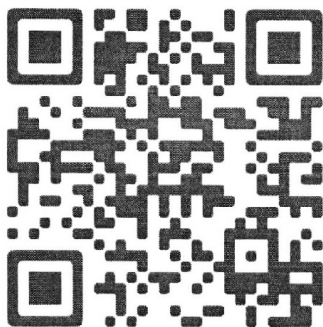




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: (5555; 101; 55)

$$A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$$

11 и 101 - простые числа

$0 < a < 10$, поэтому $A \nmid 11^2$ Значит, $B \cdot C : 101 \cdot 11$.

$$C < 100 < 101 \Rightarrow B : 101 \Rightarrow B$$

а также B - трехзначное

$$\Rightarrow B = k \cdot 101, \text{ где } 0 < k < 10, \text{ т.е. } B = \overline{kok}$$

В коде у B есть 1, поэтому $k = 1 \Rightarrow B = 101$.

$$\& B \nmid 11 \Rightarrow C : 11$$

а также C - двузначное

$$\Rightarrow C = l \cdot 11, \text{ где } 0 < l < 10, \text{ т.е. } C = \overline{ll}$$

у C есть 5, поэтому $l = 5 \Rightarrow C = 55$.

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11 = 5a \cdot 11^2 \cdot 101^2 -$$

это квадрат, поэтому $5a$ тоже квадрат $\Rightarrow$

$$a : 5, \text{ но } 0 < a < 10 \Rightarrow a = 5, \text{ т.е. } A = 5555$$

эта тройка подходит, т.к. $5555 \cdot 101 \cdot 55 =$

$$= 5 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11 = (5 \cdot 11 \cdot 101)^2 = 5555^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$K = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{1}{(x-3)(y+3)} - \frac{1}{xy}\right) = 0$$

$$\frac{3}{x(x-3)} - \frac{3}{y(y+3)} + \frac{xy - xy + 3y - 3x + 9}{xy(x-3)(y+3)} = 0 \quad \left(\cdot xy(x-3)(y+3) \right)$$

$$3y(y+3) - 3x(x-3) + 3y - 3x + 9 = 0 \quad | :3$$

$$y^2 + 3y - x^2 + 3x + y - x + 3 = 0$$

$$y^2 + 4y - x^2 + 2x + 3 = 0$$

квадратное уравнение относительно y .

$$D = 16 + 4x^2 - 8x - 12 = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x-1)^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{-4 \pm 2(x-1)}{2} \Rightarrow y = -2 \pm (x-1)$$

1 случай $y = -2 + x - 1 = x - 3$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) = \underline{x^3} - \underline{x^3} + \underline{9x^2} - \underline{27x} +$$

$$\underline{27} - \underline{9x^2} + \underline{27x} = 27$$

2 случай $y = -2 - x + 1 = -x - 1$

$$M = x^3 + (x+1)^3 + 9x(x+1)$$

при $x > 0$ M монотонно ~~возрастает~~ ~~уменьшается~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итак $y > 0$, т.е. $-x - 1 > 0$. Значит, ~~$x > 0$~~ .
 $x + 1 < 0$, но $x > 0$. Противоречие.

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \left(\pi \frac{x-y}{2} \right) \cos \left(\pi \frac{x+y}{2} \right) \sin \pi x = 2 \cos \left(\pi \frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\pi \frac{x-y}{2} \right) \cos \pi x$$

$$\text{Если } \cos \pi \frac{x+y}{2} = 0, \text{ то } \frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x+y = 1+2k, \text{ т.е. подойдет любая пара}$$

$$(x; 2k+1-x), \text{ где } k - \text{любое целое, } x \in \mathbb{R},$$

$$\text{иначе } \sin \pi \frac{x-y}{2} \sin \pi x = \cos \pi \frac{x-y}{2} \cos \pi x$$

$$\cos \pi \frac{x-y}{2} \cos \pi x - \sin \pi \frac{x-y}{2} \sin \pi x = 0$$

$$\cos \pi \left(\frac{x-y}{2} + x \right) = 0$$

$$\cos \pi \frac{3x-y}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}(3x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3x-y = 1+2l, \text{ т.е. подойдет любая пара}$$

$$(x; 3x-2l-1), \text{ где } l - \text{любое целое, } x - \text{любое действительное.}$$

$$\text{Ответ: } (x; 2k+1-x), \text{ где } x \text{ и } (x; 3x-2l-1),$$

$$\text{где } x - \text{любое действительное, } k, l - \text{любые целые.}$$

$$b) \arccos \frac{x}{y} \leq \pi \text{ и } 0 \leq \arccos \frac{y}{9} \leq \pi.$$

$$\text{А также } -1 \leq \frac{x}{y} \leq 1, \text{ т.е. } -y \leq x \leq y$$

$$-1 \leq \frac{y}{9} \leq 1, \text{ т.е. } -9 \leq y \leq 9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит, $x=4$ и $y=9$ одновременно либо
ни может, иначе $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} = \pi + \pi = 2\pi$,
это равно 2π , а не меньше 2π .

Другими словами

x и $2k+1-x$ разной четности, а также

x и $3k+3x-2l-1$ тоже разной четности,

потому подходит любая пара четных

чисел разной четности, не являющаяся $(4;9)$.

Таких пар, ~~когда~~ x -нечетное, ~~тогда~~ $4 \cdot 9 = 36$.

когда x -четное, но не равно, $5 \cdot 10 - 1 = 49$

одно пара $(4;9)$
не подходит

Всего $36 + 49 = 85$

Ответ: 85.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: 7

Посчитаем вероятность того, что Петя и Вера попадут в концерт, если организовано n классиков и b билетов.

Всего вариантов раздать билеты C_n^b , но подходящих только C_{n-2}^{b-2} , т.е. тогда, когда Петя и Вера получат по билету.

Значит, вероятность $\frac{C_{n-2}^{b-2}}{C_n^b} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)}$.

Тогда вероятность в начале месяца

$$\frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}, \text{ а в конце } \frac{b(b-1)}{n(n-1)}.$$

А также мы знаем, что $3,5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)}$,

поэтому $42 = b(b-1)$, т.е. $b^2 - b - 42 = 0$

Значит, $(b-7)(b+6) = 0$, т.е. $b = 7$ или $b = -6$,

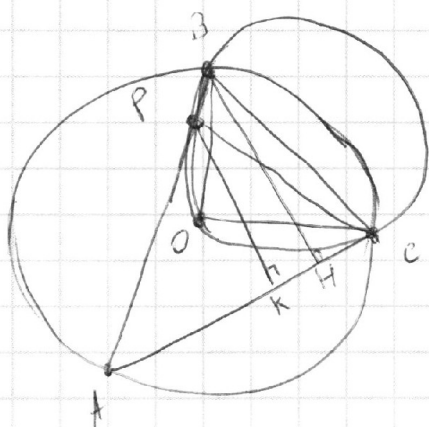
но $b > 4$, поэтому $b = 7$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle BOC = 2 \angle BAC$$

всепротивоположный вписанный

$$\angle BPC = \angle BOC, \text{ т.к. } \angle B, P, O, C$$

на ω_2 .

$$\Rightarrow \angle BPC = 2 \angle BAC \Rightarrow \angle PCA =$$

$$= \angle BPC - \angle PHC = \angle BPC - \angle BAC = 2 \angle BAC - \angle BAC = \angle BAC.$$

$\Rightarrow \triangle HPC$ - равнобедренный.

Пусть PK - высота $\triangle HPC$, а BH - высота $\triangle ABC$.

Тогда $\frac{BH}{PK} = \frac{AB}{AP}$, т.к. $PK \parallel BH$, т.е. $\triangle APK \sim \triangle ABH$.

$$PK = \sqrt{AP^2 - AK^2} = \sqrt{AP^2 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{\sqrt{4AP^2 - AC^2}}{2} =$$

т.к. PK - высота в равнобедренном $\triangle HPC$, т.е. и медиана.

$$= \frac{\sqrt{4 \cdot \frac{16^2}{25} - 16}}{2} = \frac{2}{2} \sqrt{\frac{16^2 - 100}{25}} =$$

$$= \frac{\sqrt{156}}{5} = \frac{\sqrt{4 \cdot 39}}{5} = \frac{2}{5} \sqrt{39}$$

$$BH = PK \cdot \frac{AB}{AP} = \frac{2}{5} \sqrt{39} \cdot \frac{(\frac{16}{5} + 2)}{\frac{16}{5}} = \frac{2}{5} \sqrt{39} \cdot \frac{26}{16} = \frac{13}{20} \sqrt{39}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = 2 \cdot \frac{13}{20} \sqrt{39} = \frac{13}{10} \sqrt{39}$$

Ответ: $\frac{13}{10} \sqrt{39}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

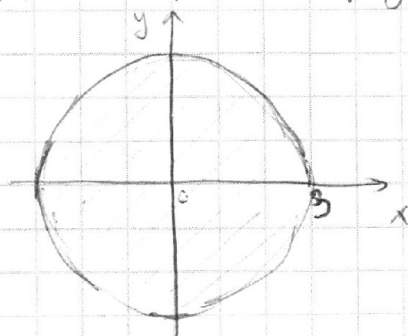
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

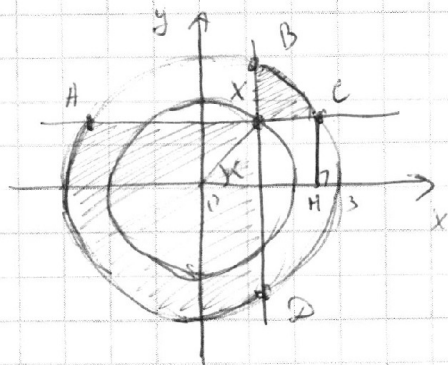
$x^2 + y^2 \leq 9$ означает, что - это круг радиуса 3 в центре координатной плоскости.



$(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0$ значит, что

$x \geq 2\cos\alpha$ и $y \geq 2\sin\alpha$ или $x \leq 2\cos\alpha$ и $y \leq 2\sin\alpha$.

$y = 2\sin\alpha$, $2\cos\alpha$ - это прямые, $y = 2\sin\alpha$ и $y = 2\cos\alpha$ поэтому $\Phi(\alpha)$ - это такая фигура



Также $y = 2\sin\alpha$ и $y = 2\cos\alpha$ пересекаются в одной точке, которая

на окружности радиуса 2 с центром в точке $(0,0)$, α длин

Тогда M равна сумме дуг и отрезков.

Сумма дуг всегда суммируемая, т.к.

$y = 2\sin\alpha \parallel$ оси X , $y = 2\cos\alpha \parallel$ оси Y , прямая равна 3π .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☒ 6

☐ 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим эти отрезки AC и BD ,
пересекающиеся в точке X .

Тогда $\angle AOC = 2$. Посчитаем длину отрезка AC через $\cos \alpha$. Пусть CH — это основание перпендикуляра CH к OX .

Тогда $CH = 2 \cos \alpha$, а по теореме $CH^2 + AC^2 = 9$,
т.е. $AC = 2 \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$. Аналогично, $BD =$
 $= 2 \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$.

Значит, P принимает максимальное
значение тогда, когда $\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$
принимает максимальное значение.

Можно считать, что $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, т.к. для
остальных четвертей аналогично.

$$\text{Для заданных } \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} \leq 2 \sqrt{\frac{9 - 4 \cos^2 \alpha + 9 - 4 \sin^2 \alpha}{2}} =$$

$$= 2 \sqrt{\frac{18 - 4}{2}} = 2 \sqrt{9 - 2} = 2 \sqrt{7} \text{ равенство}$$

в случае $9 - 4 \cos^2 \alpha = 9 - 4 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$,

$$\text{т.е. } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$M = M$ равно

Теперь посчитаем, чему равно фиксированная сумма дуг, т.е. можно взять любое α и посчитать для него.

Значит, M принимает наибольшее значение, равное $3\pi + 4\sqrt{7}$, только при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, где $k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $3\pi + 4\sqrt{7}$ при всех $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, где $k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$y = x - 3$$

$$14 = x^3 - (x-3)^3 - 9(x-3)x = \cancel{x^3} - \cancel{x^3} + \underline{9x^2} - \underline{27x} + \underline{27} - \underline{9x^2} + \underline{27x} = 27$$

$$y = x + 1$$

$$x, y > 0$$

$$y = -x - 1$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ -x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 > x \end{cases} \Rightarrow 1 > x > 0$$

$$x \in (0; 1)$$

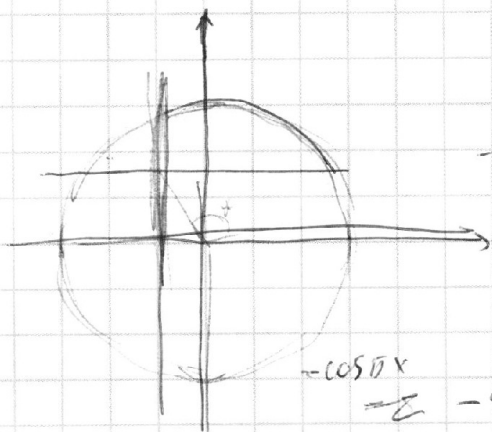
$$M = x^3 + (x+1)^3 + 9x(x+1) = x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 9x^2 + 9x = 2x^3 + 12x^2 + 12x + 1$$

$$6x^2 + 24x + 12 = 6(x^2 + 4x + 2) \quad 6((x+2)^2 - 2) > 0$$

$x > 0$

$$1 \quad 2 + 12 + 12 + 1 = 27$$

$$\sin \pi x -$$



$$-\sin \pi \frac{x+y}{2} \quad \sin \pi x = \cos \pi \frac{x+y}{2} \cos \pi x$$

$$-\sin \pi x \left(\sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{2} + \sin \frac{\pi y}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \right) =$$

$$= \cos \pi x \left(\cos \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{2} - \sin \frac{\pi x}{2} \sin \frac{\pi y}{2} \right)$$

$$-\sin \pi(x+y) \sin \pi x = (2 \cos^2 \frac{\pi(x+y)}{2} - 1) \cos \pi x$$

$\cos \pi(x+y)$

$$-\cos \pi x - \sin \pi(x+y) \sin \pi x = \cos \pi(x+y) \cos \pi x$$

$$-\cos \pi x - \sin \pi x (\sin \pi x \cos \pi y + \sin \pi y \cos \pi x) = (\cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y) \cos \pi x$$

$$-\cos \pi x + \sin^2 \pi x \cos \pi y + \cos^2 \pi x \cos \pi y = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos \pi x + (\cos^2 \pi x + \sin^2 \pi x) \cos \pi y = 0$$

$$\cos \pi x + \cos \pi y = 0$$

$$2 \cos \pi \frac{x+y}{2} \cos \pi \frac{x-y}{2} = 0$$

$$\cos \pi \frac{x+y}{2} = 0$$

$$\pi \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\begin{cases} x+y = 1+2k \\ x-y = 1+2l \end{cases}$$

$$\arccos \frac{x}{y} + \arccos \frac{y}{y} < 2\pi$$

$$\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$$

$$-1 \leq \frac{x}{y} \leq 1$$

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$-9 \leq y \leq 9$$

$$\sin x + \sin(-y) = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = \cos \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right) + \cos \left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right) =$$

$$= \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$x = 11$$

$$3x - 2b - 1 = 11$$

$$\frac{4}{n-2}$$

$$\begin{aligned} n-b+2 &= \\ &= n-3 \end{aligned}$$

$$((n-2)^2 - n + 2)(b^2 - b) =$$

$$= 42 \cdot ((n-b+2)^2 - n + b - 2)$$

$$\begin{aligned} (n-2)^2 b^2 - (n-2)b^2 - b(n-2)^2 - \\ - b(n-2)(b+n-2) + b(n-2) = \end{aligned}$$

$$= 42(n-b+2)^2 + 42(-1) - 42(n-b+2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$7(b+1)(b+2) = r$$

$$(7r-60)n^2 + (2b+1) \cdot 60 +$$

$$(7r-60)n^2 + ((2b+1) \cdot 60 - 35r)n + 42r - 60b(b+1) = 0$$

$$(2b+1) \cdot 60 - 35r)^2 - 4 \cdot (7r-60) \cdot (42r - 60b(b+1)) =$$

$$7(n-2)(n-3)(b+1)(b+2) = 60 \cdot (n-b)(n-b-1) \quad b > 4$$

$$3,5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{(n-3)(n-2)} = \frac{b(b-1)}{(n-b+1)(n-b+2)}$$

$$7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (n-b+1)(n-b+2) = 2b(b-1)(n-2)(n-3)$$

$$1. \quad \begin{array}{cccc} n-b+1: 2 & b & n-3 & b-1 \quad n-2 \\ n-b \neq 2 & & & \end{array}$$

$$42(n-b+1)(n-b+2) = b(b-1)(b^2-b)(n^2-5n+6)$$

$$42(n^2-2nb+n+b^2-3b+2n+2) = b^2(b-1)(n^2-5n+6)$$

$$(42n^2 - 84nb + 42n + 42b^2 - 126b + 84n + 84) = (b^2-b)(n^2-5n+6)$$

$$(x-y \neq -3)$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$-9xy \quad x^3 - y^3 - (x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 9xy = (x-y)^3 + 3xy$$

$$y = -2 + x - 1 = x - 3$$

$$y = -2 - x + 1 = -x - 1$$

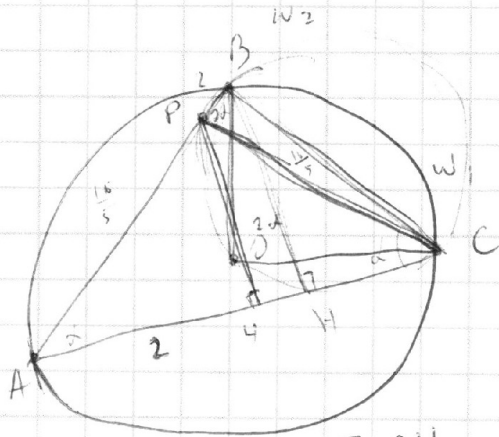


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{16^2}{25} - \frac{100}{25} =$$
$$= \frac{256 - 100}{25} = \frac{156}{25}$$
$$\sqrt{\frac{156}{25}} = \frac{\sqrt{156}}{5}$$

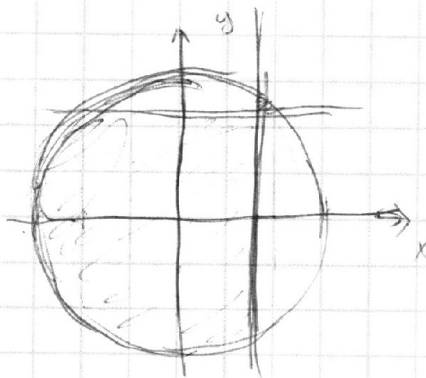
$$\frac{16}{5} : \frac{26}{5} = \frac{\sqrt{156}}{4} \cdot BH$$
$$\frac{16}{5} + \frac{10}{5} = \frac{26}{5}$$

$$\frac{16}{26} = \frac{\sqrt{156}}{4 \cdot BH}$$

$$156 = 6 \cdot 26 = 4 \cdot 39$$

$$BH = \frac{26 \cdot \sqrt{156}}{16 \cdot 4} = \frac{26 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{26}}{16 \cdot 4} = \frac{13 \cdot 2 \cdot \sqrt{39}}{16 \cdot 2} = \frac{13 \cdot \sqrt{39}}{16}$$

$$\frac{13 \sqrt{39}}{8}$$



$$\begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \cos \alpha \\ y \leq 2 \sin \alpha \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$$

нечетное нечетное

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 11 \\ \hline 11 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$C \leq 101 \Rightarrow C \div 101, \text{ но } A \div 101 \Rightarrow B \div 101$$

$$A \div 101^2$$

$$B = k \cdot 101 \Rightarrow B = \overline{k0k} \Rightarrow B = 101$$

$$\Rightarrow B \div 11, A \div 11 \Rightarrow C \div 11 \Rightarrow C = l \cdot 11 \Rightarrow C = \overline{ll}$$

$$\Rightarrow C = 55$$

$$A = a \cdot 11 \cdot 101$$

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 55 = 5a \cdot 11^2 \cdot 101^2$$

$$5a = d^2 \Rightarrow a \div d, \text{ но } a \neq 0 \Rightarrow a = 5$$

$$(5555; 101; 55)$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$k = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} =$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) = \left(1 + \frac{1}{x-3}\right) \left(1 + \frac{1}{y+3}\right)$$

$$\frac{(x+1)(y+1)}{xy} = \frac{(x-2)(y+4)}{(x-3)(y+3)} = \frac{xy - 2y + 4x - 8}{xy - 3y + 3x - 9}$$

$$\frac{3}{x(x-3)} = \frac{3}{y(y+3)} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} - \frac{1}{xy} = \frac{3}{x(x-3)} - \frac{3}{y(y+3)} + \frac{xy - xy + 3y + 3x - 9}{(x-3)(y+3)xy}$$

$$\frac{1}{xy - 3y + 3x - 9}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy \stackrel{?}{=} 0$$

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right)$$

$$x^3 - y^3 - 9xy$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{3}{x(x-3)} - \frac{3}{y(y+3)} - \frac{3x-3y-9}{xy(x-3)(y+3)} = 0$$

$$3y(y+3) - 3x(x-3) - 3x + 3y + 9 = 0$$

$$3y^2 + 9y - 3x^2 + 9x - 3x + 3y + 9 = 0$$

$$3y^2 + 12y - 3x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$y^2 + 4y - x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$x = 16 + 4x^2 - 8x - 12 = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x^2 - 2x + 1) = 4(x-1)^2$$

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$y = \frac{-4 \pm 2(x-1)}{2}$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y)$$

$$-2 \sin \pi \left(\frac{x+y}{2}\right) \cos \pi \frac{(x-y)}{2} \sin \pi x = 2 \cos \pi \frac{(x+y)}{2} \cos \pi \frac{(x-y)}{2} \cos \pi x$$

$$= -2 \pm (x-1)$$

$$-\sin \pi \left(\frac{x+y}{2}\right) \sin \pi x = \cos \pi \frac{(x+y)}{2} \cos \pi x$$

$$n \quad 4 \rightarrow b$$

$$3,5 \cdot \frac{C_n^2}{C_n^4} = \frac{C_n^{b-2}}{C_n^b}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^{k-2} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k+2)!}$$

$$3,5 \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{5 \cdot 6} = \frac{(n-b)(n-b-1)}{(b+1)(b+2)} \cdot \frac{\frac{n!}{(k-2)!(n-k+2)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{(n-k)(n-k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{C_n^{k-2}}{C_n^k}$$

$$7(n-2)(n-3)(b+1)(b+2) = 60 \cdot (n-b)(n-b-1)$$

$$7(b+1)(b+2)(n^2 - 5n + 6) = 60 \cdot (n^2 - (2b+1)n + b(b+1))$$

$$(7(b+1)(b+2) - 60)n^2 + ((2b+1)60 - 7(b+1)(b+2) \cdot 5)n + 42(b+1)(b+2) - 60b(b+1) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{C_n^3}{C_n^4} = \frac{\frac{n!}{3!(n-3)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = \frac{4}{n-3}$$

$$\frac{C_{n-1}^2}{C_{n-1}^3} = \frac{\frac{(n-1)!}{2!(n-2)!}}{\frac{(n-1)!}{3!(n-4)!}} = \frac{3}{n-3} \quad 3,5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{(n-3)^2} = \frac{6(6-1)}{(n-6+1)^2}$$

$$42(n-6+1)^2 = 6(6-1)(n-3)^2$$

$$6 \quad n \quad 2 \quad 0 \quad 0$$

$$\frac{C_{n-2}^{6-2}}{C_n^6} = \frac{\frac{(n-2)!}{(6-2)!(n-6)!}}{\frac{n!}{6!(n-6)!}} = \frac{6(6-1)}{n(n-1)}$$

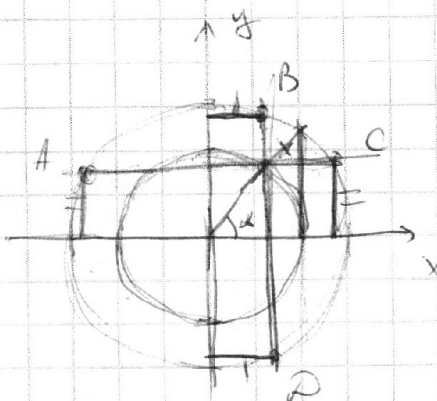
$$3,5 \cdot \frac{12}{n(n-1)} = \frac{6(6-1)}{n(n-1)}$$

$$42 = 6(6-1) \rightarrow 6^2 - 6 - 42 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 42 = 1 + 168 = 169$$

$$6 = \frac{1 \pm 13}{2} \quad 6 = -6$$

$$6 = 7$$



$$\sqrt{9-4\cos^2 x}$$

$$BX \cdot XD = AX \cdot XC$$

$$BD + AC$$

$$2\cos x$$

$$\sqrt{1-4\cos^2 x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$3\sin^2 x + 3$$

$$2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2$$

$$2(\sqrt{3-4\cos^2 x} + \sqrt{3-4\sin^2 x})$$

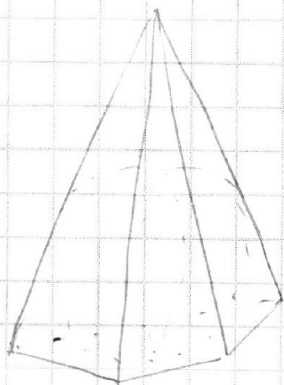


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

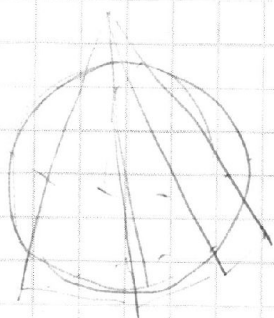
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\alpha = 0$$
$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$3 + \sqrt{9 - 4} = 3 + \sqrt{5}$$

$$3 + \sqrt{5}$$



$$\sqrt{9 - 4 \cos^2 x} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 x} \leq$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$2\sqrt{9} \leq \sqrt{2(9 - 4 \cos^2 x + 9 - 4 \sin^2 x)}$$

$$9 - 4 \cos^2 x = 5 + 4 \sin^2 x$$

$$\sqrt{5 + 4 \sin^2 x} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 x}$$

