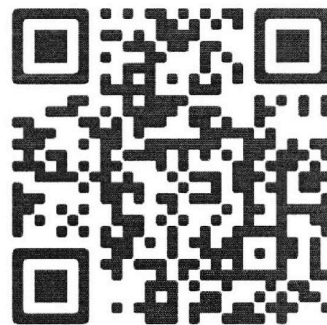




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A - четырехзнач. вида $\overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$, a - цифра

B - трехзнач. вид, где хотя бы одна - 2

C - двузнач. , где хотя бы одна - 3

$$A \cdot B \cdot C = t^2, t \in \mathbb{N}$$

$$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = t^2$$

~~B: 101~~

Заметим, что 101 - простое, поэтому только B: 101,

т.к. $a < 101, C < 101$.

~~если трехзнач. число
н.ч. = н.ч.
101 * X
квадрат.~~

B: 101

B - трехзнач. $\Rightarrow B = 202$.
B содержит 2

$$a \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot 2 \cdot C = t^2$$

Заметим, что 11 - простое $\Rightarrow$ только C: 11, т.к. ^{цифра} $a < 11$

C: 11

C - двузнач. $\Rightarrow C = 33$.

C содержит 3

$$a \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2 \cdot 3 = t^2, t \in \mathbb{N}$$

a - цифра $\Rightarrow$ единств. случай когда л.ч. - кв. натур. числа $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ то $a \geq 6$: Тогда: $A = 666, B = 202, C = 33$,

$$2^2 \cdot 3^3 \cdot 11^2 \cdot 101^2 = t^2$$



ОТВ: (666, 202, 33).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y > 0 \quad k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

З.х. уменьш. на 1
у увелич. на 1 $\rightarrow$

$$k = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} \quad | : (x+y+2) \neq 0, \text{ т.к. } x, y > 0.$$

$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy - y + x - 1$$

$$x = y + 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3(y)(y+1) = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

Отв: 1.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin nx + \sin ny) \sin nx = (\cos nx + \cos ny) \cdot \cos nx$$

$$\sin^2 nx + \frac{1}{2} (\cos (nx - ny) - \cos (nx + ny)) = \cos^2 nx + \frac{1}{2} (\cos (nx + ny) + \cos (nx - ny))$$

$$\sin^2 nx - \frac{1}{2} \cos (nx + ny) = \cos^2 nx + \frac{1}{2} \cos (nx + ny).$$

$$-\cos 2nx = \cos (nx + ny)$$

$$2 \cos \frac{3nx + ny}{2} \cdot \cos \frac{nx - ny}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{3nx + ny}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{nx - ny}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2y &= k - 3n - 1, \\ y &= \frac{k - 3n - 1}{2}, \end{aligned} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} 4x &= 1 + 2k + 2n, \\ x &= 1 + \frac{k}{2} + \frac{n}{2}, k, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\text{Отб. } x = 1 + \frac{k}{2} + \frac{n}{2}, y = \frac{k - 3n - 1}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}k - \frac{y}{3}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = y + 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Отв. а) } \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}k - \frac{a}{3}; a \right), \text{ где } k \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}.$$

$$(b + 1 + 2n; b), \text{ где } b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8) x = \frac{1+2k-y}{3}$$

$$x = \frac{y+1+2n}{-}$$

$$k, n \in \mathbb{Z}$$

$$y, y \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3n}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}$$

но не

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{3n}{2}$$

при

$$\arccos \frac{y}{4} = \pi, \text{ при } \frac{y}{4} = -1 \rightarrow y = -4$$

$$\rightarrow (5, -4) \text{ не ок.}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{x}{5} = 1 \rightarrow x = 5$$

$$\frac{1+2k-y}{3} = 5$$

$$y+1+2n = 5$$

$$2n = 8$$

$$n = 4$$

$$1+2k+y = 15$$

$$2k = 10$$

$$k = 5$$

$$-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

$$-4 \leq y \leq 4$$

$$-5 \leq y+1+2n \leq 5 \quad (1) \quad -5 \leq \frac{1+2k-y}{3} \leq 5 \quad (2)$$

$\in \mathbb{Z}$, очев.

9 значений для y: $\{-4, -3, \dots, 0, 1, \dots, 3, 4\}$

11 значений для x: $\{-5, -4, \dots, 1, 4, 5\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(1) $-5 \leq y + 3 + 2n \leq 5$ $y, n \in \mathbb{Z}$

$-4 \leq y \leq 4$

Если y - чёт: (5 вар.), то

x - только нечёт, т.к. $x = y + 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$.

Из любой нечёт x можем получить.

$5 \cdot 6 = 30$

от -5 до 5
 6 нечёт цифр.

Если y - нечёт (4 вар.), то

x - чёт (от -5 до 5 5 чёт цифр).

Нам все варианты тогда $x, y \in \mathbb{Z}$ и разной четности.

$4 \cdot 5 = 20$

Нам нужно посчитать теперь когда

(2) $-5 \leq \frac{1+2k-y}{3} \leq 5$ $y, k \in \mathbb{Z}$

$-15 \leq 1+2k-y \leq 15$

$1+2k-y \div 3$

$5-y \in [-3, 5]$
 $\in \mathbb{Z}$

Если y - чёт, то $\frac{1+2k-y}{3} = 3x \leftarrow$ нечет

Если $3x$ нечёт, то

Разобрали все варианты. Всего подходящих нам случаев:

$30 + 20 - 1 = 49$

кей-во не выполнено (6, -4)

Отв: 49.

Если y - неч, то:

$1+2k-y = 3x = \text{чёт}$

$3x \div 2$

x - чёт $\Rightarrow x \div 2$
 уже посчитано.

x - нечет
~~3х~~

$3x \neq 0$

$x \neq 0$

$\Rightarrow x$ - нечёт
 уже посчитано



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посчитаем вероятность в начале месяца!

Петя и Вова уже выбрали

n -кол-во единиц гатикаасснинов

$$\frac{\binom{n-2}{2}}{\binom{n}{4}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!}}{\frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}} = \frac{12}{n(n-1)}.$$

Посчитаем P в конце месяца, если бы выделено x билетов:

$$\frac{\binom{x-2}{n-2}}{\binom{x}{n}} = \frac{\frac{(x-2)!}{(n-x)! \cdot (x-4)!}}{\frac{x!}{(n-x)! \cdot x!}} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}.$$

В начале месяца P была в $\frac{5}{2}$ раз меньше чем в конце:

$$\frac{12}{n(n-1)} \cdot \frac{5}{2} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}.$$

$$30 = x^2 - x,$$

Отв: 6.

$$x^2 - x - 30 \geq 0$$

$$(x-6)(x+5) \geq 0$$

$$x > 4 \Rightarrow \boxed{x=6}.$$

(по усл.)

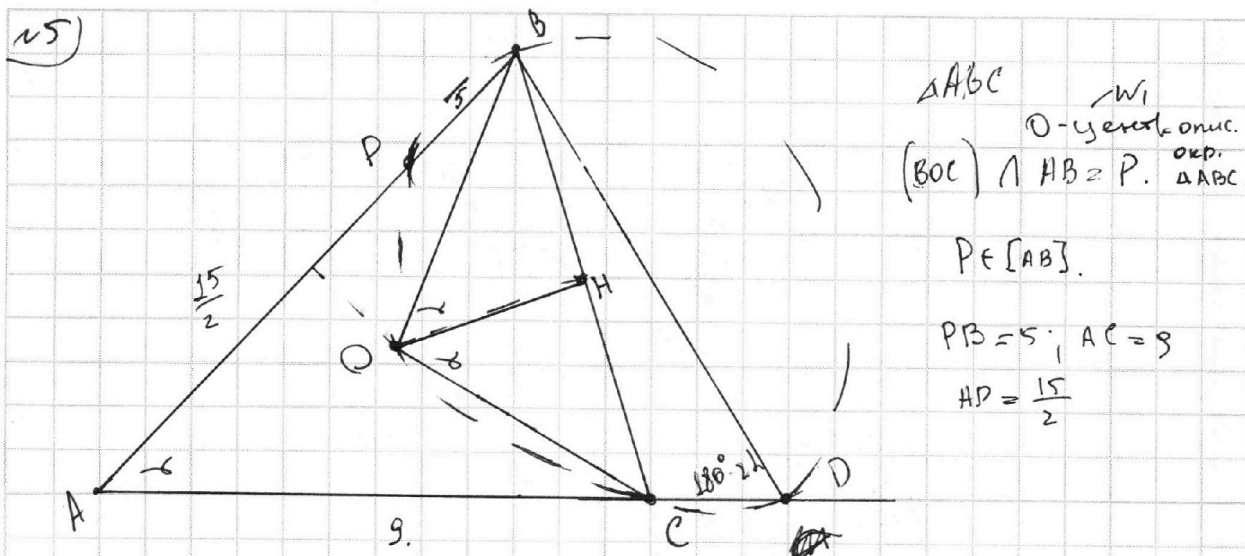


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle ABC$
О-центр опис. окр. $\triangle ABC$.
(Boc) $\cap$ HB = P.

$P \in [AB]$.

$PB = 5$; $AC = 9$

$AD = \frac{15}{2}$

3) Запишем степ. точки для A и w_1 :

① Если AC - касат. к w_1 : $AD \cdot AB = 9^2 = AC^2$

$$\frac{15}{2} \cdot \frac{15}{2} = 9^2 \quad \text{орев, ложь}$$

AC - не касат к w_1

② $\exists w_2 \cap AC = D$

Если $D \in [AC]$: $DC = x$: $(9-x) \cdot 9 = \frac{15 \cdot 25}{2}$

$AD \cdot AC = AD \cdot AB$

③ Тогда остаётся единст.

случай $D \in [AC]$: $DC = x$.

$$81 - 9x = 125 \cdot \frac{3}{2} \quad \text{орев ложь}$$

$AC \cdot AD = AP \cdot PB$

$$9 \cdot (9+x) = 125 \cdot \frac{3}{2} = \frac{375}{2} = 187 \frac{1}{2}$$

$D \notin [AC]$.

$$81 + 9x = 187 \frac{1}{2}$$

$$9x = 106 \frac{1}{2} = \frac{213}{2} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 71}{9 \cdot 2} = \frac{71}{6} = CD.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) Пусть $\angle BOE = 2\alpha$, тогда $\angle BAC = \alpha$.

В $\triangle ABC$: $\angle BOC$ - центр.
 $\angle BAC$ - впис. $\angle$ опир. на $\widehat{BC}$.

$OB = OC$ (т.к. O - центр, опис. окр. ок. $\triangle ABC$).

~~АВ~~

3) Заметим $BOCD$ - вписанный $\Rightarrow \angle CDB = 180^\circ - \angle COB = 180^\circ - 2\alpha$.

В $\triangle ADB$: $\angle A = \alpha$

$\angle D = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle B = \alpha \Rightarrow \angle ABD$.

$\Rightarrow \triangle ADB$ - $\triangle$ ($AD = BD$).

$$AD = 9 + x = 9 + \frac{71}{6} = \frac{125}{6} = BD.$$

по т. синусов в $\triangle ABD$:

$$BD = \frac{125}{6} \quad AB = \frac{25}{2}$$

$$\frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{AB}{\sin 2\alpha}$$

$$\frac{125}{6 \sin \alpha} = \frac{25}{2 \sin 2\alpha} \Rightarrow \frac{5 \sin 2\alpha}{3 \sin \alpha} = 1.$$

$\triangle ABC$ - ост. $\triangle$:
 $\frac{10}{3} \cos \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{10}$

$\downarrow$
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot \sin \angle CAB =$$

$$= \frac{25}{4} \cdot \frac{125}{6} \cdot \frac{\sqrt{91}}{10} = \frac{5\sqrt{91}}{12} \cdot \frac{25}{4} \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{91}}{10} = \frac{45\sqrt{91}}{8}$$

Омб: $\frac{45\sqrt{91}}{8}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

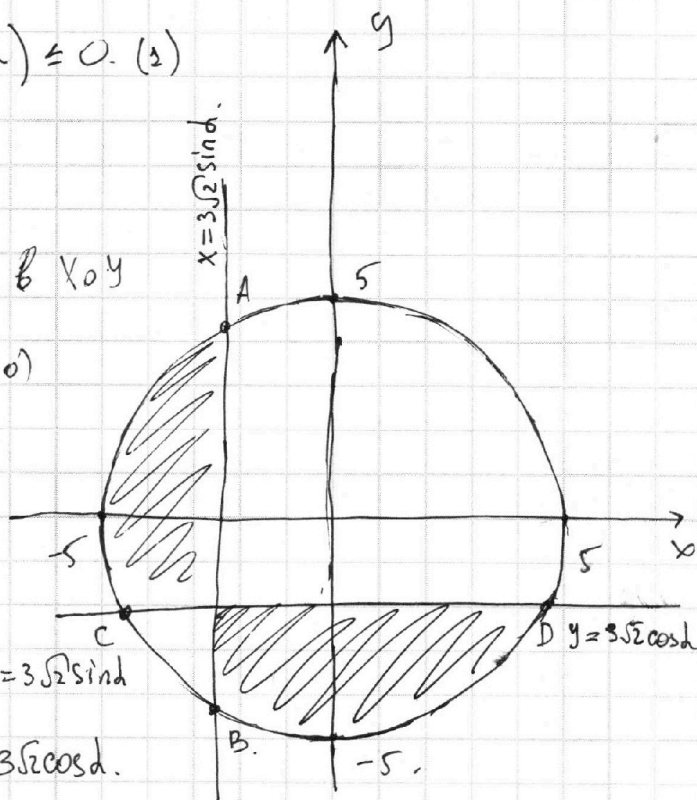
$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0. & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 25. & (2) \end{cases}$$

Нарисуем график системы: в xOy

(2) Окр.-ность с центром $(0;0)$ и радиусом 5.

Подходя под неравенство все, что внутри окр.-ности.

(1) нарисуем верт. прямую $x = 3\sqrt{2}\sin\alpha$ и горизонт. прямую $y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$.



Тогда чтобы нер-во (1) выполн. нам понадобится: $\begin{cases} \text{правее } x = 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ \text{ниже } y = 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$

Заметим, что

$\begin{cases} \text{левее } x = 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ \text{выше } y = 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$

Найдем пересечение $y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$ с окр.-ностью

точками C и D, пересечение $x = 3\sqrt{2}\sin\alpha$ с окр.-ностью - A и B.

Заметим, что AB ⊥ CD (одна из них горизонт. прямая, другая верт.).

$$\angle(AB; CD) = \frac{\angle VBD + \angle VAC}{2} = 90^\circ$$

тогда $\angle VAC + \angle VBD = 180^\circ$ (полукр.-ность).

$$\text{Тогда } l_{AC} + l_{BD} = \frac{2\pi R}{2} = \pi R = 5\pi.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдём C_x : $y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$: лежит на окр:

и D_x

$$x^2 + 18\cos^2\alpha = 25.$$

$$x = \pm\sqrt{25-18\cos^2\alpha}.$$

$$\rightarrow \text{Тогда } C_x = -\sqrt{25-18\cos^2\alpha}$$

$\leftarrow$

$$D_x = +\sqrt{25-18\cos^2\alpha}$$

$$CD = 2\sqrt{25-18\cos^2\alpha}.$$

Аналогично найдём A_y и B_y и найдём $AB = 2\sqrt{25-18\sin^2\alpha}$

Тогда P — иск. периметр

$$= CD + AB + 5\pi = 2\sqrt{25-18\cos^2\alpha} + 2\sqrt{25-18\sin^2\alpha} + 5\pi$$

По сути тогда надо

максимизировать.

Найти $\max(\sqrt{25-18\cos^2\alpha} + \sqrt{25-18\sin^2\alpha}) \leftarrow$ Тогда и P будет максимум.

$$t \in [0; 18].$$

$$\sqrt{25-18\cos^2\alpha} \neq \sqrt{25-18\sin^2\alpha} = \sqrt{25-18\cos^2\alpha} + \sqrt{7+18\cos^2\alpha} \quad t = 18\cos^2\alpha$$

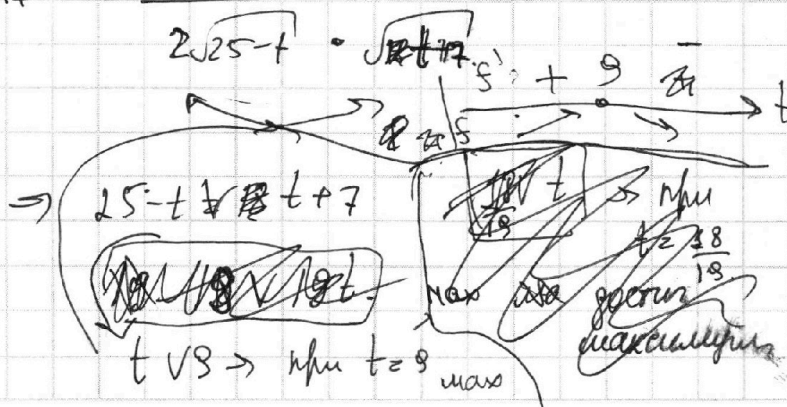
$$f(x) = \sqrt{25-t} + \sqrt{7+t}.$$

$$f' = \frac{-1}{2\sqrt{25-t}} + \frac{1}{2\sqrt{7+t}} = \frac{\sqrt{25-t} - \sqrt{7+t}}{2\sqrt{25-t} \cdot \sqrt{7+t}} \rightarrow \text{знаменатель } > 0.$$

$$\sqrt{25-t} - \sqrt{7+t} \quad \forall t$$

$$\sqrt{25-t} \quad \forall \quad \sqrt{7+t}$$

$$t \in [0; 18]$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
3 ИЗ 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$18 \cos^2 d = \frac{18}{18}$$

$$18 \cos^2 d = 18 \Rightarrow \cos^2 d = \frac{1}{2} \quad \cos d = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P_{\max} = 12.5 + \sqrt{25 - 18 \cos^2 d} + \sqrt{7 + 18 \cos^2 d} =$$

$$5n + \sqrt{16} + \sqrt{16} = 5n + 8.$$

$$\begin{cases} d = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ d = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Отв: } P_{\max} = 5n + 8 ; \begin{cases} d = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ d = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3x + y = 1 + 2k.$$

$$k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{k}{2} + \frac{n}{2} - y = 1 + 2n$$

$$x - y = 1 + 2n$$

$$y = \frac{k}{2} - \frac{3n}{2} - \frac{1}{2}.$$

$$4x = 2 + 2k + 2n.$$

$$k - 3n - \text{нечёт.}$$

$$2x = 1 + k + n, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$3x + y = 1 + 2k$$

$$2y = k - 3n - 1.$$

$$3x - 3y = 3 + 6n.$$

$$||$$

$$2k - 2n - 2x.$$

$$2x + 2y = 1 + 2k + 2n, \quad 2k - 2n.$$

$$4y = -2 + 2k - 6n.$$

$$1 + k + n + k - 3n - 1.$$

$$y = \frac{k}{2}$$

$$y = k - n - x.$$

$$k + n - \text{нечёт.}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{p}{2}, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{y}{4} = -1.$$

$$\frac{y}{4} = -1.$$

$$\frac{x}{5} = 1.$$

$$2x = 10$$

$$1 + k + n = 10$$

$$2y = -2.$$

$$k + n = 9.$$

$$k - 3n - 1 = -8.$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

$$k - 3n = -7.$$

$$-10 \leq 1 + k + n \leq 10.$$

$$\begin{cases} k + n = 9 \\ k - 3n = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3n - 7 + n = 9 \\ k = 3n - 7 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} 2n = 16 \\ k = 3n - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 8 \\ k = 17 \end{cases} \quad \text{X} \quad \begin{matrix} 11 \\ 17 \end{matrix}$$

$$-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1.$$

$$-4 \leq y \leq 4.$$

$$-8 \leq k - 3n - 1 \leq 8.$$

$$-7 \leq k - 3n \leq 9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x^2 + x)(n^2 - 5n + 6) = 30(n^2 + 3n + 2 - 2xn - 3x + x^2)$$

$$x^2(n^2 - 5n + 6) + x(n^2 - 5n + 6) = 30n^2 + 90n + 60 - 60xn - 90x + 30x^2$$

$$x^2(n^2 - 5n - 24) + x(n^2 + 55n + 96) - 30n^2 - 90n - 60 = 0$$

$$D = 25 + 96 = 121 \quad n_{1,2} = \frac{5 \pm 11}{2} = -$$

$$x \geq 5$$

$$\frac{C_n^{x-2}}{C_n^x}$$

$$\vee \frac{C_n^{x-1}}{C_n^{x+1}} \quad n \geq 6$$

$$2x(n^2 - 5n - 24) + n^2 + 55n + 96 = 0$$

$$2n^2 - 10n - 48 = -n^2 - 55n - 96$$

$$3n^2 + 45n + 48 = 0$$

$$n^2 + 15n + 16 = 0$$

$$(n+7)(n+8) = 0$$

$$n = -7$$

$$n = -8$$

$$\frac{x(x+1)}{(n+2-x)(n+1-x)}$$

$$\frac{n!}{(x-1)! \cdot (n+1-x)!} \cdot \frac{n!}{(x+1)! \cdot (n-x-1)!}$$

$$-n^2 + 55n + 96$$

$$\frac{(x+1)! \cdot (n-x-1)!}{(x-1)! \cdot (n+1-x)!}$$

$$\frac{(x+1)(x)}{(n+1-x)(n-x)}$$

$$\longrightarrow n$$

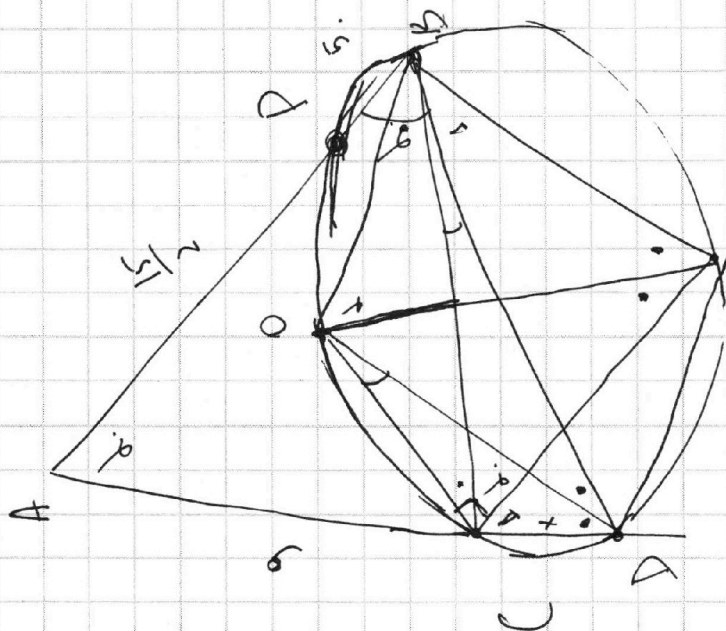
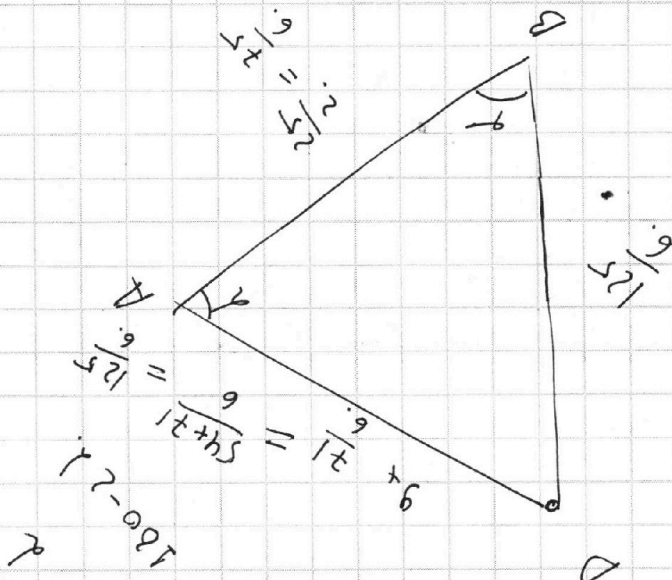


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



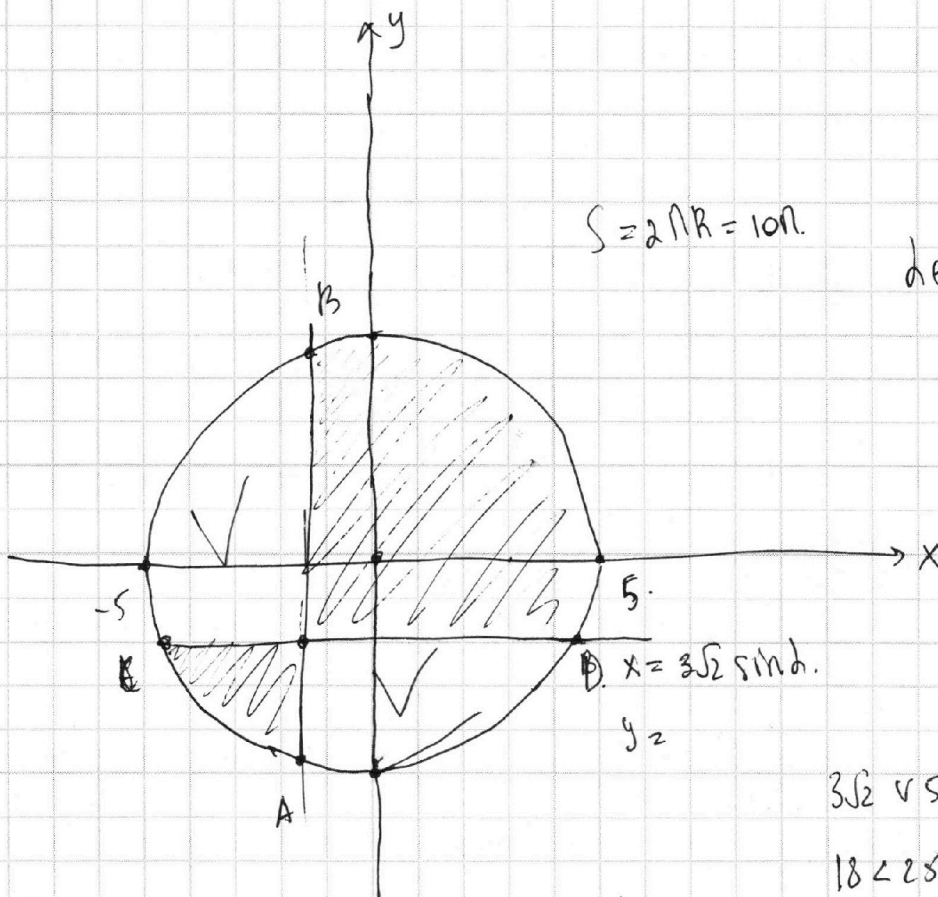


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$x = 5 \cos t$

$$x^2 + 18 \cos^2 t - 25 = 0.$$

$$x = \pm \sqrt{25 - 18 \cos^2 t}$$

$$20 = 2 \sqrt{25 - 18 \cos^2 t}$$

$$25 - 18 \sin^2 t =$$

$$3\sqrt{2} \sin t = x^2 + y^2 - 25.$$

$$18 \sin^2 t + y^2 - 25 =$$

$$y^2 = 25 - 18 \sin^2 t.$$

$$y = \pm \sqrt{25 - 18 \sin^2 t} = \sqrt{7 \sin^2 t +}$$

$$AB = 2 \sqrt{25 - 18 \sin^2 t}.$$

$$(5\pi + 2 \sqrt{25 - 18 \cos^2 t} + 2 \sqrt{25 - 18 \sin^2 t})_{\max} = ?$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$50 + 2\sqrt{25-18\cos^2 t} + 2\sqrt{25-18\sin^2 t}$$

$$t \in [0; 18]$$

$$\sqrt{25-18\cos^2 t} + \sqrt{25-18\sin^2 t} = \sqrt{25-18\cos^2 t} + \sqrt{18\cos^2 t + 7} = \sqrt{7} + 5$$

$$= \sqrt{25-18t} + \sqrt{18t+7}$$

$$f' = \frac{-18}{2\sqrt{25-t}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{\sqrt{18t+7}} = \frac{18(\sqrt{25-t} - \sqrt{18t+7})}{2\sqrt{25-t} \cdot \sqrt{18t+7}}$$

$$48\sqrt{25-t} \cdot \sqrt{18t+7} \uparrow 2$$

$$\sqrt{7}+5 \sqrt{4+4}$$

$$\sqrt{7}+1 \sqrt{4}$$

$$18^2(25-t) \sqrt{18t+7}$$

$$18^2 \cdot 5^2 - 18^2 t \sqrt{18t+7}$$

$$\sqrt{7} \sqrt{3}$$

$$\frac{18^2 \cdot 5^2 - 7}{19 \cdot 18} \sqrt{18}$$

$$19 \cdot 18t + 7 - 18^2 \cdot 5^2 \sqrt{0}$$

$$t \sqrt{\frac{18^2 \cdot 5^2 - 7}{19 \cdot 18}} =$$

$$18^2 \cdot 5^2 - 7 \sqrt{19 \cdot 18^2}$$

$$25$$

$$18 \cdot \frac{1}{4}$$

$$18$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{25-18\cos^2 t} + \sqrt{25-18\sin^2 t} = 8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) $x, y > 0$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{\cancel{xy} + x + y + 2}{xy}$$

$$K = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)} =$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy \quad ?$$

$$= \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$(x-1)(y+1) = xy$$

$$xy - y + x - 1 = xy$$

$$y = x - 1$$

$$x = y + 1$$

$$M = \cancel{x^3} (y+1)^3 - y^3 - 3(y)(y+1) = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

13) $\sin(nx + ny) \cdot \sin(nx) = \cos nx +$

$$(\sin nx + \sin ny) \sin(nx) = (\cos nx + \cos ny) \cdot \cos nx$$

$$\sin^2 nx + \sin ny \cdot \sin nx = \cos^2 nx + \cos ny \cdot \cos nx$$

$$\frac{n}{6} + \frac{2n}{6} = \frac{n}{2}$$



$$\cos ny \cdot \cos nx = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{n}{6} \cdot \cos \frac{n}{3} = \frac{1}{2} \left(\cos \right.$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{n}{3} - \frac{n}{6} = \frac{n}{6}$$

$$\frac{n}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{n}{6} = 2 \cos^2 \frac{n}{12} - 1$$

$$\frac{\sqrt{3} + 2}{2} = 2 \cos^2 \frac{n}{12}$$

$$\sin \frac{n}{6} + \sin \frac{n}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$2 \cdot \sin \frac{n}{4} \cdot \cos \frac{n}{12} = \sqrt{2} \cdot \cos \frac{n}{12} = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. четырезначное число $aaaa \rightarrow a \cdot 1111 \geq a \cdot 11 \cdot 101$

• трёхзнач. — $b2c \quad 2bc \quad bc2 \geq B$

• двузнач. — $d3 \quad 3d \geq c$

$$A \cdot B \cdot C = t^2$$

$$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot c = t^2$$

$$B : 101$$

$$\rightarrow B = 202$$

$$202$$

$$303$$

$$404$$

$$505$$

$$606$$

$$a \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot 2 \cdot c = t^2$$

$$a \cdot c : 22$$

$$(1) a \cdot (10d+3) : 22$$

$$(2) a(30+d) : 22$$

$$(2) 30a+d : 2 \rightarrow d : 2$$

$$30a+d : 11$$

$$a, d \in [1; 9]$$

$$d3 : 11 \rightarrow d = 3$$

$$3d : 11 \rightarrow d = 3$$

$$8a+d \equiv 0$$

$$d + d \equiv 0 \rightarrow d = 3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} \cdot 1} =$$

cos

sin

sin cos $\frac{\pi}{6}$.

$$\cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{2\pi}{6}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$2 \cos x \cdot \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin^2 nx + \frac{1}{2} (\cos n(x-y) - \cos n(x+y)) = \cos^2 nx + \frac{1}{2} (\cos n(x+y) + \cos n(x-y))$$

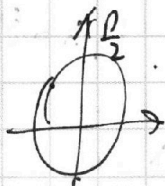
$$\sin^2 nx - \frac{1}{2} \cos(n(x+y)) = \cos^2 nx + \frac{1}{2} \cos(n(x+y))$$

$$-\cos 2nx = \cos(n(x+y))$$

$$\cos(n(x+y)) + \cos 2nx = 0$$

$$2 \cos \frac{3nx+ny}{2} \cdot \cos \frac{nx-ny}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{3nx+ny}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{nx-ny}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$\begin{cases} 3x+y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x-y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и) А * ординации - n.

Р в начале месяца: ~~$\frac{(n-2)(n-3)}{4!}$~~

$$\frac{n \cdot (n-2)(n-3)}{4!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$= \frac{1}{n^2 - n}$$

Р в конце месяца:

$$\frac{n \cdot (n-2)(n-3) \dots (n+1-x)}{x!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\frac{C_n^2}{C_n^4} = \frac{\frac{n!}{(n-2)!2!}}{\frac{n!}{(n-4)!4!}} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{12}{(n-2)(n-3)}$$

$$Р в конце: \frac{C_n^{x-2}}{C_n^x} = \frac{\frac{n!}{(n+2-x)!(x-2)!}}{\frac{n!}{x!(n-x)!}} = \frac{1}{\frac{(n+2-x)(n+1-x) \cdot (x-2)!}{x!}} = \frac{x(x+1)}{(n+2-x)(n+1-x)}$$

$$= \frac{x(x+1)}{(n+2-x)(n+1-x)} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{12}{(n-2)(n-3)} = \frac{30}{(n-2)(n-3)}$$

$$x(x+1)(n-2)(n-3) = 30(n+2-x)(n+1-x) \quad n, x \in \mathbb{Z}$$

$$(x^2+x)(n^2-5n+6) = 30((n+2)(n+1)-xn-x-xn-2x+x^2)$$

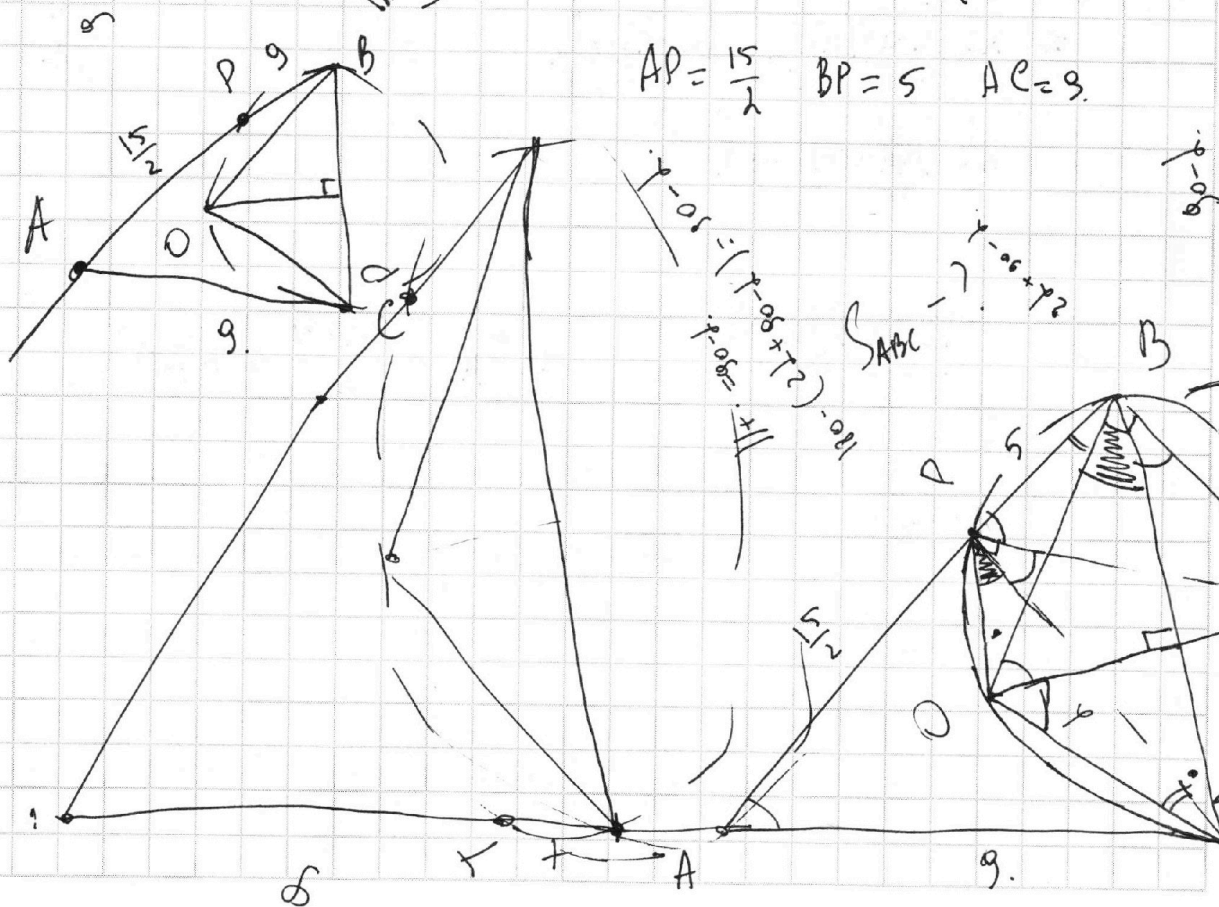
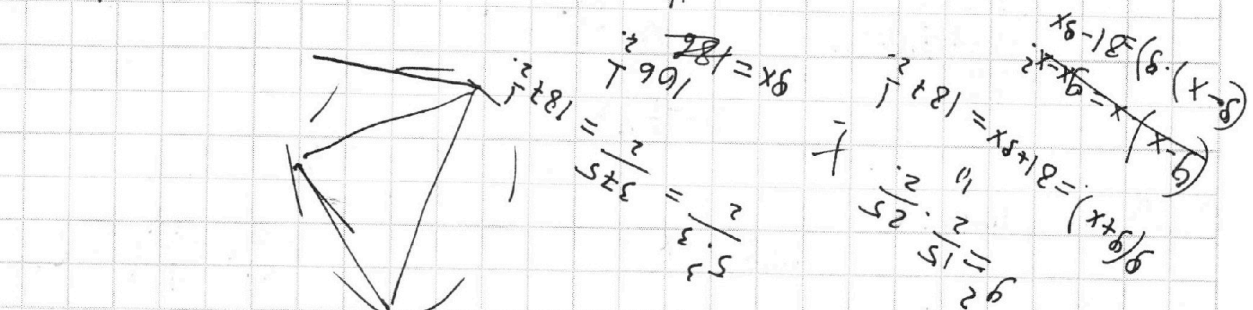
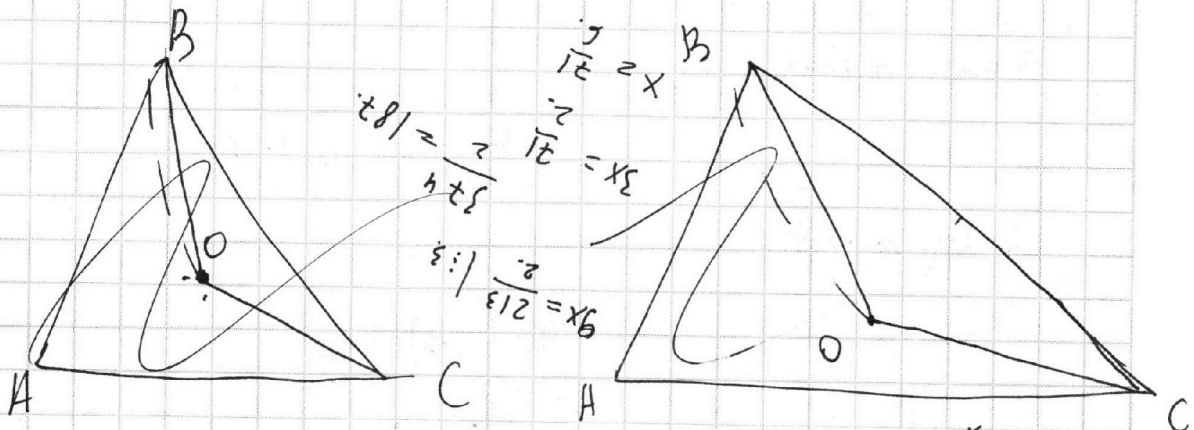


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ч 8. 7 лог 2.

$$4! \cdot 7 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!$$

~~7 \cdot 4 \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4)~~

$$\frac{4! (n-3)(n-2)}{n!}$$

$$\frac{4! (n-3)(n-2)}{n!}$$

$$= \frac{4!}{(n-2)(n)}$$

п в

После, цех:

$$x-2$$

$$e^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$x! \cdot (n-2)(n-3) \dots (n-x+1)$$

~~$x! \cdot (n)(n-1) \dots$~~

$$x! \cdot e$$

$$\frac{12 (n-3)(n-2)}{n!}$$

$$2 \cdot e^2 = \frac{x(x-1)}{2} = x(x-1)$$

$$\cos d = \frac{3}{5}$$

$$2 \cdot e^2$$

$$\frac{5}{3} \sin d = \frac{1}{1}$$

$$\frac{125}{25} = \frac{125}{25}$$

$$\frac{374}{2} = \frac{187}{1}$$

$$\frac{AB}{AB} = \frac{\sin(\alpha-2\alpha)}{\sin \alpha}$$