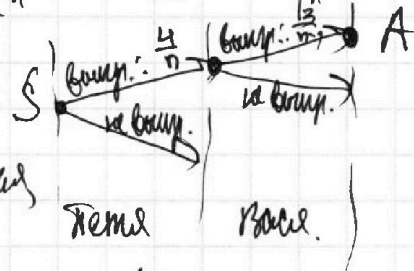
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14 Пусть среди  $n$  учащихся было  $n$  (было и вышло)

Тогда,  $P(\text{и не вышло} | \text{и вышло}) = \frac{4}{n}$ .  $P(\text{и не вышло} | \text{и вышло}) =$

$$= \frac{3}{n-1}$$

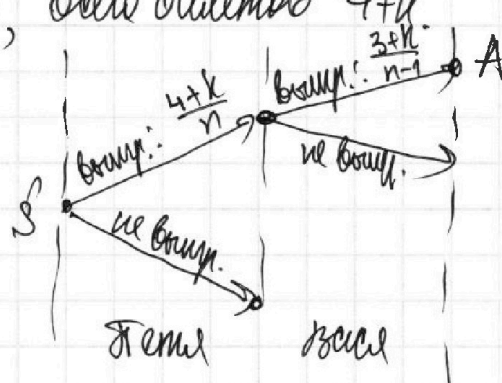


След. вероятность интересующей нас события, назовем его  $A$ , равна: (см. рис)

По правилу умножения:  $P(A) = \frac{4}{n} - \frac{3}{n-1} = \frac{12}{n(n-1)}$

Пусть добавили  $k$  детей. Тогда, всего детей  $4+k$

Тогда, актуальные вероятности:



Тогда, вероятность нового интересующей нас события  $A'$  равна:

$$P(A') = \frac{4+k}{n} - \frac{3+k}{n-1} = \frac{(k+3)(k+4)}{n(n-1)}$$

По условию,  $P(A') = 2,5P(A)$

След.  $\frac{(k+3)(k+4)}{n(n-1)} = \frac{2,5 \cdot 12}{n(n-1)}$

$$k^2 + 7k + 12 = 30$$

$$k^2 + 7k - 18 = 0$$

$$D = 49 + 4 \cdot 18 = 49 + 72 = 121$$

$$k_{1,2} = \frac{-7 \pm 11}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = -9 \\ k = 2 \end{cases}$$

~~В классе есть 4 девочки и 4 мальчика~~  
 В классе, включая девочку и мальчика, не менее 5 человек, иначе вер-ть выжить будет как была 1, так бы и оставалась 1, не было бы эм. 2,5

Дети добавили  $\Rightarrow k > 0$   
 переберем ум. задачи

След. добавили 2 ребенка  $\Rightarrow$  всего детей вышло:  $2+4=6$ .

Ответ: 6 детей

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14) Это т. синусов в  $\triangle OPA$ :  $\frac{AP}{\sin \angle POA} = \frac{OA}{\sin \angle OPA} \Rightarrow \frac{15}{2 \sin \beta} = \frac{R}{\cos \alpha}$

След.,  $\frac{15}{2 \sin \beta} = \frac{9}{2 \sin \beta \cos \alpha} \mid \cdot 2 \sin \beta = 0$   ~~$\frac{15}{2 \sin \beta} = \frac{9}{2 \sin \beta \cos \alpha}$~~

$15 = \frac{9}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$   $\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}}$

$\sin \alpha > 0$ , т.к.  $\triangle ABC$  - остроуг. по усл.

След.,  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

15)  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right) \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = \frac{25 \cdot 9 \cdot 4}{4 \cdot 5} = 45.$

16) Заметим, что кратчайшее решение справедливо для тупоугольного  $\triangle BOC$ , и для остроугольного  $\triangle BOC$ , т.к. решение приведено "чёрточкой" через т. пересечения окружности и прямой.

Случай пересечения окружностью прямой  $(AB)$ , а не отрезка, исключён и не учтён.

Ответ: 45



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

1) Пусть в  $\triangle ABC$ :  $\angle A = \alpha$   
 $\angle B = \beta$

2)  $\angle BOC = \alpha \angle BAC = \alpha \alpha$  — центральный угол на шаре.  $BC$  ( $\angle BAC$  — вписанный, опирающийся на нее)

3)  $AO = BO = CO = R$  — радиусы шара,  
след,  $\triangle BOC$  —  $\pi/2$   
след,  $\angle OBC = \angle OCB = \frac{\pi}{2} - \alpha$ .

4)  $\beta = \angle OBP + \frac{\pi}{2} - \alpha \leftarrow \angle B$  в  $\triangle ABC$   
след,  $\angle OBP = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}$

5)  $\triangle BOA$  —  $\pi/2$ :  $BO = OA$ , след.:  
 $\angle OAB = \angle OBA = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}$

$\angle BOA = \pi - 2\alpha - 2\beta + \pi = 2\pi - 2\alpha - 2\beta$

6)  $\alpha = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2} + \angle OAC \leftarrow \angle A$  в  $\triangle ABC$   
 $\angle OAC = \frac{\pi}{2} - \beta$

7)  $\triangle AOC$  —  $\pi/2$ :  $OA = OC$ , след.:  
 $\angle OCA = \angle OAC = \frac{\pi}{2} - \beta$ ,  $\angle COA = 2\beta$ .

8) По уже,  $B, O, P, C$  — лежат на  $\omega_2$ . След,  $BCOP$  — вписанный  
след,  $\angle BPO = \pi - \angle BCO = \pi - \frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha$

9) Из  $\triangle BOP$ :  $\angle BOP = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha - \alpha - \beta + \frac{\pi}{2} = \pi - 2\alpha - \beta$

10)  $\angle BOA$ :  $2\pi - 2\alpha - 2\beta = \pi - 2\alpha - \beta + \angle POA \Rightarrow \angle POA = \pi - \beta$

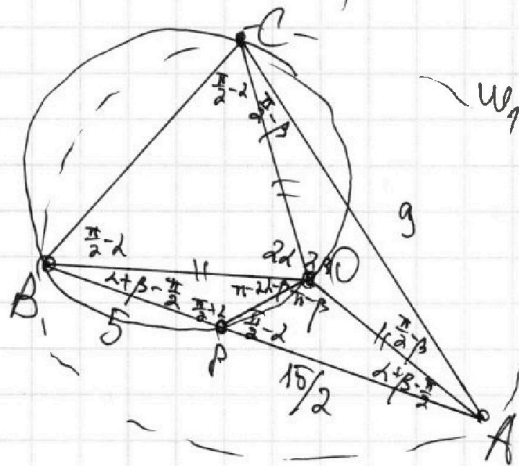
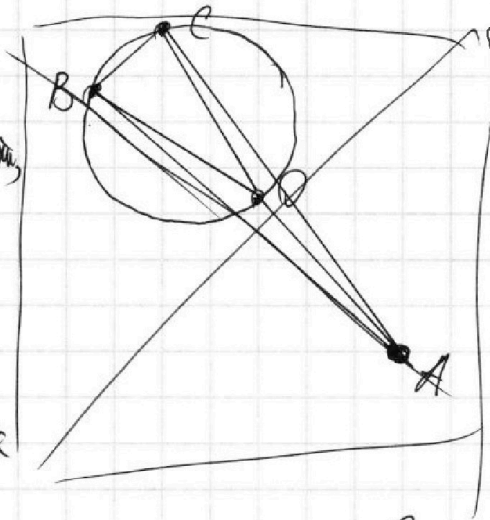
11)  $\angle BPA$  — вписанный  $\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \alpha + \angle OPA = \pi \Rightarrow \angle OPA = \frac{\pi}{2} - \alpha$

12) По т. синусов в  $\triangle ABC$ :  $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$

$$\frac{9}{\sin \beta} = 2R \Rightarrow R = \frac{9}{2 \sin \beta}$$

13) По т. синусов в  $\triangle OBP$ :  $\frac{BP}{\sin \angle BOP} = \frac{OB}{\sin \angle BPO}$

$$\frac{5}{\sin(\pi - 2\alpha - \beta)} = \frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)} \Rightarrow \frac{5}{\sin(2\alpha + \beta)} = \frac{9}{2 \sin \beta \cos \alpha}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \cos \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{18 \sin^2 \alpha + 7} = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha = 0 \\ 18 \sin^2 \alpha + 7 = 25 - 18 \sin^2 \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha = 0 \\ 36 \sin^2 \alpha = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Вспомогательная из этих точек и будет конеч. значение ~~М(α)~~. M(α).

- $\sin \alpha = 0$ :  $M(\alpha) = 5\pi + 2(5 + \sqrt{7})$
- $\cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm 1$ :  $M(\alpha) = 5\pi + 2(5 + \sqrt{7})$
- $\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ :  $M(\alpha) = 5\pi + 2(\sqrt{25-9} + \sqrt{7+9}) = 5\pi + 2(4+4) = 5\pi + 16$

т.к.  $16 > 10 + 2\sqrt{7}$ , ~~и~~ не конеч. зн. M(α) увеличивается  
 $\left( \begin{matrix} 6 > 2\sqrt{7} \\ 36 > 25 - 18 \sin^2 \alpha \end{matrix} \right)$   
 при  $\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $5\pi + 16$  при  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \geq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x \geq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases} & (2) \\ x^2 + y^2 \leq 25 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} &\leq \sqrt{5} \\ 18 &\leq 25 \\ &\Downarrow \\ 3\sqrt{2} &\leq 5 \end{aligned}$$

На пл-ти  $xOy$ , (3) задает круг с центром в  $O(0;0)$ , радиусом  $R=5$  и внешней границей. (т.к. неравенство знак)

(1) задает две прямые параллельные, уравнениями  $x = 3\sqrt{2}\sin\alpha$  и  $y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$ .

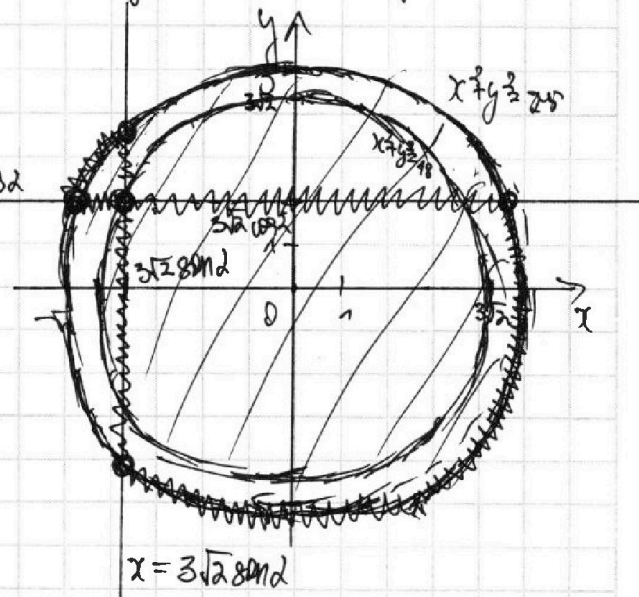
"слева-сверху" от точки  $(3\sqrt{2}\sin\alpha; 3\sqrt{2}\cos\alpha)$  и "справа-снизу" от неё же. (см. рис)

Заметим, что точка пересечения этих двух прямых принадлежит окружности с центром в т.  $O(0;0)$  и радиусом  $r = 3\sqrt{2}$  и вкл. границей, т.к.  $(3\sqrt{2}\sin\alpha)^2 + (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2 = (3\sqrt{2})^2$  верно по основному т.т. тригонометрии.

Фигура  $F(\alpha)$  состоит из частей ~~окружности~~ круга (3), лежащих "слева-сверху" и "справа-снизу" от параллельных прямых (1), вкл. границей.

Этого, периметр будет состоять из двух хорд-отрезков от прямых (1) ~~внутри~~ внутри круга и двух дуг (см. заштрихованные участки на рис.)

Найдем т. перес. от прямых (1) и от круга: окружностью (3).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x = 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y = \pm\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha} \end{cases} \quad \text{II) } \begin{cases} y = 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha} \\ y = 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$$

$$(3\sqrt{2}\sin\alpha; \sqrt{25 - 18\sin^2\alpha});$$

$$(3\sqrt{2}\sin\alpha; -\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha});$$

$$(\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha}; 3\sqrt{2}\cos\alpha);$$

$$(-\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha}; 3\sqrt{2}\cos\alpha)$$

След., <sup>циркулярная</sup> длина хорды равна:  $2(\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha} + \sqrt{25 - 18\cos^2\alpha})$ .

Измерь, разобравшись с дугой.

Вспомогательная вписанная окружность:

AB, CD - хорды окруж. с. AB ⊥ CD.

Найдем  $\overline{AD} + \overline{BC}$  - длину гуд.

~~AB~~ Пусть  $\alpha$  - мера  $\widehat{AD}$ :  $2\alpha$ ,  $\widehat{BC}$ :  $2\beta$

$\angle ABD$  - впис., центр. кр.  $\widehat{AD} \Rightarrow \angle ABD = \alpha$ .

$\angle BDC$  - впис., центр. кр.  $\widehat{BC} \Rightarrow \angle CDB = \beta$

Пусть  $AB \cap CD = O$ .  $\triangle ODB$  - п/г  $\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \underline{2\alpha + 2\beta = 180^\circ = \pi}$ .

Длина гуды выражается через её радиусную меру:  $\overline{AD} = R \cdot \overline{AD}$ ,  
R - радиус с. <sup>Р</sup>

След.,  $\overline{AD} + \overline{BC} = R \cdot 2\alpha + R \cdot 2\beta = \underline{\pi R}$ .

След., в нашей задаче, сумма гуды наибольшей гуд равна  $\pi R$ .

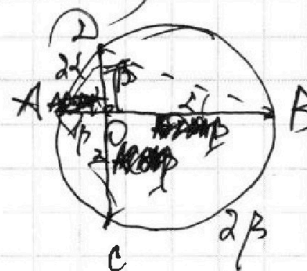
След., периметр  $P(\alpha) \equiv M = 5\pi + 2(\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha} + \sqrt{25 - 18\cos^2\alpha})$

$$M(\alpha) = 5\pi + 2(\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha} + \sqrt{7 + 18\sin^2\alpha})$$

$$M(0) = \pi R$$

$$M'(\alpha) = 2\left(\frac{-36\sin\alpha \cos\alpha}{2\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha}} + \frac{36\sin\alpha \cos\alpha}{2\sqrt{7 + 18\sin^2\alpha}}\right) = 36\sin\alpha \cos\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{18\sin^2\alpha + 7}} - \frac{1}{\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha}}\right)$$

$$M''(\alpha) = R$$







На одной странице можно оформить только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

1) т.к. уг. вып. - правильная, то её основание: правильные многог.

~~т.к.  $n$  - количество ребер, то~~

2) Пусть  $r_1, r_2$  - радиусы, впис. в верхнее и в нижнее основание му.  
( $r_1 < r_2$ ).

Формула,  $S_{\text{вып.}} = p r_2$ .

Пусть сторона верхней основания -  $a$ , нижнего  $b$  ( $b > a$ )

$\Rightarrow S_{\text{вып.}} = b n r_2$ ,  $n$  - кол-во ребер = кол-во вершин основания  
(след, трапеция  $n$ -угольная)

Искомая пов-ть:  $n$  либо треугольник с основанием  $b$ .



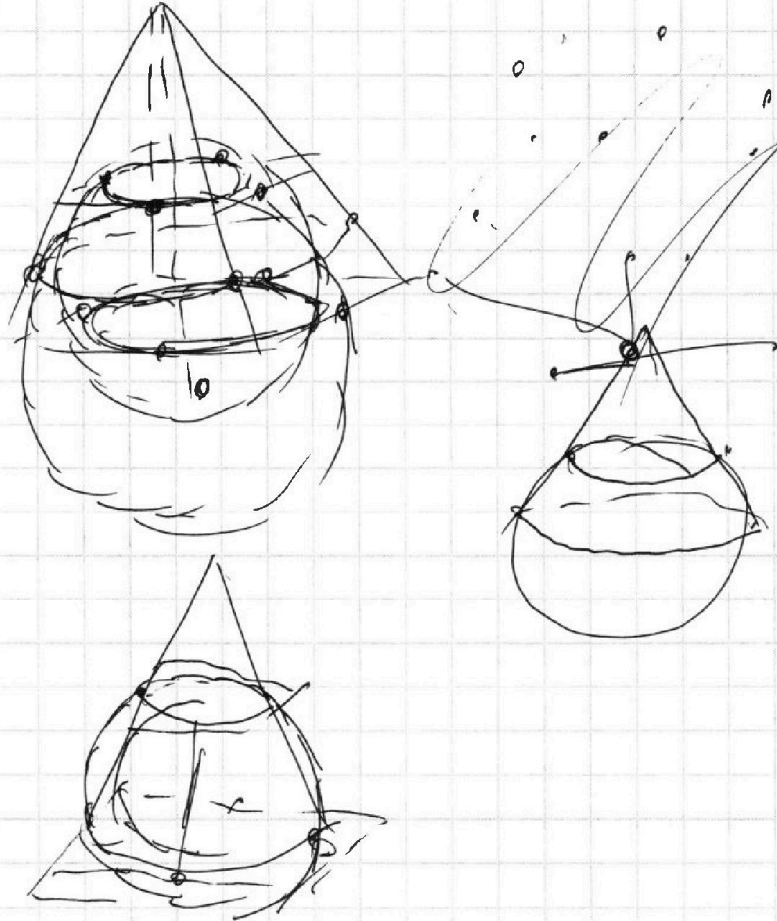
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 12

$$f(\alpha) = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} =$$

$$f'(\alpha) =$$

$$\begin{aligned} 25 - 18 \sin^2 \alpha \\ \sin \alpha = 0 \\ \cos \alpha = 1 \\ 25 \end{aligned}$$

$$f'(\alpha) = \frac{-36 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}} + \frac{-36 \cos \alpha (-\sin \alpha)}{\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}} = 0$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}} = 0$$

$$f(\alpha) = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{7 + 18 \sin^2 \alpha}$$

$$f'(\alpha) = \frac{-36 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}} + \frac{36 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{7 + 18 \sin^2 \alpha}} = 0$$

$$36 \sin \alpha \cos \alpha \left( \frac{1}{\sqrt{7 + 18 \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{7 + 18 \sin^2 \alpha} = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$$

$$36 \sin^2 \alpha = 18 \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

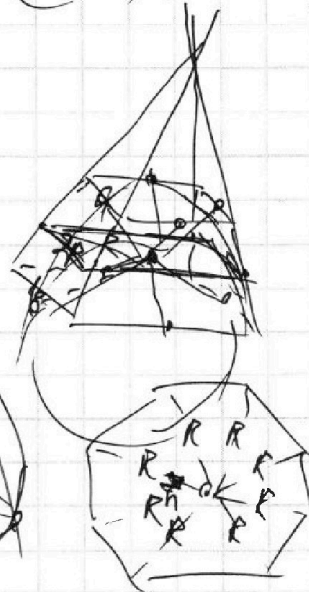
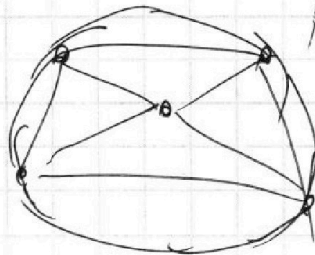
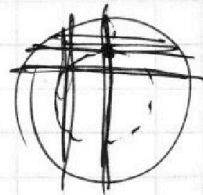
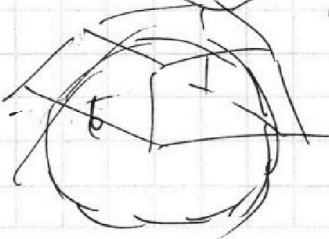
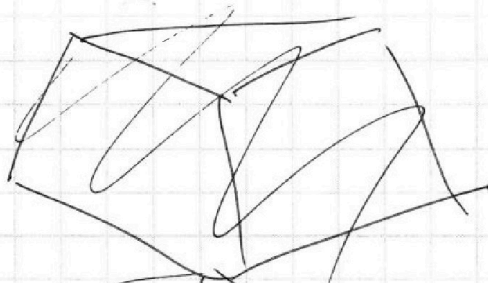
$$AO = AC \sin \alpha$$

$$OC = AC \cos \alpha$$

$$BO = BD \sin \alpha$$

$$OD = BD \cos \alpha$$

$$L = (AC + BD)(\sin \alpha + \cos \alpha)$$







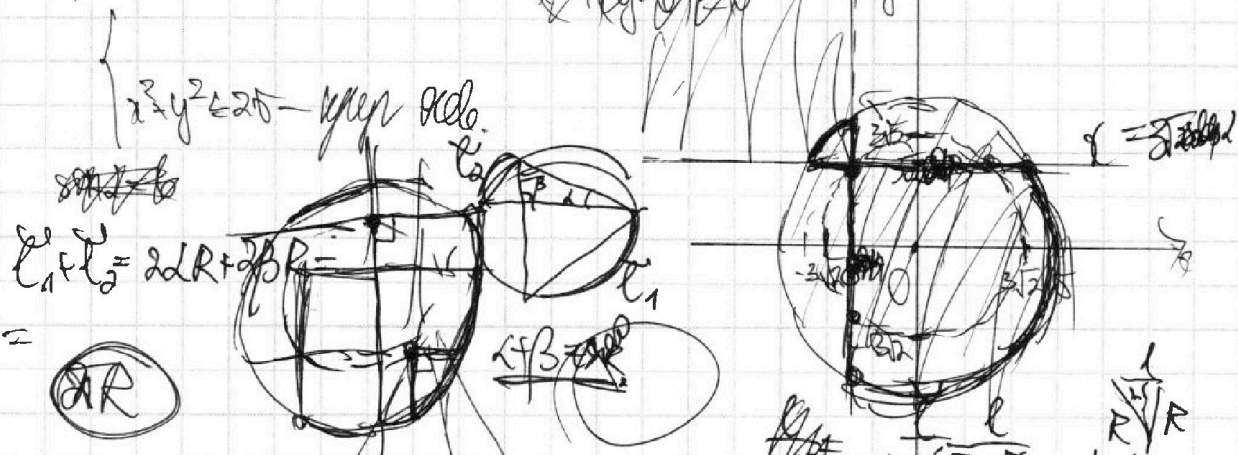
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Морф.



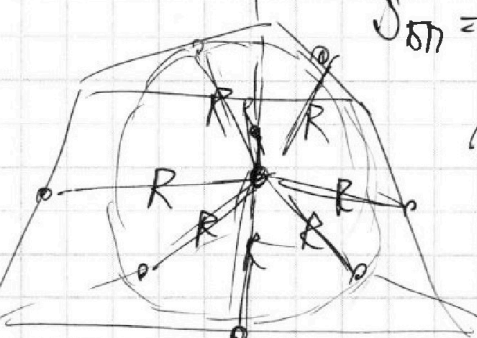
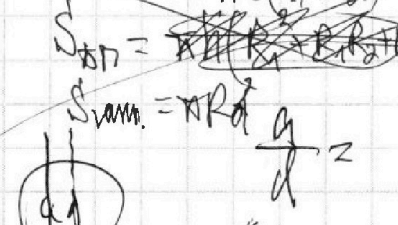
н.ч.ч.



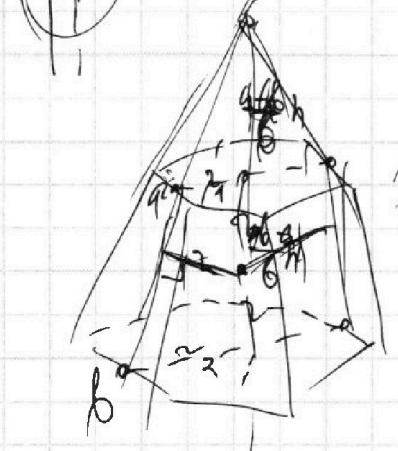
$S_{\text{пол}} = \pi R^2$

$S_{\text{сум}} = \frac{\pi R^2}{R_1} + \frac{\pi R^2}{R_2} = \frac{\pi R^2}{R_1} + \frac{\pi R^2}{R_2}$

$\frac{1}{2R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$



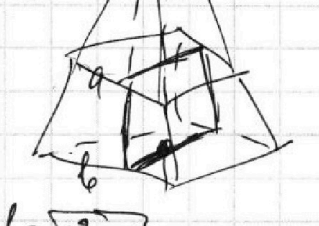
$1 - \frac{a-b}{b} = \frac{b-a+b}{b} = \frac{2b-bh}{b}$



$R_1 R_2 = 2R^2 h = 2R^2$

$S_{\text{сум}} = p r_2 = \frac{b \pi R_2}{a}$

$l_1 = \frac{a}{b} l, l_2 = \frac{b-a}{b} l, l = \sqrt{h^2 a^2}$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15 x 11

2 условия (?)

$$\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{15}{2 \sin \beta}$$

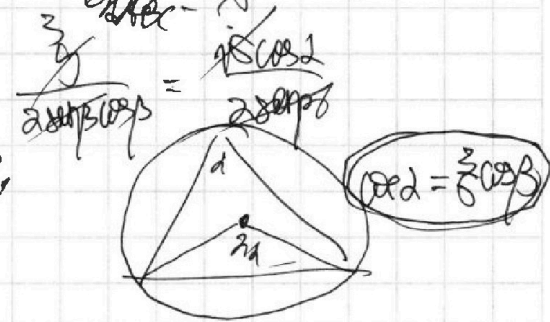
$$R = \frac{15 \cos \alpha}{2 \sin \beta}$$

$$\frac{BC}{2R \sin \alpha} = \frac{R}{\cos \alpha}$$

$$BC = 2R \sin \alpha$$

$$\frac{g}{\sin \beta} = 2R =$$

$$\frac{g}{\sin 2\beta} = R$$



$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{R}{\cos \alpha}$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{g}{2 \sin \beta} = \frac{15}{2 \sin \beta \cos \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{15}{g}$$

$$\frac{g}{\sin 2\beta} = \frac{R}{\cos \beta}$$

$$\frac{g}{2 \sin \beta} = R$$

$$\frac{g}{\sin 2\beta} = \frac{R}{\cos \beta}$$

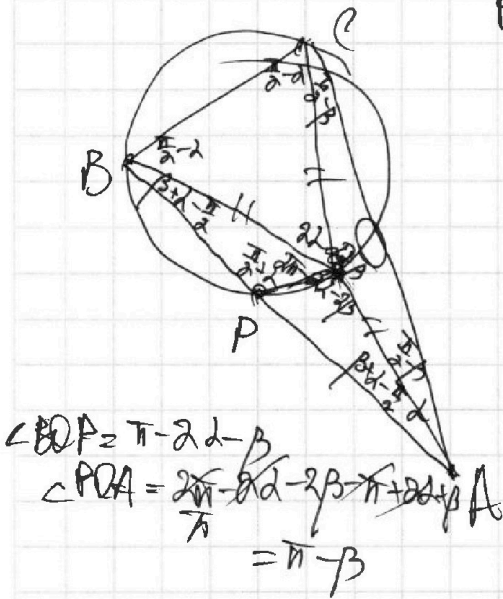
$$\frac{R}{\sin(\pi - 2\alpha - \beta)} = \frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$$

$$\frac{g}{2 \sin(2\alpha + \beta)} = \frac{g}{2 \sin \beta \cos \alpha}$$

$$g \sin(2\alpha + \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

$$\frac{15}{2 \sin \beta} = \frac{R}{\cos \alpha}$$

$$\frac{15}{2} = \frac{R}{\sin(\pi - \beta)}$$



$$\angle BCP = \pi - 2\alpha - \beta$$

$$\angle PCA = \frac{2\pi - 2\alpha - 2\beta + \pi + 2\alpha + \beta}{2} = \pi - \beta$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА \_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

150 зрлк

127

$$y = -3x + 1 + 2k \text{ (I)}$$

$$y = x - 1 + 2k \text{ (II)}$$

$\frac{x}{y}$

(I):

~~$\arccos \frac{x}{y} + \arccos \frac{3x}{4} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$~~

$-5 \leq x \leq 5, -4 \leq y \leq 4$

~~$-3x \leq 15 | +1+2k$~~

~~$-16+2k \leq -3x+1+2k \leq 16+2k$~~

$16+2k \leq 4$

$k \leq -6$

~~$-4 \leq -1+2k$~~   $2k \geq 10$

$k \geq -1$

$k \geq 5$

$-5 \leq x \leq 4 \text{ (B)}$

$15 \geq -3x \geq -12 | +1+2k$

$5 \geq 16+2k \geq -3x+1+2k \geq -11+2k \geq -4$

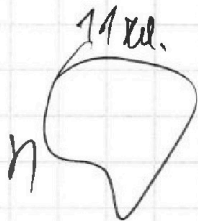
$2k \leq -11$

$k \leq -5.5$

$2k \geq 7$

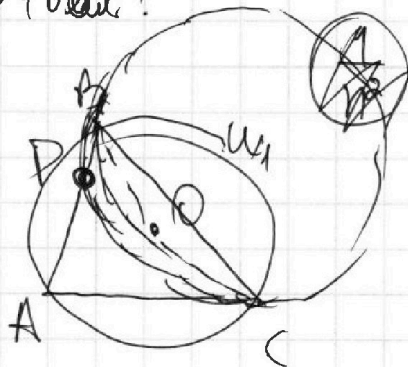
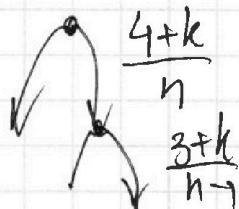
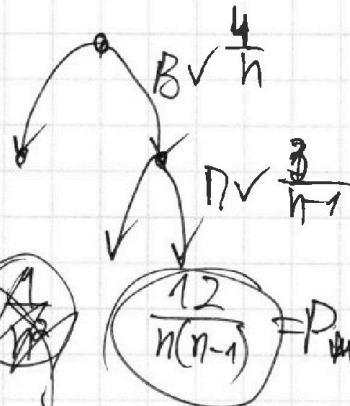
$k \geq 3.5$

14 зрлк



4 дел.

24 дел!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Метр

A - центр. м.з.з.у., B - м.р. = 202, C - физм. = 33

A · B · C - кв. нит. шема

11.101

A = a · 1111, a ∈ [1; 9]; ~~B = 1111~~

B = 6 · 11      B = 6 · 101

a · 11 · 101 · B · C = k<sup>2</sup>

$\begin{cases} C: 11 \\ C: 101 \end{cases} \quad \begin{cases} C: 11 \\ B: 101 \end{cases}$

✓  $\begin{matrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ \hline 31 \end{matrix}$  ~~11~~ ~~12~~ ~~13~~ ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ ~~17~~ ~~18~~ ~~19~~ ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ ~~23~~ ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ ~~29~~ ~~30~~ ~~31~~ ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~ ~~37~~ ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ ~~41~~ ~~42~~ ~~43~~ ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ ~~47~~ ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~ ~~51~~ ~~52~~ ~~53~~ ~~54~~ ~~55~~ ~~56~~ ~~57~~ ~~58~~ ~~59~~ ~~60~~ ~~61~~ ~~62~~ ~~63~~ ~~64~~ ~~65~~ ~~66~~ ~~67~~ ~~68~~ ~~69~~ ~~70~~ ~~71~~ ~~72~~ ~~73~~ ~~74~~ ~~75~~ ~~76~~ ~~77~~ ~~78~~ ~~79~~ ~~80~~ ~~81~~ ~~82~~ ~~83~~ ~~84~~ ~~85~~ ~~86~~ ~~87~~ ~~88~~ ~~89~~ ~~90~~ ~~91~~ ~~92~~ ~~93~~ ~~94~~ ~~95~~ ~~96~~ ~~97~~ ~~98~~ ~~99~~ ~~100~~

A = a · 1111.

След, A · B · C = a · 1111 · B · C = a · 11 · 101 · B · C = k<sup>2</sup>.

• C = 101k, k ∈ ℕ, но C ≠ 99

• B = 1111k

• C = 11k, B = 101k<sub>2</sub>

В 2-м x, y > 0:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$

M = x<sup>3</sup> - y<sup>3</sup> - 3xy - ? =  $\frac{x+y+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)} \Rightarrow \begin{cases} xy = xy - y + x - 1 \\ x \neq 0, y \neq 0 \\ x \neq 1, y \neq -1 \\ x = y + 1 \end{cases}$

M = x(y+1)<sup>3</sup> - y<sup>3</sup> - 3y(y+1) = y<sup>3</sup> + 3y<sup>2</sup> + 3y + 1 - y<sup>3</sup> - 3y<sup>2</sup> - 3y

В 3-м а) x, y ∈ ℝ:

$a \cos \frac{x}{y} + a \cos \frac{y}{x} < \frac{3a}{2}$

$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$   
 $\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$

$\cos 2\pi x \neq \cos(\pi(x+y)) = 0$

$2 \cos \frac{2\pi x + \pi x - \pi y}{2} \cos \frac{2\pi x - \pi x - \pi y}{2} = 0$

$\cos\left(\frac{1}{2}(3\pi x + \pi y)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\pi x - \pi y)\right) = 0$