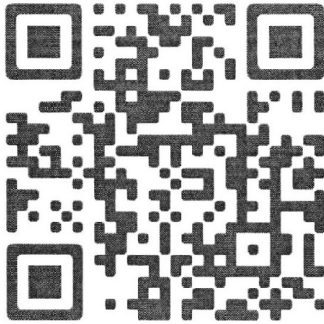
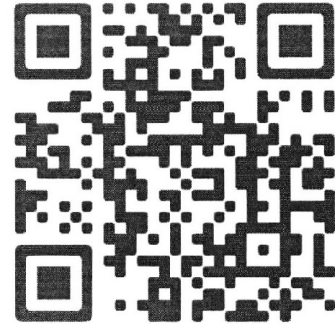




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Если A четырехзначное из одинаковых цифр то

$$A = a \cdot 1111 \quad \text{где } a - \text{однозначное число}$$

$$1111 = 101 \cdot 11 \quad \text{где } 101 - \text{простое} \Rightarrow$$

$$\text{п.к. } ABC - \text{квадрат} \quad \text{то} \quad BC : 101 \Rightarrow$$

$$B : 101 \Rightarrow B = 101 \cdot 6 \quad \text{где } 6 - \text{однозначное. } 6 = 2 \cdot 3$$

$$B \text{ содержит } 2 \Rightarrow B = 202$$

$$C : 11 \Rightarrow C = 11 \cdot c \quad \text{где } c - \text{однозначное} \quad c = 3 \text{ п.к.}$$

$$C \text{ содержит } 3 \Rightarrow C = 33$$

$$\text{тогда } ABC = 1111^2 \cdot 11^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \quad \text{п.к. это}$$

$$\text{квадрат} \quad a : (2 \cdot 3) \Rightarrow a = 6$$

$$\text{Ответ} \quad A = 6666 \quad B = 202 \quad C = 33$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{(x-1)+(y+1)+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} \leftarrow \text{знаменатель одинаковый} \\ \text{а. т.к. } x > 0 \text{ и } y > 0 \text{ по условию} \\ \Downarrow \\ \text{знаменатели равны.}$$

$$\begin{cases} xy = (x-1)(y+1) \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = xy - y + x - 1 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq -1 \end{cases} \begin{cases} y = x - 1 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$x^3 - y^3 - 3xy = x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1) = x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 3x^2 + 3x =$$

= 1

можно достичь при

$$x = 180 \quad y = 179$$

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а)
$$\begin{aligned} & \overset{N3}{(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x} \\ & \sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y \\ & \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \sin \pi y \cdot \sin \pi x - \cos \pi y \cdot \cos \pi x \\ & \cos 2\pi x = -\cos \pi(x+y) \\ & \cos \pi(2x) = \cos \pi(1-x-y) \\ & 2x = \pm(1-x-y) \\ & \begin{cases} 2x = 1-x-y \\ 2x = -1+x+y \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1-3x \\ y = x+1 \end{cases} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пути n элементов $\cdot n$ вероятность начало к-4

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}}$$

пути k элементов $\cdot k$ вероятность после Сопоставим

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-2)(n-3) \dots (n-k+1)}{(k-2)!}}{\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}} = \frac{\frac{1}{(k-2)!}}{\frac{n(n-1)}{k!}}$$
$$= \frac{1}{\frac{n(n-1)}{k(k-1)}}$$
$$2,5 \cdot \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2!}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}} = \frac{1}{\frac{n \cdot (n-1)}{k(k-1)}}$$
$$2,5 \cdot \frac{4!}{2 \cdot n \cdot (n-1)} = \frac{k(k-1)}{n \cdot (n-1)} \Rightarrow k(k-1) = 30 \Rightarrow \boxed{k=6}$$

Ответ: 6



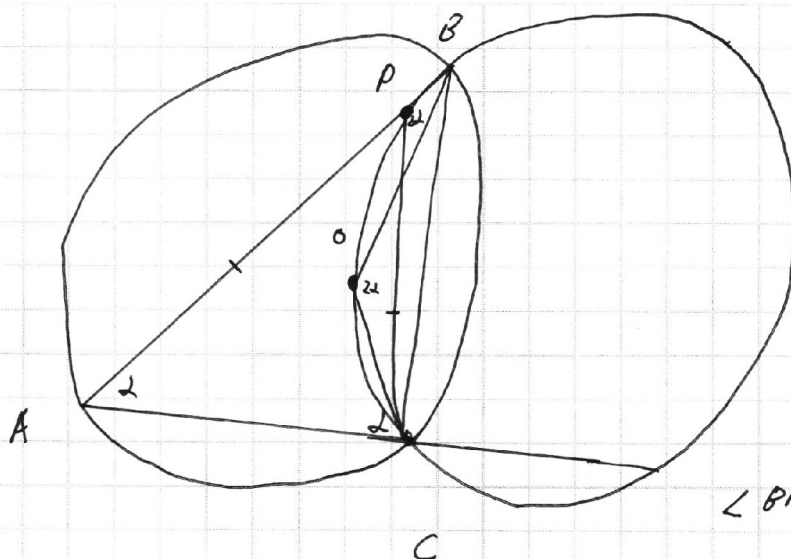
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№ 5

$$\angle A = \angle$$

т.к. O центр $\Rightarrow$

$$\angle BOC = 2\angle$$

также $\angle BOC$ и

$\angle BPC$ опираются

на одну дугу BC

$$\angle BPC = 2\angle \Rightarrow$$

$$\angle BPC = 2\angle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle PCA = \angle \quad \text{т.к. } \angle BPC \text{ внешний} \Rightarrow 2\angle = \angle + \angle \Rightarrow$$

$$PC = \frac{15}{2} \Rightarrow \text{COS применил т. косинусов}$$

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cos \angle APC$$

$$2^2 \cos \angle \cdot 9 \cdot \frac{15}{2} = 9^2$$

$$\cos \angle = \frac{9}{15}$$

$$\sin \angle = \sqrt{1 - \cos^2 \angle} = \sqrt{\frac{144}{225}} = \frac{12}{15}$$

$$S = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \angle}{2} = \frac{\frac{12}{15} \cdot 9 \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right)}{2} = \frac{25 \cdot 9 \cdot 12}{4 \cdot 5} = 5 \cdot 27 =$$

$$= 135$$

Ответ: 135

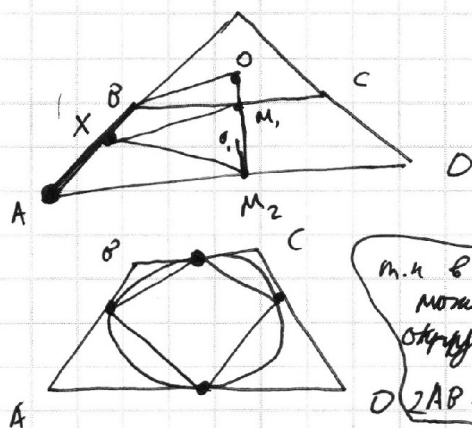


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



посчитаем b/a для 3
члов. $OM_1 = b$

$O, M_2 = a$
 $\tan \angle OBM_2$

$$BM_1 = \sqrt{3}b$$

$$AM_2 = \sqrt{3}a$$

$$AB = \sqrt{3}(a+b)$$

$$M_1M_2 = (a+b) =$$

$$= \sqrt{AB^2 - (AM_2 - BM_1)^2} =$$

$$= \sqrt{3((a+b)^2 - (a-b)^2)} = \sqrt{3 \cdot 4ab} =$$

$$= \sqrt{12ab}$$

т.к. в ABCD
можно вписать
окружность

$$\angle APB = \angle C + \angle D = \sqrt{3}a + b$$

$$a+b = \sqrt{12ab}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 12ab$$

$$a^2 - 10ab + b^2 = 0$$

$$\frac{b^2}{a^2} - 10\frac{b}{a} + 1 = 0$$

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2}$$

$$D = \sqrt{96}$$

можно заметить, что
подойдет только треугольная
пирамида т.к. если 4 или
большее углов то $\angle OBM_2 \geq 45^\circ \Rightarrow$
 $\tan \angle OBM_2 < 1 \Rightarrow AB < M_1M_2$
высота треугольника < бою. стороны,
этого не может быть

подставим в изм. формулу

$$k = 1 + 2\frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} = 1 + 10 - \sqrt{96} + \left(\frac{10 - \sqrt{96}}{2}\right)^2 = 1 + 10 - \sqrt{96} + \left(\frac{100 + 96 - 20\sqrt{96}}{4}\right)$$

$$= 109 - \sqrt{96} - 10\sqrt{96} = 109 - 36\sqrt{6}$$

$$\text{Ответ: } 109 - 36\sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



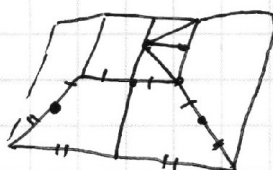
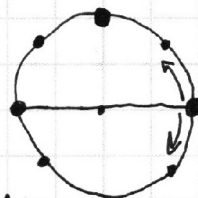
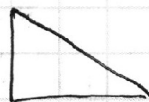
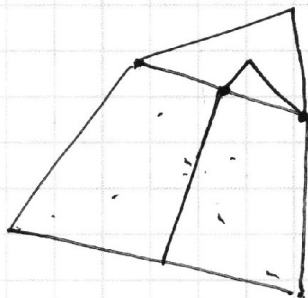


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \cdot 15 \cos 2\alpha + 25 + \left(\frac{15}{2}\right)^2$$

21

$$100 - 4$$

$$\cos 2\alpha \cdot c$$



$$\frac{c}{\sin \alpha} = r$$

$$c^2 = 2r^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} 2 \cos 2\alpha r^2$$

$$1 = \frac{2}{\sin^2 \alpha} - \frac{2(1 - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha}$$

$$1 = \frac{2}{\sin^2 \alpha} - \frac{2}{\sin^2 \alpha} +$$

$$50 + 48$$

99

109

$$\frac{96}{4} = 24 \cdot 4 =$$

$$16 \cdot 6$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$16\sqrt{6}$$

$$\times \frac{16}{9}$$



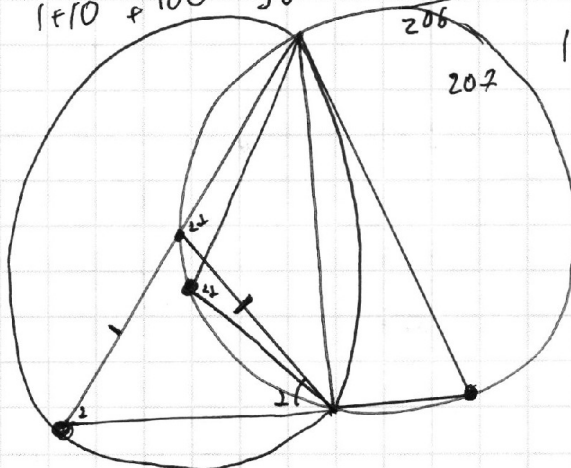
$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 15 \\ \hline 75 \\ 15 \\ \hline 225 \\ - 81 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$c^2 = 2 \cos 2\alpha + 25$$

$$1 + 10 + 100 + 96$$

$$\begin{array}{r} 110 \\ + 96 \\ \hline 206 \end{array}$$

207





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\frac{1}{2} C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-2}^{k-2}}$$

$$+ \frac{(a+b)^2}{a^2}$$

$$\frac{(f(a)-f(b)) \cdot \frac{a+b}{(a-b)}}{b^2 f(a)}$$

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} \cdot 2,5 = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!}$$

$$\frac{(n-2)(n-3) \dots (n-k)}{(k-2)!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots (n-k)}{k!}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{(a+b)(a-b)}{a^2}$$

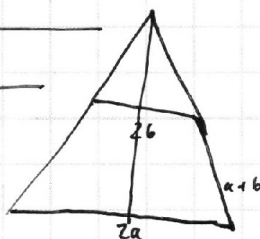
$$\frac{a-b}{a+b}$$

$$\left(1 - \frac{f(b)}{f(a)}\right) \frac{a+b}{(a-b)} = \frac{(a+b)^2}{a^2}$$

$$\frac{1}{4 \cdot 3} \cdot 2,5 = \frac{1 + 2 \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}}{4 \cdot 3}$$

$$\frac{1 \cdot (n-1)}{k \cdot (k-1)}$$

$$\frac{b^2}{a^2} k \cdot (k-1)$$



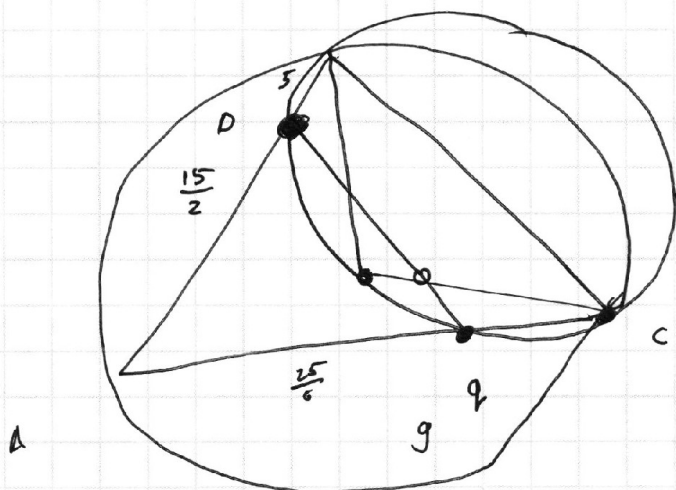
$$k \cdot (k-1) = \frac{1}{4 \cdot 3} \cdot 2,5$$

$$k \cdot (k-1) = 30$$

$$k = 6$$

$$r = b$$

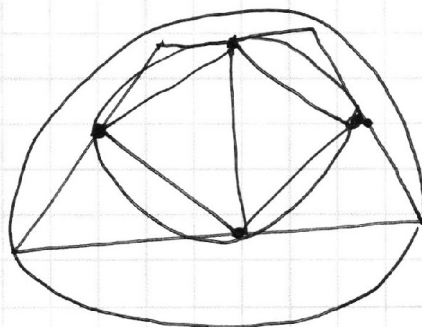
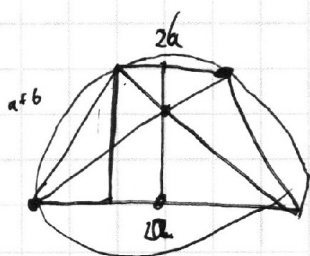
$$h = \sqrt{a^2 - (a-b)^2}$$



$$g \cdot Rq = 25 \cdot 5$$

$$6 \cdot Aq = 25$$

$$Aq = \frac{25}{6}$$



$$h^2 = \frac{a^2 - (a-b)^2}{4ab}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1111 \cdot a = 101 \cdot 11$$

$$-2x = x + y$$

$$b: 101$$

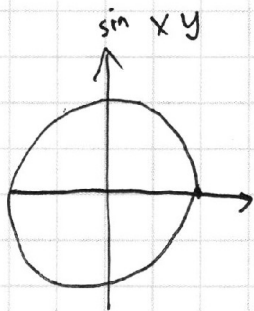
$$-3x = y$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} =$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} =$$

"

$$\frac{y+x+2}{(x-1)(y+1)} =$$



$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy - y + x - 1$$

$$x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1)$$

$$x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 3x^2 + 3x = -1$$

$$(x-1)^2 =$$

$$x^2 - 2x + 1$$

$$x^3 - 2x^2$$

$$y = (-x-2)$$

$$x^3 + (x+2)^3 + 3x(x+2) =$$

$$x^3 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + 3x^2 + 4x$$

$$2x^3 + 9x^2 + 16x + 8$$

$$y = -x-2$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x =$$

$$(\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y$$

$$-\cos(2x) = \cos(x+y)\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черпиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{25}{2} - \frac{15}{2} = 9$

$a^2 + a^2 k^2 - a^2 k \cdot \sqrt{3} = 0$

$4(a+b)^2 = 4a^2 + 8ab + 4b^2$

$\frac{4a^2}{4(a+b)^2}$

48

$S_H = 4a^2$

$S_B = 4(a+b)(a+b)$

$\frac{15^2}{2^2} + \frac{125^2}{12^2} + 2 \cos \angle \frac{15 \cdot 125}{2 \cdot 12}$

$\frac{25^2}{2} + 9^2 + 2 \cos \angle \cdot \frac{9 \cdot 25}{2}$

$\frac{15}{2} = \frac{25}{5} = \frac{3}{5}$

$\frac{12 \cdot 5}{108}$

$(a-b)(a+b)$

$2abk$

$a^2 + b^2 = 4 \cdot \sqrt{3} ab$

$(a+b) = 2 \sqrt{ab \sqrt{3}}$

$(b' + a')^2 - (b' - a')^2 =$

$a+b = 2 \sqrt{6a'}$

$a^7 \sqrt{\frac{3}{2}}$

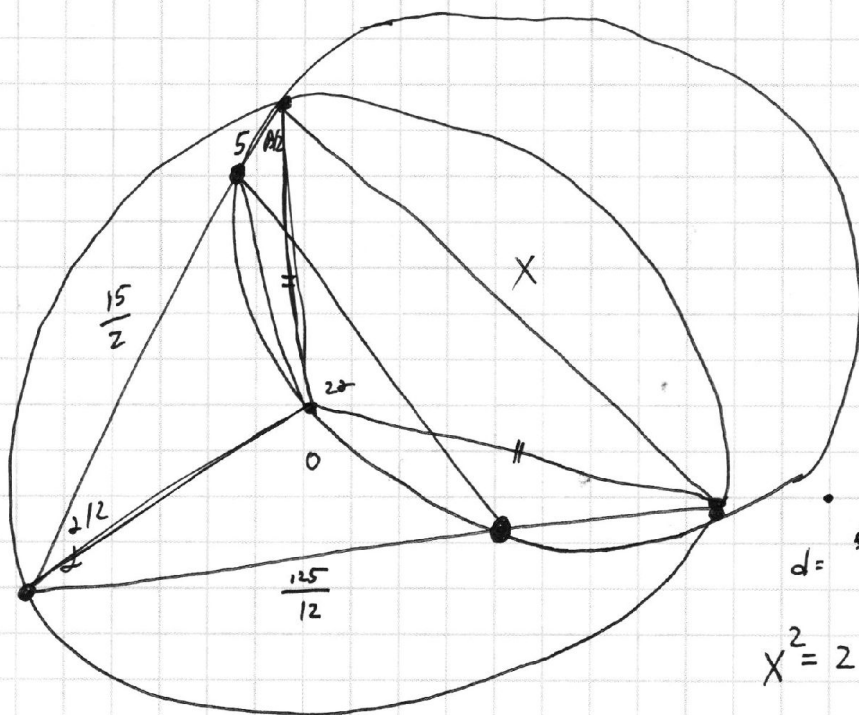


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{15}{2} + 5$$

$$\frac{25}{2} \cdot \frac{15}{2} = 9$$

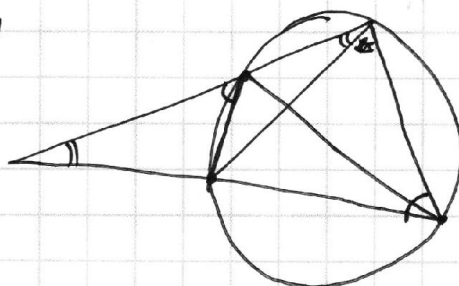
$$4 \cdot 3 = \cancel{125}^3 125$$

$$\frac{125}{12}$$

$$d = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$X^2 = 2 \frac{X^2}{\sin^2 \alpha} - 2 \cos 2\alpha \cdot \frac{X^2}{\sin^2 \alpha}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

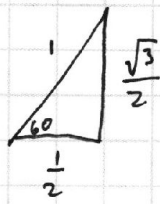


$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

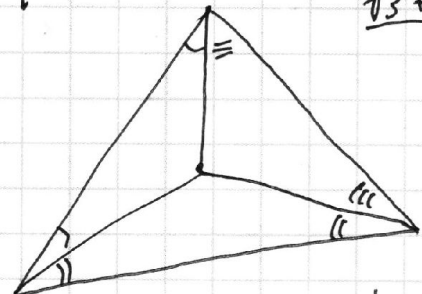
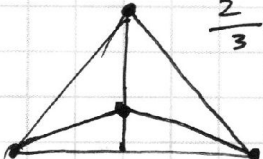
$$\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} =$$



$$\sqrt{3} + 1$$



$$\frac{\sqrt{3}}{2} : 2$$



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$