



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1

$$A = \overline{aaaa}, \text{ где } a \in \mathbb{Z} \text{ и } a \in [1; 9]$$

$$B = \overline{16c}; \overline{61c}; \overline{6c1} \text{ где } c \in \mathbb{Z}$$

$$C = \overline{5d}; \overline{d5}$$

П.ч. число A состоит из одинаковых цифр $\Rightarrow$

$$\Rightarrow A = 1111 \cdot a, \text{ где } a \in \mathbb{Z} \text{ и } a \in [1; 9]. 1111 = 101 \cdot 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 101 \cdot 11 \cdot a$$

Проведение всех трех чисел $A, B, C \Rightarrow$ это возможные
вводятся $\Rightarrow$ простые множители в них входят в
те же степени. Заметим, что т.ч. число C делится

$\Rightarrow$ оно не делится на 101 , значит число A на 101
делится делится $B (B:101)$

Рассмотрим ~~на~~ какие из чисел B и C делится 11
: 11 . Если $B:11$, получаем противоречие т.ч. $B:101 \Rightarrow$
 $B:11$

$\Rightarrow B:1111 \Rightarrow B$ - четырехзначное число. Получаем

а $\in$ безразлично : 11 . Остаток рассмотреть случаи
где может стоять 1 в B и 5 в C :

① Если в B "1" стоит на первом месте $\Rightarrow$

$$B = \overline{16c}, \text{ и т.ч. она } :101 \Rightarrow c=1 \text{ и } 6=0 \Rightarrow B=101$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ⓐ Если в B "1" стоит на 2 месте $\Rightarrow B = \overline{b1c}$, но тогда $B \div 101$, потому что все признаки числа $\div 101$ это: 101, 102, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909. $\Rightarrow$ такая цифра быть не может.

Ⓑ Если в B "1" стоит на 3 месте $\Rightarrow B = \overline{bc1}$, $B \div 101 \Rightarrow b=2 \text{ и } c=0 \Rightarrow B = \underline{101}$

~~Ⓐ~~ Число $C \rightarrow$ трехзначное и $\div 11 \Rightarrow$ цифрами в нем одинаковые, т.к. по условию в C есть хотя бы 1 цифра 5 $\Rightarrow C = 55$

$$A \cdot B \cdot C = \underbrace{1111}_A \cdot \underbrace{101}_B \cdot \underbrace{11 \cdot 5}_C, \text{ так как это было сказано.}$$

Возвращаясь к разложению по простейшим множителям "5" $\rightarrow$ должно быть четное кол-во $\Rightarrow a=5$ т.к.

$$a \in \mathbb{Z}, a \in [1; 9]$$

Ответ: (5555; 101; 55)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xg} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{y+x+1}{(x-3)(y+3)}$$

Значит существует 2 случая равенства:

① $y+x+1=0$, но это невозможно т.к. по условию $x, y \rightarrow$ положительные числа $\Rightarrow y+x+1 > 1$

② $xy = (x-3)(y+3)$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$

$$3x - 3y = 9$$

$$x - y = 3$$

Распишем выражение $K = x^3 - y^3 - 9xy$:

$$x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy \quad \text{③}$$

По нашей задачке $(x-y) = 3 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{③} \quad 3(x^2 + xy + y^2) - 9xy &= 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy = \\ &= 3x^2 - 6xy + 3y^2 = 3(x^2 - 2xy + y^2) = 3(\underbrace{x-y}_3)^2 = \end{aligned}$$

$$= 3 \cdot 3^2 = \underline{27}$$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a)

~3

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y$$

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi x - \pi y) + \cos(2\pi x) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{-\pi x - \pi y}{2}\right) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 1 + 2n \\ y = -x + 1 + 2k \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

Положим $x = t$, где $t \in \mathbb{R}$ (мн.-вы действ. чисел)
Тогда найдем чему равно y :

$$\begin{cases} y = 3t - 1 + 2n \\ y = -t + 1 + 2k \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

$$(t; 3t - 1 + 2n)$$

$$(t; -t + 1 + 2k) \quad \text{где } t \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$?

Заметим, что $\arccos \frac{x}{4}$ и $\arccos \frac{y}{9}$ ~~не~~ могут иметь значения от $[0; \pi]$ $\Rightarrow$ единственно случай когда не выполняется неравенство это если $x = 4$ и $y = -9$
м.мн. мн.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 38 (ураганение)

Знамен численности отсчетов, $\frac{x}{4}$ и $\frac{y}{9}$ являются целыми
 в интервале $[-1; 1]$:

$$-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$$

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$-1 \leq \frac{y}{9} \leq 1$$

$$-9 \leq y \leq 9$$

$$x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \quad y \in \{-9, -8, \dots, 8, 9\}$$

Найдем пары значений уравнению из пункта а):

① $x = -4$:

$$\begin{cases} y = -12 - 1 + 2n \\ y = 4 + 1 + 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -13 + 2n \\ y = 5 + 2k \end{cases}$$

$$-9 \leq 5 + 2k \leq 9 \quad | -5$$

$$-14 \leq 2k \leq 4$$

$$-7 \leq k \leq 2$$

пара $(-4, -9) \rightarrow$ не подходит $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6 \leq k \leq 2 \\ y = 5 + 2k \end{cases}$$

$$y \in \{-7, -5, \dots, 7\}$$

$$-9 \leq -13 + 2n \leq 9 \quad | +13$$

$$4 \leq 2n \leq 22$$

$$2 \leq n \leq 11 \quad \text{но пара } (-4, -9) \rightarrow \text{не подходит} \Rightarrow n \geq 2$$

$$\begin{cases} 3 \leq n \leq 11 \\ y = -13 + 2n \end{cases}$$

$$y \in \{-7, -5, \dots, 7\}$$

$$\text{Если } x = -4 \Rightarrow y = 5 + 2k, k \in [-6, 2] \\ k \in \mathbb{Z}$$

Заметим, что если $x = 2m$ (четное) $m \in \mathbb{Z}, m \in [-2, 2]$, то:

$$\begin{cases} y = 6m - 1 + 2n \\ y = -2m + 2k + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2(3m + n) - 1 \\ y = 2(k - m) + 1 \end{cases} \Rightarrow y \text{ нечетное число.}$$

$$\text{но т.к. } y \in \{-9, -8, \dots, 8, 9\}$$

$$y = -9, -7, \dots, 7, 9$$

пара $(-4, 9)$ не подходит

$$\Rightarrow y = -7, \dots, 7, 9 \text{ для } x = -4$$

$$y = -9, -7, \dots, 7, 9 \text{ для } x \in [-2, 2]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $x = 2b + 1$ (нечетный) $b \in [-1; 1] \quad b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} y = 6b + 3 - 1 + 2n \\ y = -2b - 1 + 1 + 2k \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2(3b + n + 1) \\ y = 2(k - n) \end{cases}$$

$\Rightarrow y$ - четное число
и т.к. $y \in \{-9; -8; \dots; 8\}$

$\Rightarrow y = -8; -6; \dots; 6; 8$

x - нечетный $y \in [-4; 4]$
 y - четный $y \in [-9; 9]$

Итак: а) $(t; 3t - 1 + 2n) \quad t \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{Z}; k \in \mathbb{Z}$

~~$(t; 3t - 1 + 2n)$~~

$(t; -t + 1 + 2k)$

б) $(2m; 2l + 1) \quad m, l \in \mathbb{Z}, m \in [-2; 2], l \in [-5; 4]$
конец парам $(-4; -9)$

$(2p + 1; 2z) \quad p, z \in \mathbb{Z}, p \in [-2; 1], z \in [-4; 4]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В начале мес.	мен-во бил. 4	учеников. x
В конце мес.	4+y	x

Посчитаем вероятность Пети и Васи получить билеты в начале мес.:

Всего способов раздать 4 билета среди x учеников
это: $C_x^4 = \frac{x!}{4!(x-4)!}$

Всего способов раздать сначала 2 билета Пете с Васей, а остальные 2 другим:

$$C_{x-2}^2 = \frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}$$

Вероятность в начале мес: $\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} =$

$$= \frac{(x-2)! \cdot 4!(x-4)!}{2!(x-4)! \cdot x!} = \frac{(x-2)! \cdot 4 \cdot 3}{x!} = \frac{12}{x(x-1)}$$

Теперь посчитаем вероятность в конце мес:

Всего способов раздать 4+y билета x ученикам:

$$C_x^{4+y} = \frac{x!}{(4+y)!(x-4-y)!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего человек раздать скакала 2 бимета Пеме с
Васей, а остальные $2+y$ среди $x-2$ человек:

$$C_{x-2}^{2+y} = \frac{(x-2)!}{(2+y)! (x-4-y)!}$$

Умножая вероятность в конце мес:

$$\frac{\cancel{C_x^{4+y}}^{2+y} C_{x-2}^{2+y}}{C_x^{4+y}} = \frac{(x-2)! (4+y)! \cancel{(x-4-y)!} (x-2)! (4+y)!}{(2+y)! (x-4-y)! \cdot x!} = \frac{(2+y)! 4!}{(2+y)! 4!} =$$

$$= \frac{(4+y)(3+y)}{x(x-1)}$$

По условию вероятность в конце мес. в 3,5
раза больше:

$$3,5 \cdot \frac{12}{(x-1)x} = \frac{(4+y)(3+y)}{x(x-1)}$$

т.к. $x > 2 \Rightarrow$
сократили на $x(x-1)$

$$12 \cdot 3,5 = (4+y)(3+y)$$

$$42 = y^2 + 7y + 12$$

$$y^2 + 7y - 30 = 0$$

$y = -10; 3$, т.к. биметов не может

быть отриц. чис-во $\Rightarrow y = 3 \Rightarrow$ в конце месяца
Бимо выдано $4+3 = 7$ биметов.

Ответ: 7



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Из произвольного Δ -мб APC и CPO ~~мб~~

$$AP = PC = \frac{16}{5} \Rightarrow \Delta APC - \text{пр.} (\text{по опр.})$$

Найдем синус угла BAC :

Проведем $PH \perp AC$ и т.к. $\Delta APC - \text{пр.} \Rightarrow AH = HC = \frac{1}{2}AC$

$$= 2$$

$$\cos \angle BAC = \frac{AH}{AP} = \frac{2 \cdot 5}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

т.к. Δ остроугольный и $\sin, \cos > 0$

$$\begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} \sin \angle BAC \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \left(\frac{16}{5} + 2\right) \cdot 4 = \\ &= \frac{\sqrt{39} \cdot 26 \cdot 4}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{\sqrt{39} \cdot 13}{10} = \frac{13\sqrt{39}}{10} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{13\sqrt{39}}{10}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

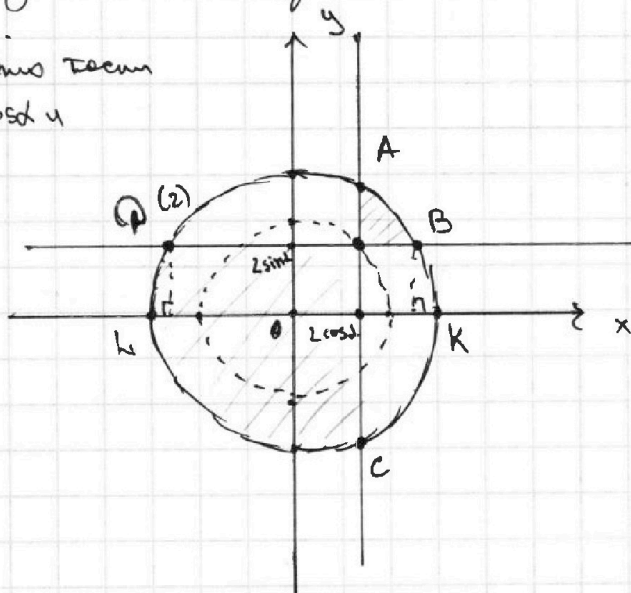
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим произвольный α :

Пусть точки A, C — это точки пересечения прямой $x = 2 \cos \alpha$ и $\text{окр.}(2)$. Точки B, D — это

точки пересечения прямой $y = 2 \sin \alpha$ и $\text{окр.}(2)$.

$L, K \rightarrow$ пересечение осей Ox и $\text{окр.}(2)$.



Т.к. прямая $BD \parallel LK \Rightarrow$ расстояния от точек D и B до прямой LK равны, а значит и дуга $DL = BK$. Аналогично (или в силу симметрии) $AK = KC$, а значит $\text{дуга } DBC + \text{дуга } AB = \text{дуга } LCK$, а дуга LCK равна половине длины $\text{окр.}(2) \Rightarrow \frac{2\pi R}{2} = \frac{2\pi \cdot 3}{2} = \boxed{3\pi}$. Также можно сделать вывод, что сумма дуг $\text{дуга } DBC + \text{дуга } AB$ постоянна для любого α и равна 3π .

Заувидав формулу $P(\alpha)$ я замкнулся на графике. Её периметр складывается из сумм дуг BD и AC , а также дуг DC и AB . Сумму дуг DC и AB уже считали и она всегда равна 3π , осталось считать сумму дуг BD и AC .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~6

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 & (1) \\ x^2+y^2 \leq 9 & (2) \end{cases} \rightarrow \text{с центром в точке } (0,0) \text{ и } R=3$$

$$\textcircled{1} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0$$

Рассмотрим ур-ие $(x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) = 0$, графически это ур-ие будет горизонтальная прямая $y = 2\sin\alpha$, и вертикальная прямая $x = 2\cos\alpha$, они будут пересекаться в точке $(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$. Если вернуться к неравенству, то оно равносильно ~~или~~ совокупности:

$$\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x < 2\cos\alpha \\ y < 2\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

это значит, что точка принадлежит одновременно или внешней прямой $x = 2\cos\alpha$ и $y = 2\sin\alpha$, или внутренней $x < 2\cos\alpha$ и $y < 2\sin\alpha$.



$$\text{Заметим, что } (2\cos\alpha)^2 + (2\sin\alpha)^2 = 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha =$$

$$= 4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4 \Rightarrow \text{все точки лежат на окружности с центром в } (0,0) \text{ и радиусом } R=2.$$

Значит пересечение прямых $x = 2\cos\alpha$ и $y = 2\sin\alpha$ лежит на окр. с центром $(0,0)$ и $R=2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \sqrt{36 - 8 \sin^2 \alpha} = 2 \sqrt{36 - 8} = 2 \sqrt{28} = 4\sqrt{7}$$

значим max суммы этих слагаемых
это $4\sqrt{7}$, при этом рав-во уравнивается при

$$2 \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} = 2 \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$$

$$9 - 4 \sin^2 \alpha = 9 - 4 \cos^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \cos \alpha \\ \sin \alpha = -\cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \cos \alpha + \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2 \cos(\frac{\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{4} - \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k \end{cases} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$M = 3\pi + 4\sqrt{7} \rightarrow \text{его max значение при}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $M = 3\pi + 4\sqrt{7}$ max при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение задачи №6

найдем y -вие ~~ко~~ координаты т. А и т. С:

$$\begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 9 - x^2 = 9 - 4 \cos^2 \alpha$$

$$y = \pm \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$$

Длина отрезка AC, это сумма модулей их y -вие координат (т.е. они лежат на прямой $\parallel OY$)

$$AC = 2 \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$$

найдем длину отрезка BD:

найдем ~~ко~~ x -вие координаты т. В и т. D:

$$\begin{cases} y = 2 \sin \alpha \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 9 - y^2 = 9 - 4 \sin^2 \alpha$$

$$x = \pm \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$

Длина отрезка BD, это сумма модулей их x -вие коорд. (т.е. они лежат на прямой $\parallel OX$)

$$BD = 2 \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$

$$AC + BD = 2 \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} + 2 \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} \leq 2 \sqrt{\frac{4(9 - 4 \sin^2 \alpha) + 4(9 - 4 \cos^2 \alpha)}{2}} \quad \text{①}$$

$$\text{② } 2 \sqrt{36 - 8 \sin^2 \alpha - 8 \cos^2 \alpha} \quad \begin{array}{l} \text{по не-б-у между ср. арифм. и ср.} \\ \text{геом. мет.} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{всего} \\ \text{всего} \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution for a geometry problem involving a triangular pyramid.

Diagram 1 (Top Left): A triangular pyramid with base ABC and apex P . The base is a right triangle with legs $AB = 3$ and $BC = 4$, and hypotenuse $AC = 5$. The height from P to the base is $PO = 3$. The slant height from P to the midpoint of AC is $PM = 5$. The angle between the slant height PM and the base is α .

Diagram 2 (Top Right): A simple triangle ABC .

Diagram 3 (Middle Left): A triangular pyramid with base ABC and apex P . The base is a right triangle with legs $AB = 3$ and $BC = 4$, and hypotenuse $AC = 5$. The height from P to the base is $PO = 3$. The slant height from P to the midpoint of AC is $PM = 5$. The angle between the slant height PM and the base is α .

Diagram 4 (Middle Right): A triangular pyramid with base ABC and apex P . The base is a right triangle with legs $AB = 3$ and $BC = 4$, and hypotenuse $AC = 5$. The height from P to the base is $PO = 3$. The slant height from P to the midpoint of AC is $PM = 5$. The angle between the slant height PM and the base is α .

Diagram 5 (Bottom): A triangular pyramid with base ABC and apex P . The base is a right triangle with legs $AB = 3$ and $BC = 4$, and hypotenuse $AC = 5$. The height from P to the base is $PO = 3$. The slant height from P to the midpoint of AC is $PM = 5$. The angle between the slant height PM and the base is α .

Formulas and Calculations:

$$S = \frac{ABC}{4R}$$

$$\frac{AP}{BO} =$$

$$\cos \beta = \frac{10}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \sqrt{\frac{256 - 100}{256}} =$$

$$= \frac{\sqrt{156}}{16} =$$

$$= \frac{2\sqrt{39}}{16}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{39}}{16} \cdot 4 \cdot \frac{26}{5} = \frac{\sqrt{39} \cdot 13 \cdot 4}{2 \cdot 5} =$$

$$= \frac{13\sqrt{39}}{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В начале 4 см.

всего угл. X

45.

начи

$4+y$

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} =$$



$$C_x^4 = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5$$

5 уг.

2

$\frac{1}{5}$

$$= \frac{(x-2)! \cdot 4! \cdot (x-4)!}{2! \cdot (x-4)! \cdot x!} =$$

$$= \frac{4!}{2! \cdot x \cdot x-1} = \frac{4 \cdot 3}{x(x-1)}$$

$$\frac{(x-2)! \cdot (4+y)! \cdot (x-4-y)!}{(2+y)! \cdot (x-4-y)! \cdot x!} =$$

$$= \frac{(4+y)!}{(2+y)! \cdot (x(x-1))} \quad \begin{matrix} x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{matrix}$$

$$\frac{3,5 \cdot 12}{x(x-1)} = \frac{(4+y)!}{(2+y)! \cdot x(x-1)}$$

$$42 = \frac{(4+y)!}{(2+y)!}$$

$$42 = (4+y)(3+y)$$

$$42 = y^2 + 7y + 12$$

$$y^2 + 7y - 30 = 0$$

$$y = -10, 3 \Rightarrow y = 3$$

3, 10

6, 5
2, 15

$$\frac{35}{40} \cdot \frac{6}{5} = 42$$

$$C_x^4 = \frac{x!}{4! \cdot (x-4)!}$$

$$C_{x-2}^2 = \frac{(x-2)!}{2! \cdot (x-4)!}$$

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} =$$

$$\frac{C_{4+y}^{4+y}}{C_{x-2}^{4+y}} =$$

$$C_{x-2}^{4+y} = \frac{x!}{(4+y)! \cdot (x-4-y)!}$$

$$C_{x-2}^{2+y} = \frac{(x-2)!}{(2+y)! \cdot (x-4-y)!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2\sqrt{9-4a} + 2\sqrt{9-4b} \leq 2\sqrt{\frac{4(9-4a) + 4(9-4b)}{2}} =$$

$$2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$4\cos^2 2 + 4\sin^2 2 = 4 \Rightarrow \text{ay. } (R2)$$

$$\frac{8+4}{2}$$

$$\frac{4+6}{2} \leq \frac{2\sqrt{\frac{16+36}{2}}}{2} = \sqrt{26}$$

$$\frac{2+4}{2}$$

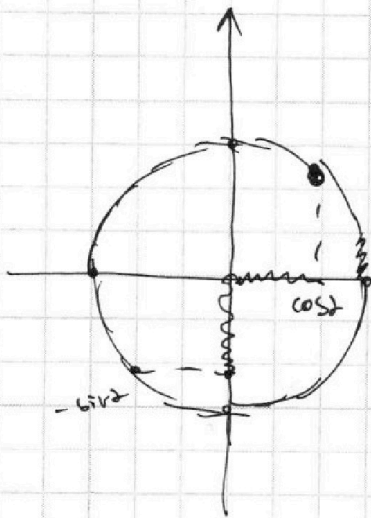
$$\sqrt{\frac{36-16a+36-16b}{2}} =$$

$$\sqrt{36-16a}$$

$$\sqrt{36-8a-8b} =$$

$$\sqrt{36-8} =$$

$$\sqrt{28} \rightarrow 2\sqrt{7}$$



$$\cos 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

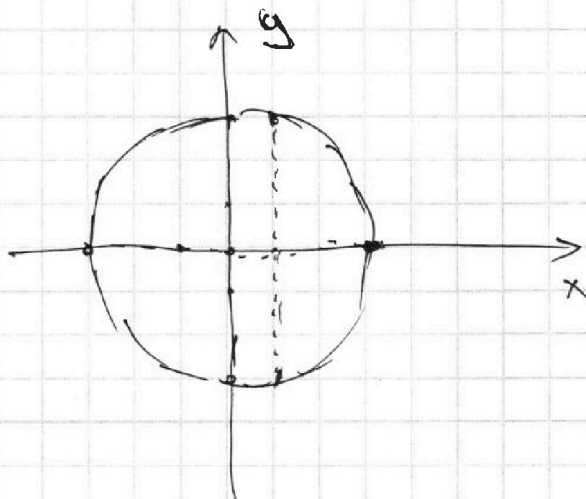
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

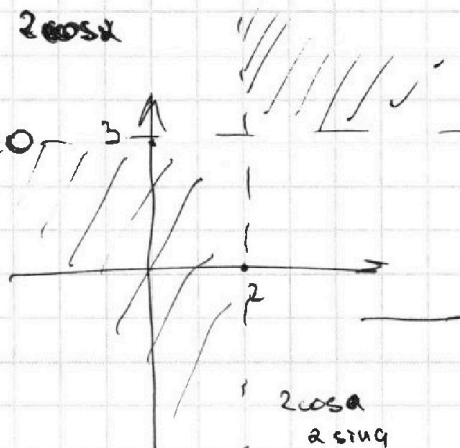
$$\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x < 2\cos\alpha \\ y < 2\sin\alpha \end{cases}$$

$$xy \geq 0$$



$$(x-2)(y-3) \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 3 \\ x < 2 \\ y < 3 \end{cases}$$



$$2\cos\alpha$$
$$2\sin\alpha$$

$$x = 2\cos\alpha$$
$$y = 2\sin\alpha$$

$$4\sin^2\alpha + x^2 = 9$$

$$x^2 = 9 - 4\sin^2\alpha$$

$$x = \pm\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} \Rightarrow$$

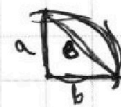
$$a = 2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$$

$$b = 2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$$

$$4\sin^2\alpha = 1 - 4\cos^2\alpha$$

$$2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} = \max$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{1+y+x}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$

$$x - y = 3 \quad x = y + 3$$

$$x^2 - y^2 - 9xy$$

$$(x-3)(x^2+xy+y^2) - 9xy = 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy = 3x^2 - 6xy + 3y^2 =$$

$$= 3(x^2 - 2xy + y^2) = 3(x-y)^2 = 3 \cdot 3^2 = \boxed{27}$$

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \sin \pi y \cdot \sin \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi x - \pi y) + \cos(2\pi x) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{-\pi x - \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3\pi x - \pi y = \pi + 2\pi k$$

$$\pi x - \pi y = \pi + 2\pi k$$

$$-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3$$

$$2x - 13 = 9$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$y = 3 + 1 + 2k$$



$$\arccos\left(\frac{x}{4}\right) + \arccos\left(\frac{y}{3}\right) < 2\pi \quad (1-4)$$

$$-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$$

$$-4 \leq x \leq 4 \quad -3 \leq y \leq 3$$

$$x = -4 \Rightarrow y = 1 + 2k + 4 = 5 + 2k \quad y =$$

$$(0; 0) \cdot =$$

$$(t; 1 + 2k + 4) \quad t \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}$$

$$(t; 3 + 1 + 2n) \quad n \in \mathbb{Z}$$

