



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

/ ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Запишем числа A, B, C как они выглядят:

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{abcc}$$

$$C = \overline{cd}$$

(a, b, c, d, e, f - цифры

$\in \{0; 9\}$)

Заметим, что A раскладывается на множители.

$$A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$$

При этом:

$$A \cdot B \cdot C = m^2, \quad m \in \mathbb{N} \text{ - по условию}$$

$$\Rightarrow \text{числа } A \text{ т.к. } A:11 \text{ и } A:101 \Rightarrow m^2:11 \text{ и } m^2:101 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m:11 \text{ и } m:101 \Rightarrow m^2:11^2 \text{ и } m^2:101^2 \Rightarrow \text{т.к. } m^2 \text{ - квадрат} \Rightarrow \text{все его простые множители (т.) входят в } m^2 \text{ в четной степени.}$$

$$\Rightarrow \text{в разложении } A \cdot B \cdot C \text{ и } 11 \text{ и } 101 \text{ входят в четной степени т.к. в } A \text{ они входят в четной степени} \Rightarrow B \cdot C:11 \text{ и } B \cdot C:101$$

Заметим, что C - двузначн. и в его составе есть число 3

$$\Rightarrow C > 0 \text{ и } C < 100 \Rightarrow C:101 \Rightarrow B:101 \Rightarrow B = 101 \cdot k$$

Предположим, что $B:11 \Rightarrow B:11 \cdot 101$ т.к. $(11; 101) = 1$ - взаимнопр.

$$\Rightarrow B:1111, \text{ т.к. } B \text{ - трехзначн. число} \Rightarrow B > 0 \text{ и } B < 1000$$

$$\Rightarrow B \text{ не может делиться на } 1111, \text{ иначе } B > 1111 \text{ и } B < 1000$$

$$\Rightarrow \text{противоречие} \Rightarrow B:11 \Rightarrow C:11$$

Т.к. C - двузначн. число, в составе которого есть 3.

$$\text{и } C:11 \Rightarrow C = 33 \text{ (такое число единств.)}$$

Т.к. B - трехзначн. число, в составе кот. есть 2 и

$$B:101 \Rightarrow B = 202 \text{ (такое число единств.)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 202 \cdot 33 = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot 11^2 \cdot 101^2 = m^2$$

Т.к. 2 и 3 входят в разл. на множит. $m^2 \Rightarrow$ они должны входить в четной степени $\Rightarrow a$ представимо в виде:

$$a = 2^x \cdot 3^y \cdot t \quad t \in \mathbb{N} \Rightarrow x, y \geq 1, \text{ иначе хотя бы}$$

одно из чисел 2 и 3 входит в нечетной степени $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a = 6 \cdot n \text{ и } n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \geq 6 \text{ при этом } a \leq 9$$

При $n=1$ $a=6$ - подходит под орг. при $n>1$ $a \geq 12$ - не подх.

$\Rightarrow$ единств. возможн. вариант при $a=6 \Rightarrow A = 6666$

$$\Rightarrow \text{Проверка: } (6666; 202; 33) \quad A \cdot B \cdot C = 6666 \cdot 202 \cdot 33 =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 = (2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101)^2 = m^2$$

$$m = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101 \Rightarrow \text{подходит и она единств., т.к. при доказательстве}$$

показали, что B и C - составл. однозначно и A тоже соотв. однозначно.

Отв. вер: (6666; 202; 33)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

/ ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

Запишем K в обоих знаменателях, прив к условиям:

$$\begin{cases} K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \\ K = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \end{cases}$$

Преобразуем: $K = \frac{x+y+z}{xy}$

$$K = \frac{(x-1)+(y+1)+2}{(x-1)(y+1)(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+z}{(x-1)(y+1)}$$

Отр: $x \neq 0$
 $y \neq 0$
 $x \neq 1$
 $y \neq -1$

Приравняем:

$$\frac{x+y+z}{xy} = \frac{x+y+z}{(x-1)(y+1)} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0. & \textcircled{1} \\ (x-1)(y+1)=xy. & \textcircled{2} \end{cases}$$

Заметим, что $\textcircled{1}$ строчка невозможна, тк. по условию.

$x > 0, y > 0 \Rightarrow x+y+z > 2$ (если возм $z < 0$ противоречие)
 $\Rightarrow (x-1)(y+1)=xy$. Раскроем скобки:

$$xy + x - y - 1 = xy \Rightarrow x = y + 1. \text{ Введем, чему равно } M:$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

$M=1 \Rightarrow$ При всех x, y таких, что выполняется условие системы $(x=y+1)$ M принимает значение $1 \Rightarrow$
 $\rightarrow$ при всех x, y удовл. условию так значение $M_{\text{мин}} = 1$.

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
/ ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$\begin{aligned} (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\ \pi x &= b \quad \pi y = a \end{aligned}$$

$$(\sin b + \sin a) \sin b = (\cos b + \cos a) \cos b.$$

$$\sin^2 b + \sin a \sin b = \cos^2 b + \cos a \cos b.$$

$$- \cos a + b = \cos 2b.$$

$$- \sin \frac{\pi}{2} - (a+b) = \sin \frac{\pi}{2} - 2b.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2b\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = 0.$$

$$2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2b + \frac{\pi}{2} - (a+b)}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2b - \frac{\pi}{2} - (a+b)}{2}\right) = 0.$$

$$\sin \frac{\pi - 3b - a}{2} \cos \frac{a - b}{2} = 0.$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi - 3b - a}{2} = 0 \\ \cos \frac{a - b}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi - 3b - a}{2} = \pi k \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{a - b}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi - 3\pi x - \pi y = 2\pi k \\ \pi y - \pi x = 2\pi + 2\pi m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 3x - y = 2k \quad k \in \mathbb{Z} \\ y - x = 2 + 2m \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Так как везде делаем равносильные преобразования $\Rightarrow$ решения системы являются все пары x, y , что удовлетворяет хотя бы одно из совокупности $\Rightarrow$ решения будут иметь вид $\{(x; 1 - 3x - 2k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

① $\{(x; x + 2 + 2m) \mid m \in \mathbb{Z}\}$

Ответ $\{(x; 1 - 3x - 2k) \mid k \in \mathbb{Z}\}; \{(x; x + 2 + 2m) \mid m \in \mathbb{Z}\}$

② Доп $x \in [-5; 5] \mid x \in \mathbb{Z}$ Рассмотрим некоторый x , $y \in [-4; 4] \mid y \in \mathbb{Z}$ который подходит для уравн.

тогда решения для системы могут быть все возм. y :
если x - чет $y = 1 - 3x - 2k \mid k \in \mathbb{Z} \rightarrow y$ - четный

$$y = x + 2 + 2m \mid m \in \mathbb{Z} \rightarrow y \text{ - нечетный, аналогично}$$

при x - нечетном мы можем получить все возм. y :

$$m = \frac{y - x - 2}{2}; k = \frac{1 - 3x - y}{2} \text{ (но } x \text{ и } y \text{ можем построить либо } k, \text{ либо } m, \text{ чтобы оно } \in \mathbb{Z})$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

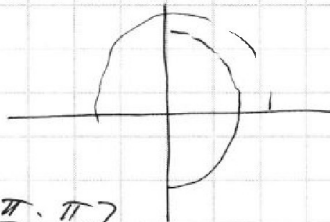
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь посмотрим, что должно выполняться во второй системе.

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Заметим, что $\arcsin$ может принимать значения

$$\text{от } -\frac{\pi}{2}; \text{ до } \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$



а $\arccos$ может принимать значения от $[0; \pi]$

$$\Rightarrow \arccos \frac{y}{4} \in [0; \pi] \Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2} \\ \arccos \frac{y}{4} \leq \pi$$

$$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \text{для любых значений}$$

x и y удовл. ограничения.

$\Rightarrow$ Все р-и. 1-ой системы будут р-и. второй.

Все Р-и. 1-ой - все возможные пары чисел $x; y$ $x \in [-5; 5]$ $y \in [-4; 4] \Rightarrow$ всего таких пар.

$11 \cdot 9 = 99 \Rightarrow$ всего 99 пар, которые удовл. двум системам.

Ответ: 99.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

Для начала заметим, чему равна вероятность попасть Пете и Вове на концерт, если всего будет k -билетов всего, и n -кол. учащихся школы. Будем обозначать ее p_{nk} . Тогда:

$$p_{nk} = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} \leftarrow \begin{array}{l} \text{В и П получили билет} \\ \text{и выбрали остальных} \end{array}$$

$\leftarrow$ Всего возможных выборов k человек, получ. билет.

Пусть всего учащихся $\rightarrow n$, а билетов в конце месяца стало $k \Rightarrow$ вероятность p_2 , которую посчитали П и В в конце, $p_2 = p_{nk}$. При этом, в начале одних $\rightarrow n$, а билетов 4 $\Rightarrow p_1$, посчитанная в начале $\Rightarrow p_1 = p_{n4}$. При этом, по условию: $p_1 \cdot 2,5 = p_2$. Распишем p_{nk} :

$$p_{nk} = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)!}{(n-2-(k-2))!(k-2)!} \cdot \frac{(n-2)!(n-k)! \cdot k!}{n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

Тогда подставим в p_1 и p_2 :

$$p_1 = p_{n4} = \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} \quad p_2 = p_{nk} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \quad p_1 \cdot 2,5 = p_2$$

$$\frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} \cdot 2,5 = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \Rightarrow k^2 - k = 30$$

$$k^2 - k - 30 = 0$$

$$(k-6)(k+5) = 0$$

$\begin{cases} k = 6 \\ k = -5 \end{cases}$ Заметим, что по условию получили больше чем 4 билета $\Rightarrow k > 4 \Rightarrow k = -5$ не подходит $\Rightarrow k = 6 \Rightarrow$ в конце бил. было 6 билетов.

Ответ: 6.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

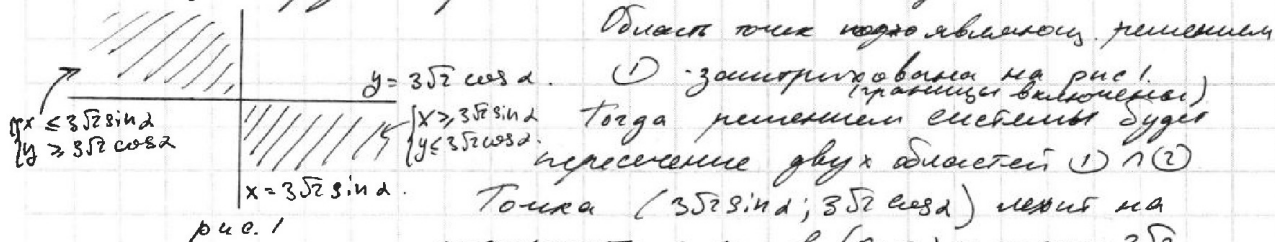
1 из 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

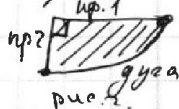
Задача 6.

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0. (1) \\ x^2 + y^2 \leq 25. (2) \end{cases}$$

Заметим, что первая строка ограничивает на координатной плоскости круг с ц. в $(0; 0)$ и радиусом 5. Посмотрим, что ограничивает (1) строка. Пусть x - горизонт. ось и направ. вправо, а y - вертикальная ось, направленная вверх, тогда область, которую ограничивает (1) выглядит так:



Область точек удовлетворяющих решению (1) заштрихована на рис. 1. Тогда решением системы будет пересечение двух областей (1) и (2). Точка $(3\sqrt{2} \sin \alpha; 3\sqrt{2} \cos \alpha)$ лежит на окружности с ц. в $(0; 0)$ и радиусом $3\sqrt{2}$, α - угол поворота от оси x до радиуса-вектора $(3\sqrt{2} \sin \alpha; 3\sqrt{2} \cos \alpha)$. В сегменте будем называть фигуру, которая ограничена двумя перпендикулярными и дугой окружности. (центр дуги и т. пер. прямых лежит в одной полуплоскости от дуги). (точка пер. лежит внутри) Сегменты выглядят так.

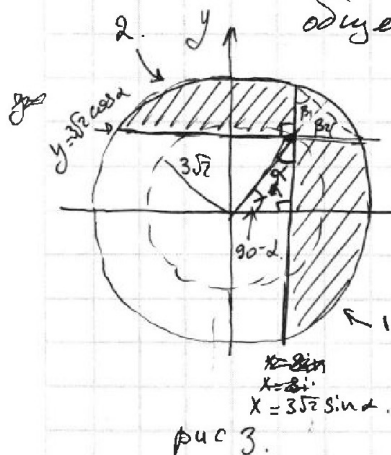


Тогда пересечение (1) и (2) - это объединение двух сегментов с общей точкой $(3\sqrt{2} \sin \alpha; 3\sqrt{2} \cos \alpha)$.

$\Rightarrow$ Но у нас же область картинка будет выглядеть (с точностью до поворота, при другом угле будет выбрана др. точка на окрус. р. $3\sqrt{2}$, но прямые останутся // оси x и y $\Rightarrow \Phi(\alpha)$ - представлена в виде объединения двух таких сегментов.

Пусть сегмент $\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \leq 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$ будет 1, тогда

$\begin{cases} x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \geq 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$ будет 2.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6. продолжение.

M - периметр $\Phi(\alpha)$. За M_1 и M_2 обозначим периметры 1 и 2 сегментов, A_{x_i} и A_{y_i} - длина горизонтальной и вертикальной границей i -ого сегмента. ω_i - длина дуги, огранич. i сегмент.

Далее рассмотрим ω_1 и ω_2 . ~~Рассмотрим~~ Пусть β_1 и β_2 - вписанные углы, опирающиеся на ω_1 и ω_2 (ω_i - дуга 1 сегм.). Т.к. прямые, огранич. сегменты совпадают (границы одного сегмента $\rightarrow$ прямые их соед. $\rightarrow$ авт. содержат границы другого, при этом они имеют общ. точку $(3\sqrt{2}\sin\alpha, 3\sqrt{2}\cos\alpha) \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 = \frac{\pi}{2}$. Тогда d_1 и d_2 - центр. углы, опирающиеся на ω_1 и $\omega_2 \Rightarrow d_1 = 2\beta_1, d_2 = 2\beta_2 \Rightarrow d_1 + d_2 = \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$ $\rightarrow$ $\rightarrow$ Заменим отрезки длины каждой дуги к длине окружности (и через углы тоже): $\frac{\omega_1}{2\pi R} = \frac{d_1}{2\pi} \Rightarrow \frac{\omega_1}{R} = d_1, \frac{\omega_2}{R} = d_2 \Rightarrow \frac{\omega_1}{R} + \frac{\omega_2}{R} = d_1 + d_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{R} = \pi \Rightarrow \omega_1 + \omega_2 = \pi R$

При этом $\omega_1 + \omega_2$ - независит от выбора $\alpha \Rightarrow \omega_1 + \omega_2 = \pi R$ при любых значениях α . Распишем периметр $\Phi(\alpha) =$

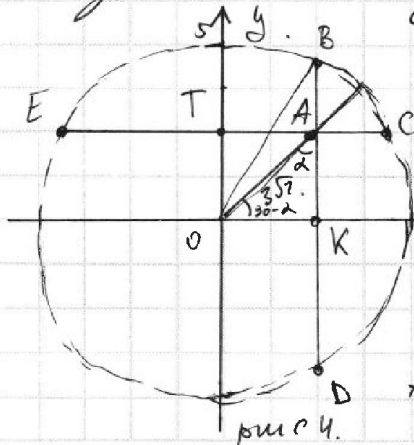
$$M = M_1 + M_2 = A_{x_1} + A_{y_1} + \omega_1 + A_{x_2} + A_{y_2} + \omega_2 = (A_{x_1} + A_{x_2}) + (A_{y_1} + A_{y_2}) + \omega_1 + \omega_2$$

Пусть $A_x = A_{x_1} + A_{x_2}$ - длина гориз. прямой $y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$.

$A_y = A_{y_1} + A_{y_2}$ - длина верт. прямой $x = 3\sqrt{2}\sin\alpha$,

ограниченных окружностью, т.е. длины отрезков, лежащих на этих прямых внутри окружности.

Тогда $M = A_x + A_y + \omega_1 + \omega_2 = A_x + A_y + \pi R$.



Заметим, что для точек полученных из $(3\sqrt{2}\sin\alpha, 3\sqrt{2}\cos\alpha)$ - центр сегм.

поворотом на угол кратный $\frac{\pi}{2}$

значения периметра будет

таким же. $\Rightarrow$ можем рассматривать $\alpha \in [\pi k, \pi k + \frac{\pi}{2}] \quad k \in \mathbb{Z}$.

Пусть $A = (3\sqrt{2}\sin\alpha, 3\sqrt{2}\cos\alpha)$.

Точки T, K, B, C, D, E - опр. на рис. 3.

тогда $A_x = EA + AC = CT + TE = 2CT$

$A_y = BK + KD = 2BK$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☒ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
3 из 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BR = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} \quad CT = \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} = \sqrt{7 + 18 \sin^2 \alpha}$$

$$A_x + A_y = 2BR + 2CT = 2(BR + CT) = 2(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{7 + 18 \sin^2 \alpha})$$

$$\sin^2 \alpha = t \quad 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow A_x + A_y = f(t) = 2(\sqrt{25 - 18t} + \sqrt{7 + 18t})$$

$$f'(t) = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{-18}{\sqrt{25 - 18t}} + 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{18}{\sqrt{7 + 18t}} = 18 \left(\frac{1}{\sqrt{7 + 18t}} - \frac{1}{\sqrt{25 - 18t}} \right)$$

$$\text{Правим } t = \sin^2 \alpha \Rightarrow t \in [0; 1].$$

$$\text{При } t > \frac{1}{2} \quad f'(t) < 0$$

$$t < \frac{1}{2} \quad f'(t) > 0 \quad \text{при } t = \frac{1}{2} \quad f'(t) = 0$$

$$\Rightarrow \text{при } t = \frac{1}{2} \text{ достигаем макс.} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Таким образом, } \alpha \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{При } \alpha = \frac{\pi}{4} \quad M_{\max} &= \pi R + 2(\sqrt{25 - 9} + \sqrt{7 + 9}) = \pi R + 2(\sqrt{16} + \sqrt{16}) = \\ &= \pi R + 2(4 + 4) = \pi R + 16. \quad R = 5 \Rightarrow M_{\max} = 5\pi + 16. \end{aligned}$$

Максимум достигается при поворотах на $45^\circ \rightarrow$
(уже ранее описано) $\Rightarrow$ минимум достигается
 $\Rightarrow$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ответ: } 5\pi + 16; \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \right\}; k \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

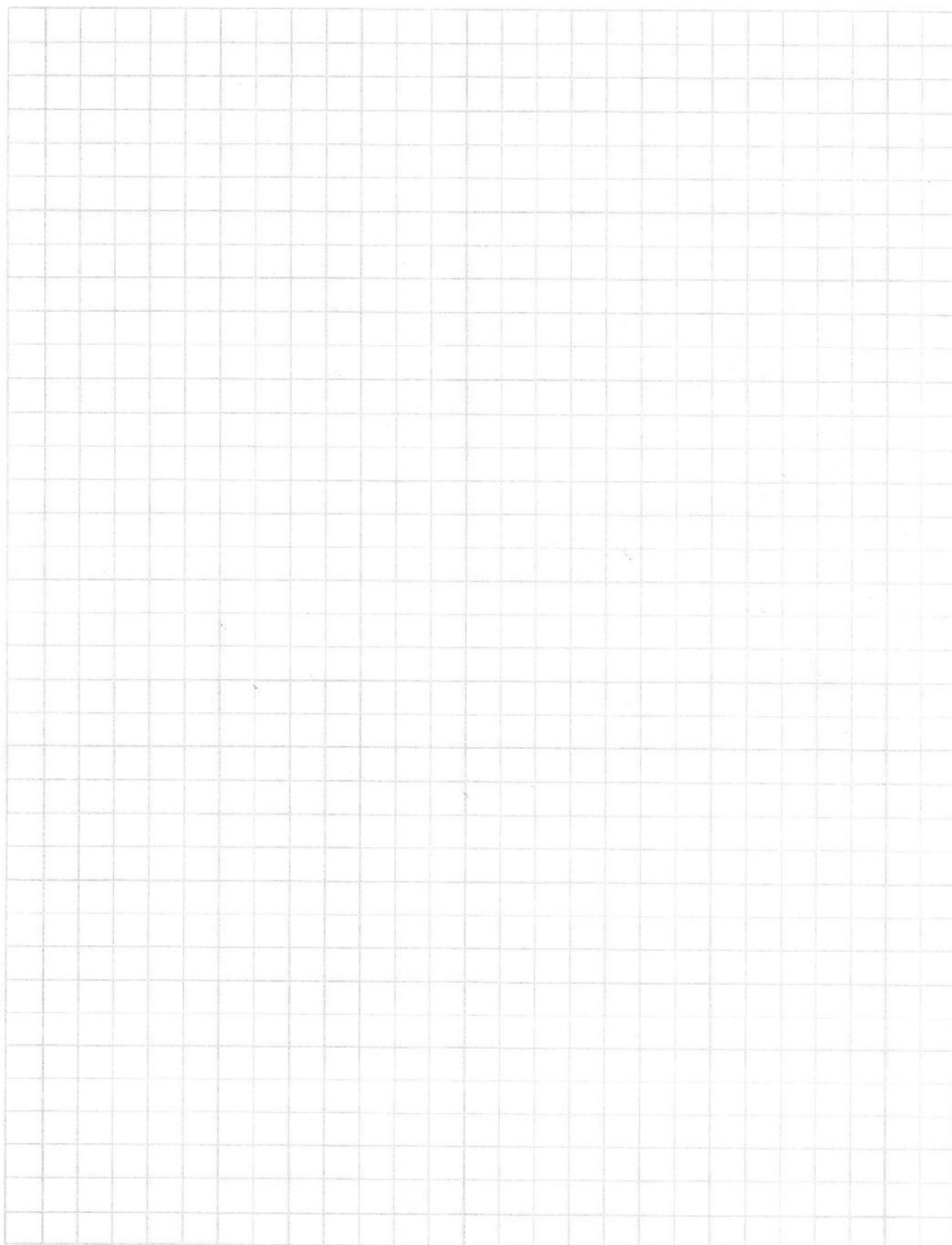
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение.

$n > 4$

Вероятность в начале: $p_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$

Вероятность в конце: $p_2 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$

$p_2 \cdot 2,5 = p_1$

$$p_1 = \frac{\frac{(n-2)!}{2! (n-4)!}}{\frac{n!}{(n-4)! 4!}} = \frac{(n-2)! \cdot (n-4)! \cdot 4!}{2! (n-4)! n!} = \frac{(n-2)! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot n (n-1) (n-2)!} = \frac{4 \cdot 3}{n (n-1)}$$

$$p_2 = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-2-(k-2))! (k-2)!}}{\frac{n!}{(n-k)! k!}} = \frac{(n-2)! (n-k)! \cdot k!}{(n-k)! (k-2)! n!} =$$

$$= \frac{(n-2)! \cdot k!}{(k-2)! n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$4 \cdot 5 = 20$

$$p_1 = \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} = 2,5 p_2 = 2,5 \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$\begin{array}{r} \times 2,5 \\ 120 \\ + 400 \\ \hline 500 \end{array}$$

$$12 = 2,5 k(k-1) \quad 24 = 5k(k-1)$$

$$24 = 5k^2 - 5k$$

$$5k^2 - 5k - 24 = 0$$

$$k = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 24 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = 5 +$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \pi - 3\pi x - \pi y = \pi k \\ \frac{\pi y - \pi x}{2} = \pi k \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - 3x - y = 2k \\ y - x = 2k \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 - 3x - 2k \\ y = x + 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{matrix} x = 4 \\ -5, -3 \end{matrix}$$

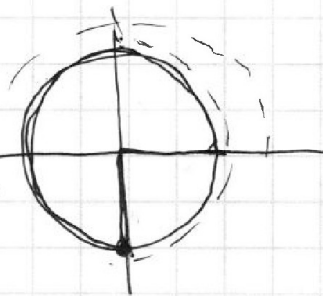
$$A = \sin a \sin b$$

$$A = (\sin b + \sin a) \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \sin b$$

$$B = -(\sin \frac{\pi}{2} - b + \sin \frac{\pi}{2} - a) (-\sin \frac{\pi}{2} - b) = 2 \sin \frac{\pi - a + b}{2} \sin \frac{a - b}{2}$$

$$x, y \in x \in [-5; 5] \text{ и } y \in [-4; 4]$$

все возможные значения



$y = 4$	$x = 4$	$y = 3$	$x = 5$
	$x = 2$		$x = 3$
	$x = 0$		$x = 1$
	$x = -2$		$x = -1$
	$x = -4$		$x = -3$
	$x = -1$		$x = -5$
	$x = -5$		
	$x = -3$		
	$x = 1$		
	$x = 3$		
	$x = 5$		

$$\begin{matrix} \text{все } x: 10 \\ \text{все } x: 11 \end{matrix}$$

$$9 \cdot 11 = 99 \text{ всего.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.

$\Phi(x)$

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

1) $x \leq 3\sqrt{2}$

$$x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$3\sqrt{2} \approx 5$$

$$9 \cdot 2 \approx 25$$

α угол

$$\frac{\omega_1}{2\pi R} = \frac{\alpha_1}{\pi} \quad \frac{\omega_1}{R} = \alpha_1$$

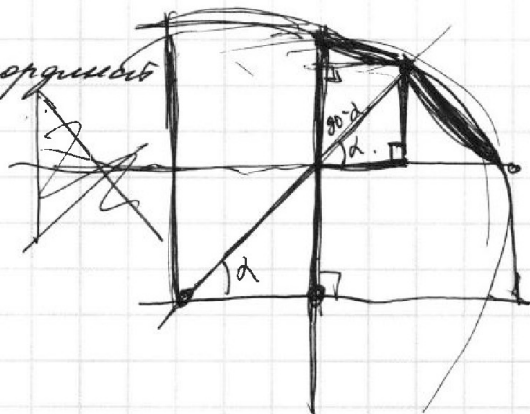
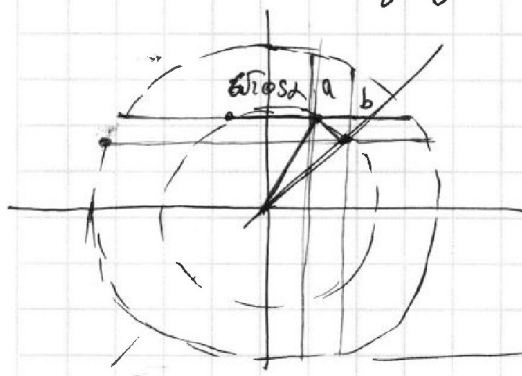
$$\frac{\omega_2}{R} = \alpha_2 \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{R}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \pi \Rightarrow \omega_1 + \omega_2 = \pi R - \text{const.}$$

$\Rightarrow \omega_1 + \omega_2$ не зависит от выбора α .

$\Rightarrow$ только сумма угловых участков меняется.

Рассм. только одну четверть координат



$$\begin{aligned} a \cdot (6\sqrt{2} \sin \alpha + a) &= b(6\sqrt{2} \cos \alpha + b) : (3\sqrt{2})^2 - 25 = \\ &= 18 - 25 = -7 \end{aligned}$$

$$b = (5 - 3\sqrt{2}) \cos \alpha, \quad a = (5 - 3\sqrt{2}) \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} A_x A_x &= 6\sqrt{2} \cos \alpha + 2(5 - 3\sqrt{2}) \cos \alpha = \\ &= \cos \alpha (10 - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}) = 10 \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_y &= 6\sqrt{2} \sin \alpha + 2(5 - 3\sqrt{2}) \sin \alpha = \\ &= \sin \alpha (10 - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}) = 10 \sin \alpha \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\mu_1 = \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} \quad \mu_2 = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$\mu_2 = 2,5 \mu_1$$

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = 2,5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}$$

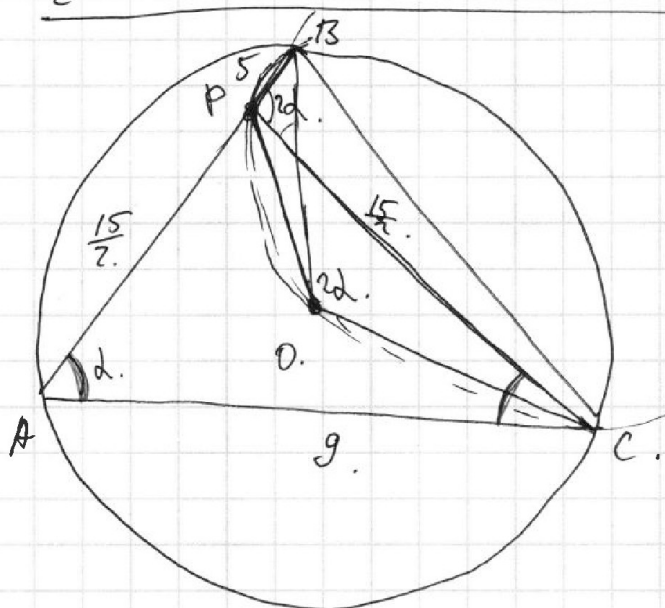
$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 12,5 \\ 35 \\ \hline 610 \\ 240 \\ \hline 30,0 \end{array}$$

$$k^2 - k = 2,5 \cdot 12$$

$$k^2 - k - 30 = 0. \quad (k-6)(k+5) = k^2 + 5k - 6k - 30 = k^2 - k - 30$$

$$(k-6)(k+5) = 0$$

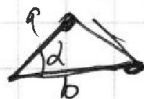
$$\begin{cases} k=6 \\ k=-5 \end{cases} \times \Rightarrow k=6. \text{ Order } 6.$$



$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$AP = CP = \frac{15}{2}$$

$$S = \frac{ab}{2} \cdot \sin d$$



$$\left(\frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 + g^2 - 2 \cdot \cos d \cdot \frac{15}{2} \cdot g$$

$$g^2 = \frac{15}{2} \cdot g \cdot 2 \cos d$$

$$g = 15 \cos d$$

$$\cos d = \frac{g}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\sin d = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}$$

$$0 < d < 90 \Rightarrow \sin d = \frac{4}{5}$$

$$S = \frac{\left(\frac{15}{2} + 5\right) \cdot g}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{(15+10)}{2} \cdot g \cdot \frac{4}{5} = \frac{25 \cdot g \cdot 4}{4 \cdot 5} = 5 \cdot g = 45$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = \underbrace{w_1 + w_2}_{const} + A_x + A_y = w_1 + w_2 + 10(\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot R$$

$$\rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = \sin \alpha + \sin \frac{\pi}{2} - \alpha = 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha + \alpha}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2} =$$

$$\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 2.$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{4} =$$

$$2 \cdot \sin \frac{\pi + \pi}{2} \cos 0 = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos 0 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

$$= \sqrt{2} \cos \alpha - \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha - \frac{\pi}{4} \leq 1.$$

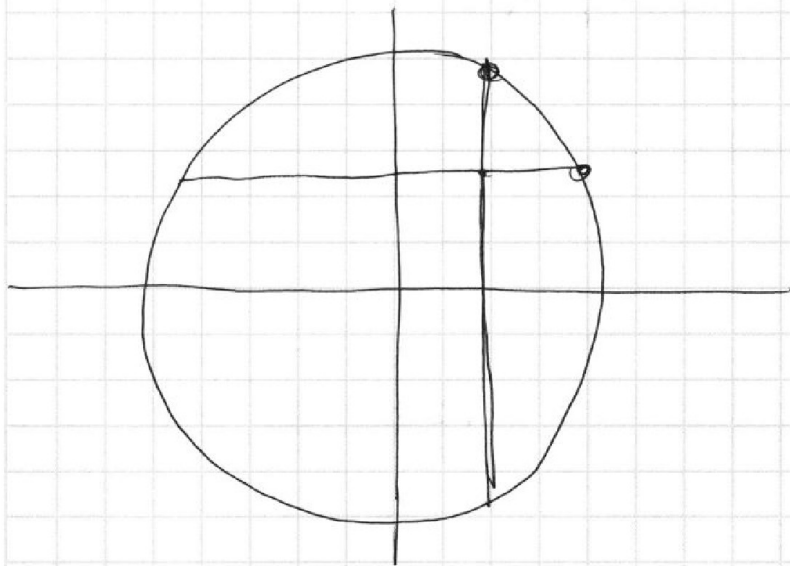
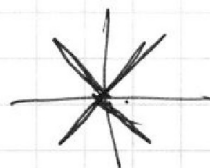
$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

$$B = \sqrt{2}.$$

$$M = w_1 + w_2 + 10B = \pi R + 10\sqrt{2}.$$

$$\text{или } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k.$$

или





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \cdot \pi x = a \quad \pi y = b.$$

$$(\sin a + \sin b) \sin a = (\cos a + \cos b) \cos a.$$

$$\sin^2 a + \sin b \sin a = \cos^2 a + \cos b \cos a.$$

$$-(\cos a \cos b - \sin a \sin b) = \cos^2 a -$$

$$\cos \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} =$$

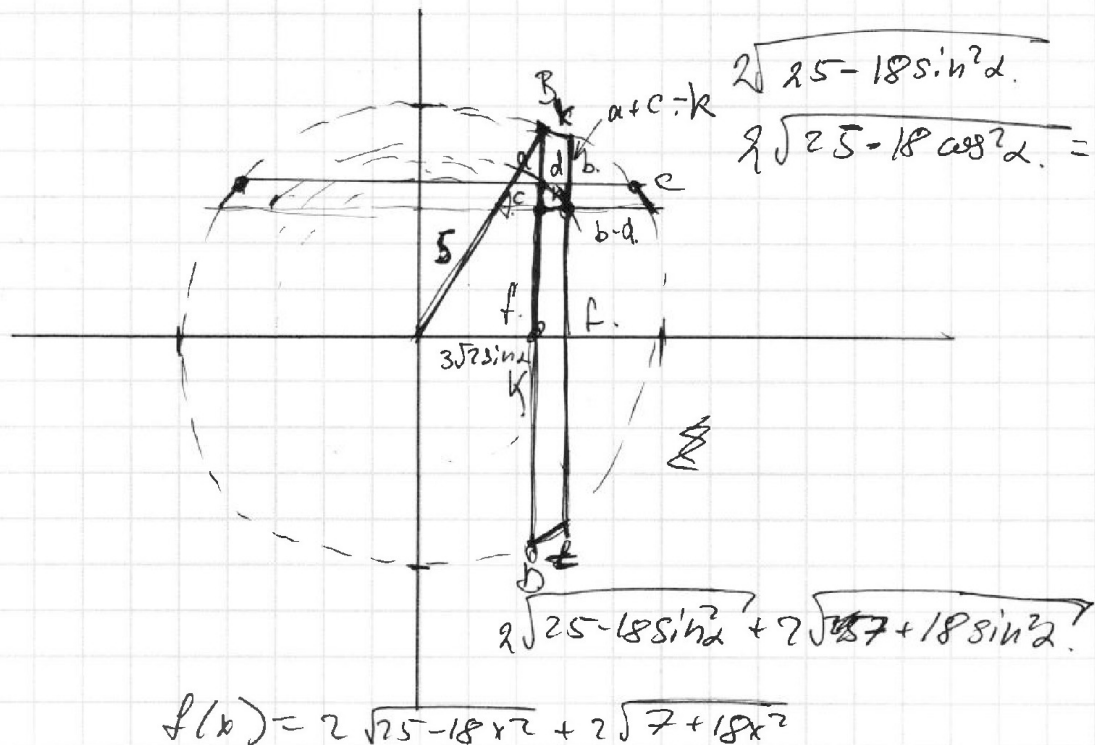
$$= \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} =$$

$$= 0 - 1.$$

$$x \in \text{неч.} \quad \sin \pi x = 0$$

$$\cos \pi x = -1$$

$$0 = (-1 + 1) \cdot (-1) \quad \cos \pi y = 1$$



$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{25-18x^2}} \cdot (-18 \cdot 2x) + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{7+18x^2}} \cdot (18 \cdot 2x) =$$

$$= 18 \cdot 2x \left(\frac{1}{\sqrt{7+18x^2}} - \frac{1}{\sqrt{25-18x^2}} \right)$$

$$x \in (-1; 1) \quad x^2 > \frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{7+9}} - \frac{1}{\sqrt{25-9}} \right) < 0$$

$$x <$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A \ B \ C. \quad A = aaaa = a \cdot 1111.$$

$$B = dbcc.$$

$$C = ef.$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 32 \\ \hline 147 \end{array} \quad *12$$

$$A \cdot B \cdot C = m^2 = a \cdot 1111 \cdot dbcc \cdot ef$$

$$\begin{array}{r} 1011182 \\ \times 2 \\ \hline 202236 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ \times 1111 \\ \hline 35432 \end{array}$$

$$11 \cdot 101 \Rightarrow \begin{cases} dbcc : 11 \\ ef : 11 \end{cases} \quad \begin{cases} dbcc : 101 \\ ef : 101 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} 24 \Rightarrow dbcc : 101 \Rightarrow dbcc \rightarrow \text{коэф } 101 \Rightarrow p = ?$$

$$\Rightarrow B = 202. \Rightarrow 202 : 11 \Rightarrow ef : 11 \Rightarrow ef = 33. \quad C = 33$$

$$\Rightarrow B \cdot C = 202 \cdot 33 = 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11.$$

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot 101^2 \cdot 11^2 = m^2.$$

$$\Rightarrow a = 2^d \cdot 3^p \quad d \geq 1 \quad p \geq 1 \Rightarrow a \geq 6. \quad \text{случ } a \geq 12.$$

$$a = 6 \quad A = 6666. \quad ABC = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2.$$

$$\Rightarrow ABC (6666; 202; 33).$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \quad x, y. \quad (x-1)(y+1) \quad M = x^3 - y^3 - 3xy.$$

$$k = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}.$$

$$k = \frac{x+y+2}{xy} = \frac{(y+1)+(x-1)+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}.$$

$$\textcircled{1} x+y+2=0. \quad x - \text{полож.} \quad xy = (x-1)(y+1).$$

$$\textcircled{2} xy = (x-1)(y+1).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \quad xy = (x-1)(y+1).$$

$$xy = xy + x - y - 1.$$

$$0 = x - y - 1 \Rightarrow x = y + 1. \quad x > 1.$$

$$N = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3xy = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3(y+1)y =$$

$$= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1 \quad \text{Ответ: } N = \{1\}.$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x.$$

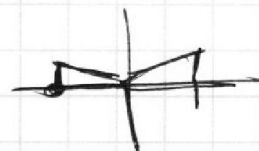
$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x.$$

$$\sin \pi y \cdot \sin \pi x - \cos \pi y \cdot \cos \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x. \quad \pi y = a \quad \pi x = b.$$

$$\sin a \cdot \sin b - \cos a \cos b = \cos^2 b - \sin^2 b.$$

$$- \cos a + b = \cos a b.$$

$$\cos a = \sin \frac{\pi}{2} - a.$$



$$- \sin \frac{\pi}{2} - a = \sin \frac{\pi}{2} - 2b.$$

$$a = a + b.$$

$$\sin \frac{\pi}{2} - 2b + \sin \frac{\pi}{2} - a = 0.$$

или

$$2 \sin \left(\frac{\pi - 2b}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - a - b \right) \sin \left(\frac{\pi - 2b}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - a - b \right) = 0.$$

$$\sin \frac{\pi - 2b + \pi - a - b}{2} \sin \frac{\pi - 2b - \pi + a + b}{2} = 0.$$

$$\sin \frac{\pi - 3b - a}{2} \sin \frac{a - b}{2} = 0.$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi - 3b - a}{2} = 0 \\ \sin \frac{a - b}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\pi - 3b - a}{2} = \pi k \\ \frac{a - b}{2} = \pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$