



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~если $A \cdot B \cdot C$ является ква~~
Задача 1.

если $A \cdot B \cdot C$ является квадратом натурального числа, то при разложении числа $A \cdot B \cdot C$ на простые множители каждый простой множитель должен входить в четной степени, т.к., если некое число $N = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot p_3^{d_3} \cdot \dots \cdot p_x^{d_x}$ (разложение на простые множители числа N) такое что $N = A \cdot B \cdot C$

$$\text{то } A \cdot B \cdot C = p_1^{2d_1} \cdot p_2^{2d_2} \cdot p_3^{2d_3} \cdot \dots \cdot p_x^{2d_x}.$$

Так как число $A = 1111 \cdot K_A$, где K_A — какая-то из цифр от 1 до 9 включительно

$$\Rightarrow A = 11 \cdot 101 \cdot K_A$$

Отсюда видно, что в разложении числа A на простые множители обязательно входит простой множитель 101 в степени 1 (т.к. $11 < 101$, $K_A \neq 101$, $11 \cdot K_A < 101$)

$\Rightarrow$ для того чтобы ~~при~~ при разложении $A \cdot B \cdot C$ на простые множители ~~на~~ множитель 101 входит в четной степени, необходимо чтобы число B при разложении на простые множители содержало множитель 101 в 1 степени (в степени, большей 1, число 101 входить не может).

(Число C при разложении на простые множители никак не может содержать множитель 101 , т.к. $C < 101$)
поэтому надо чтобы именно B содержало простой множитель 101



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. B должно содержать простой множитель 101 ,
при этом из условия хотя бы одна из цифр
числа B равна 7 , B — трёхзначное

$\Rightarrow B$ обязательно равняется 707 (никому другому
оно равняться не может)

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = \underbrace{11 \cdot 101 \cdot k_A}_{\text{число } A} \cdot \underbrace{101 \cdot 7}_{\text{число } B} \cdot C =$$

$$= 11 \cdot 7 \cdot 101^2 \cdot k_A \cdot C$$

мы видим, что в разложении на простые
множители числа $A \cdot B \cdot C$ входят множители
 $11, 7 \Rightarrow$ аналогично 11 и 7 (каждое из них)
должно входить в четной степени.

Это выполняется если $k_A = 1$, при этом $C = 11 \cdot 7 = 77$
(данный вариант не годится, т.к. по условию
число C должно содержать цифру 1)

Также выполняется при $k_A = 4$, тогда $C = 11 \cdot 7 = 77$
(снова не подходит)

если $k_A = 7$, то $C \equiv 11$ из всех нам подходит
только $C = 11$ из условия,
что C должно содержать цифру 1 .
(Таким образом мы нашли тройку чисел (A, B, C)
 $(7777; 707; 11)$)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

если $k_A = 9$, тогда $C = 11 \cdot 7 = 77$, что снова не подходит

если $k_A = 2; 3; 5; 6; 8$, то число k_A не содержит множителей 11 и 7 , тогда эти множители должны будут содержать число C (т.е. C должно делиться на 77).

А $C = 77$ нам снова не подходит по условию,

Таким образом, нам подходит только одна тройка:

$(7777; 707; 11)$

Ответ: $(7777; 707; 11)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}$$

ОДР: $x \neq 0, y \neq 0$.

Т.к. если x увеличить на 4, y ~~увеличить~~ увеличить на 4, то значение не поменяется

$$\Rightarrow \frac{x+y+3}{xy} = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$1) \begin{cases} x+y+3=0 \\ xy \neq 0 \\ (x-4)(y+4) \neq 0 \end{cases}$$

условию

такой случай не подходит, т.к. если $x+y+3=0$, то $x+y=-3$ это невозможно, т.к. по числам x и y положительные

$$2) \Rightarrow x+y+3 \neq 0$$

$$\begin{cases} xy = (x-4)(y+4) \\ xy \neq 0 \end{cases}$$

$xy \neq 0$ ни при каких положительных x и y .

$$\Rightarrow xy = (x-4)(y+4)$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$4x = 4y + 16 \Rightarrow x = y + 4$$

Тогда $M = x^3 - y^3 - 12xy = (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4) \cdot y =$

$$= y^3 + 3 \cdot y^2 \cdot 4 + 3 \cdot y \cdot 4^2 + 4^3 - y^3 - 12y^2 - 48y = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y = 64$$

Ответ: 64.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \cdot \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin \pi y \cdot \sin \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos \pi y \cdot \cos \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$- \cos \pi x \cdot \cos \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos \pi y \cdot \cos \pi y - \sin \pi y \cdot \sin \pi y$$

$$- \cos(\pi x - \pi y) = \cos(\pi y + \pi y)$$

$$\cos(2\pi y) + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

По формуле $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \cos\left(\frac{y-x}{2}\right)$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi y + 2\pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi y - 2\pi y}{2}\right) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x - 3\pi y}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi x - 3\pi y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi x - 3\pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

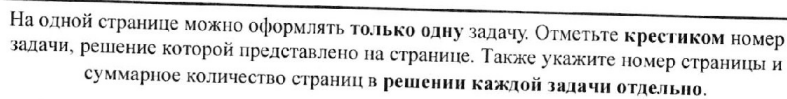
$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x-3y}{2} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x+y = 1+2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x-3y = 1+2k, k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ для любой пары (x, y) , для которой
либо $x+y$, либо $x-3y$ является
целым нечётным числом (возможна
(отрицательные числа $-1, -3, \dots$ подходят)



СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и $\arccos \cos \frac{x}{7} \geq 0$ для любого допустимого x .

в свою очередь, $\arcsin_{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{y}{4}\right)$ определён при $-4 \leq y \leq 4$
и $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin_{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{y}{4}\right) \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \arccos\left(\frac{x}{7}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) \geq -\frac{\pi}{2} \quad \text{при любых допустимых значениях } x \text{ и } y.$$

При этом равенство достигается только
когда $\arccos \frac{x}{7} = 0$ и $\arcsin \left(\frac{y}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$ одновременно
 $\Rightarrow \sin \frac{x}{7} = 1$ $\cos y = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{2x} + \frac{x}{2} = 1 \\ \frac{y}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

Пара $(7; 4)$ является решением исходного уравнения. Тогда для того чтобы получить итоговый ответ, необходимо посчитать число всех пар-решений $(x; y)$, $-7 \leq x \leq 7, -4 \leq y \leq 4$, вычесть из этого количества количество совпадений таблицы.

[illegible][illegible]



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В серию корней $x+y=1+2n, n \in \mathbb{Z}$ подходит те пары $(x; y)$, в которых x - чётное число, y - нечётное; или x - нечётное, y - чётное.

Аналогично в серию корней $x-3y=1+2k, k \in \mathbb{Z}$ входят пары, где x и y имеют разную чётность.

Легко видеть, что в ответ подходит ~~74~~ ⁷⁴ пар значений.

Ответ : а) все пары $(x; y)$, для которых
$$\begin{cases} x+y=1+2n, n \in \mathbb{Z} \\ x-3y=1+2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) 74.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

Найдём вероятность того, что Петя попал на концерт в начале месяца.

Кол-во различных способов раздать билеты единичадытиклассникам, если их всего X штук равно $\frac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$, т.к. нам не важен порядок ~~разда~~ билетов.

Кол-во различных способов раздать билеты единичадытиклассникам, которых всего X человек так, чтобы один из билетов достался Пет^е, ^{един-васе} равно: $1 \cdot \frac{1 \cdot \cancel{X} \cdot (X-2) \cdot \cancel{(X-3)}}{\cancel{4} \cdot 2 \cdot 1}$, так как нам не важен порядок билетов.

$\Rightarrow$ вероятность события A (Петя ^{и Вася} попал на концерт в начале месяца)

$$\text{равна } P(A) = \frac{1 \cdot \frac{1 \cdot \cancel{X} \cdot (X-2) \cdot \cancel{(X-3)}}{\cancel{4} \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{X(X-1) \cdot (X-2)(X-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{4 \cdot 3}{X(X-1)} = \frac{12}{X(X-1)}$$

вероятность того, что Вася попал на концерт в начале месяца такая же, как и вероятность того, что Петя попал на концерт.

Пусть в конце месяца было выделено m билетов ($m > 4$).

Найдём в этом случае вероятность того, что и Петя и Вася попадут на концерт.

Кол-во различных способов раздать билеты единичадытиклассникам, если их всего X , равно



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$C_m^x = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-m+1)}{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \dots 1}$$

кол-во различных способов раздать билеты одноклассникам, которых всего x человек, один из билетов достанется Пете, один-васе, равно:

$$1 \cdot 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)\dots(x-m+1)}{(m-2) \cdot (m-3) \dots 1}$$

$\Rightarrow$ вероятность события B (Петя с Васей попали на концерт в конце месяца)

равна
$$P(B) = \frac{1 \cdot 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)\dots(x-m+1)}{(m-2)(m-3)\dots 1}}{\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1)}{m(m-1)(m-2)\dots 1}} =$$

$$= \frac{m \cdot (m-1)}{x(x-1)}$$

По условию $11 \cdot P(A) = P(B)$

$$\frac{11 \cdot 12}{x(x-1)} = \frac{m(m-1)}{x(x-1)}$$

Т.к. $x \neq 0, x \neq 1$

$$11 \cdot 12 = m(m-1)$$

$$132 = m^2 - m \Rightarrow m^2 - m - 132 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-132) = 1 + 528 = 529 = 23^2$$

$$m_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{23^2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 23}{2} = -11; 12.$$

Нам подходит только $m=12$ (отрицательный m быть не может)

Ответ: 12.



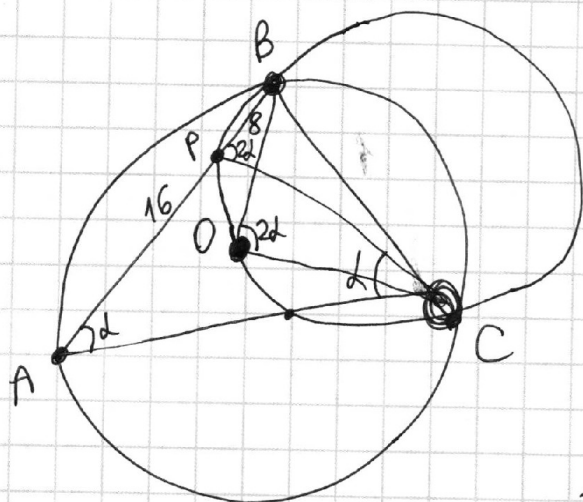
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.



Обозначим $\angle BAC = \alpha$.

Тогда $\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 2\alpha$
(т.к. центральный угол
для окружности ω_1
в 2 раза больше
вписанного)

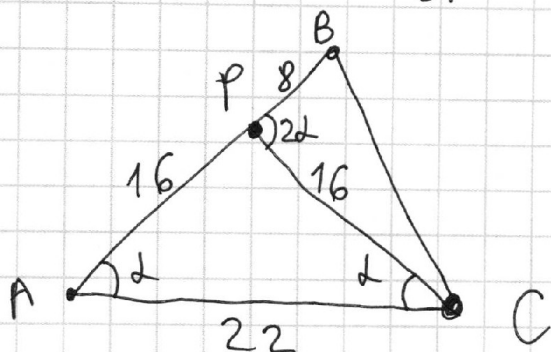
$\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$
(т.к. опираются на
1 дугу окружности ω_2)

Т.к. внешний угол равен сумме
двух внутренних несмежных с ним
 $\Rightarrow \angle BPC = \angle PAC + \angle PCA$

$$2\alpha = \alpha + \angle PCA \Rightarrow \angle PCA = 2\alpha - \alpha = \alpha.$$

Т.к. $\angle PAC = \angle PCA = \alpha \Rightarrow \triangle PCA$ является
равнобедренным с основанием AC.

$$\Rightarrow PA = PC = 16.$$



По теореме косинусов
в $\triangle APC$:

$$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2 \cdot AP \cdot PC \cdot \cos \angle APC$$

$$22^2 = 16^2 + 16^2 - 2 \cdot 16 \cdot 16 \cdot \cos \angle APC$$

$$484 = 256 + 256 - 512 \cos \angle APC$$

$$484 = 512 - 512 \cos \angle APC$$

$$484 + 512 \cos \angle APC = 512$$

$$512 \cos \angle APC = 512 - 484$$

$$512 \cos \angle APC = 28 \Rightarrow \cos \angle APC = \frac{28}{512} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \frac{7}{128} \Rightarrow \cos(180^\circ - \angle APC) = \cos(\angle BPC) = -\cos \angle APC = -\frac{7}{128}$$

По теореме косинусов в $\triangle BPC$:

$$\begin{aligned} BC^2 &= PB^2 + PC^2 - 2 \cdot PB \cdot PC \cdot \cos \angle BPC = \\ &= 8^2 + 16^2 - 2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot \left(-\frac{7}{128}\right) = 64 + 256 + 14 = 334 \\ BC &= \sqrt{334} \end{aligned}$$

По теореме косинусов в $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle \\ (\sqrt{334})^2 &= 24^2 + 22^2 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cdot \cos \angle \end{aligned}$$

$$334 = 576 + 484 - 1056 \cos \angle$$

$$334 = 1060 - 1056 \cos \angle$$

$$1056 \cos \angle = 1060 - 334$$

$$1056 \cos \angle = 726 \Rightarrow \cos \angle = \frac{726}{1056} = \frac{363}{528} = \frac{121}{176} = \frac{11}{16}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \sin \angle &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle} = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{16^2 - 11^2}{16^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{(16+11)(16-11)}}{16} = \frac{\sqrt{27 \cdot 5}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \\ &= \frac{24 \cdot 22 \cdot 3\sqrt{15}}{2 \cdot 16} = \frac{24 \cdot 22 \cdot 3\sqrt{15}}{2 \cdot 16} = \frac{3 \cdot 11 \cdot 3\sqrt{15}}{2} = \frac{99\sqrt{15}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{99\sqrt{15}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$ длина дуги AB + длина дуги EC равна половине периметра всей окружности, радиуса 6.

$$P_{\text{всей окружности}} = 2\pi \cdot 6 = 12\pi$$

$$\Rightarrow P_{AB} + P_{EC} = 6\pi.$$

$$\Rightarrow P_{\text{всей фигуры}} = P_{AB} + P_{EC} + P_{AD} + P_{DB} + P_{DE} + P_{CD} =$$

$$= 6\pi + AE + BC = 6\pi + \sqrt{36 - 16\cos^2 x} + \sqrt{36 - 16\sin^2 x}$$

$$+ \sqrt{(2 \cdot \sqrt{36 - 16\cos^2 x})^2 + 0^2} + \sqrt{0^2 + (2 \cdot (\sqrt{36 - 16\sin^2 x}))^2} =$$

$$= 6\pi + 2 \cdot \sqrt{36 - 16\cos^2 x} + 2 \cdot \sqrt{36 - 16\sin^2 x}$$

Найдём наибольшее значение

$$\sqrt{36 - 16\cos^2 x} + \sqrt{36 - 16\sin^2 x}$$

$$\sqrt{36 - 16\cos^2 x} + \sqrt{36 - 16\sin^2 x}$$

$$\sqrt{36 - 16\cos^2 x} + \sqrt{36 - 16\sin^2 x}$$

Таким образом мы найдём угол x , при котором будет наибольший периметр.

Для случаев $\cos x \leq 0, \sin x \leq 0; \cos x \geq 0, \sin x \leq 0; \cos x \leq 0, \sin x \geq 0$ делается аналогично.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

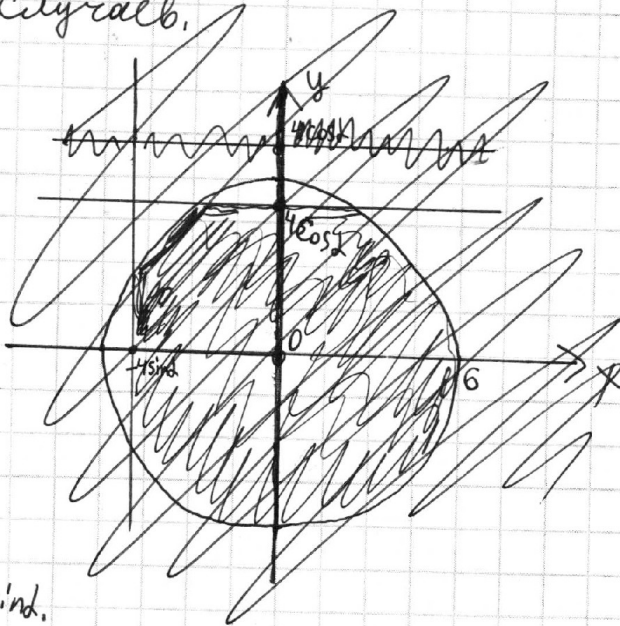
$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

Рассмотрим несколько случаев.

1) $\cos\alpha \geq 0, \sin\alpha \geq 0$.

Тогда

второе уравнение является уравнением окружности с центром в точке $(0;0)$, первое неравенство разбивает плоскость на 4 части



2) прямые: $y = 4\cos\alpha, x = -4\sin\alpha$.

Методом областей получаем, что неравенство $x^2 + y^2 \leq 36$ выполняется для всех $(x; y)$, которые лежат внутри круга, решением первого неравенства служат все точки, при которых

$$\begin{cases} x \geq -4\sin\alpha \\ y \leq 4\cos\alpha \\ x \leq -4\sin\alpha \\ y \geq 4\cos\alpha \end{cases}$$

Заштрикуем общие точки, являющиеся решением и первого неравенства, и второго.

Так как $(-4\sin\alpha)^2 + (4\cos\alpha)^2 = 16\sin^2\alpha + 16\cos^2\alpha = 16(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 16$

т.к. R окружности $= 6$ $\Rightarrow$ расстояние от точки $(0;0)$ до пересечения прямых $y = 4\cos\alpha$ и $x = -4\sin\alpha$ равно 4.

$4 < 6 \Rightarrow$ прямые $y = 4\cos\alpha$ и $x = -4\sin\alpha$ будут пересекаться внутри окружности.

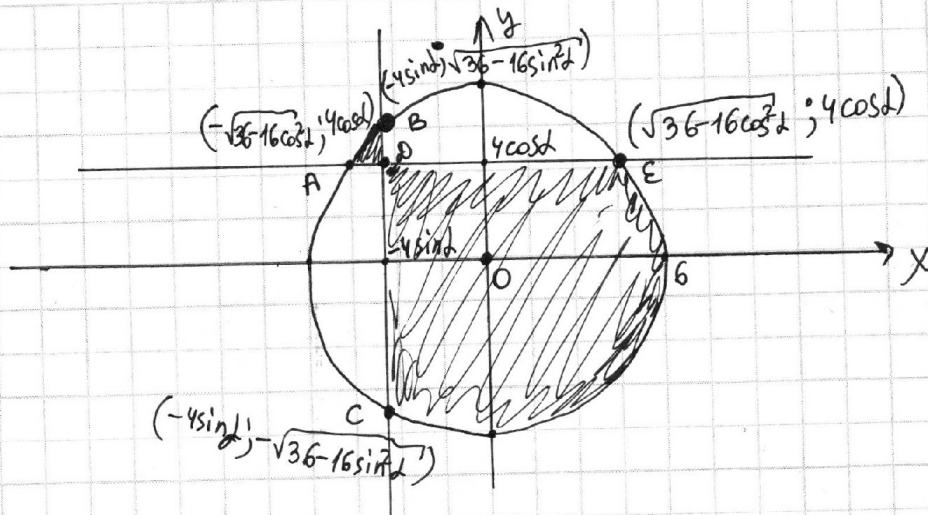


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Найдём точки пересечения окружности с прямыми $y = 4 \cos \alpha$ и $x = -4 \sin \alpha$.

если $y = 4 \cos \alpha$: $x^2 + (4 \cos \alpha)^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 36 - 16 \cos^2 \alpha$

$$x = \pm \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$$

если $x = -4 \sin \alpha$: $(-4 \sin \alpha)^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y^2 = 36 - 16 \sin^2 \alpha$

$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$$

~~координат~~
~~равенства~~ между точками $(-4 \sin \alpha, \pm \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha})$ и точкой $(\pm \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}, 4 \cos \alpha)$ равно

$$\begin{aligned} & (\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} + 4 \sin \alpha)^2 + (\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} + 4 \cos \alpha)^2 = \\ & = 36 - 16 \cos^2 \alpha + 16 \sin^2 \alpha + 8 \sin \alpha \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} + 36 - 16 \sin^2 \alpha + 16 \cos^2 \alpha + 8 \cos \alpha \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

Обозначим точки так, как на рисунке.
 $\angle ADB = 90^\circ \Rightarrow \angle AOB + \angle COE = 90^\circ \cdot 2 = 180^\circ$
(из геометрии)
 $\Rightarrow$ угол между хордами равен
полусумме дуг, на которые эти хорды
опираются)



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

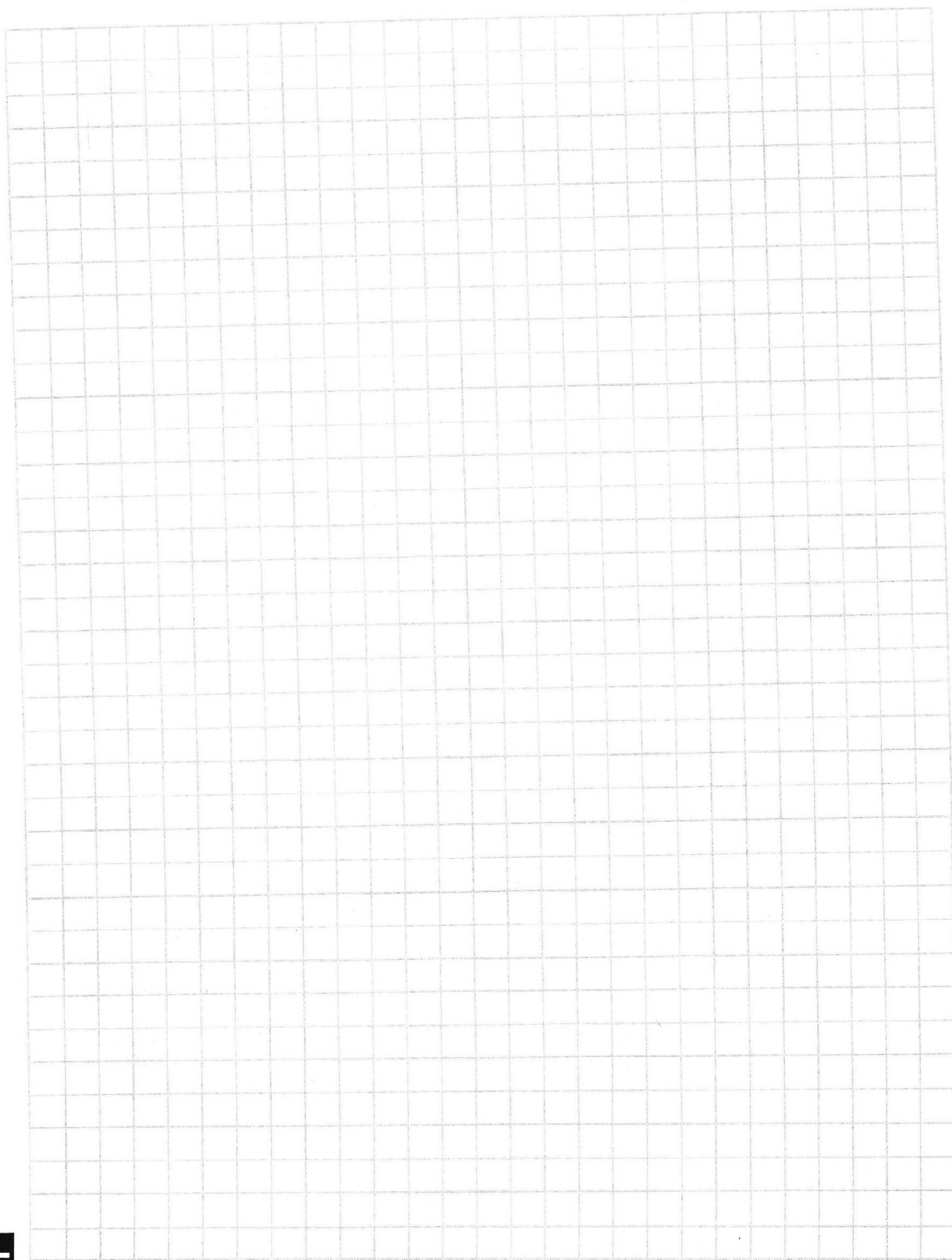
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☒	☒	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

0000
X медий

002
0003

0000...
X

$$\frac{4}{x} \cdot 11 = \frac{m}{x}$$

$$44 = m$$

2 нуля
00

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4}$$

$$\frac{1 \cdot (x-1)(x-2)(x-3)}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{4}{x}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\cos \left(\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \right) = \frac{x}{7} \cdot \cos \left(\arcsin \frac{y}{4} \right) + \sin \left(\arccos \frac{x}{7} \right) \cdot \frac{y}{4}$$

$$\arccos \left(\frac{x}{7} \right) - \arcsin \left(\frac{y}{4} \right)$$

$$-7 \leq x \leq 7$$

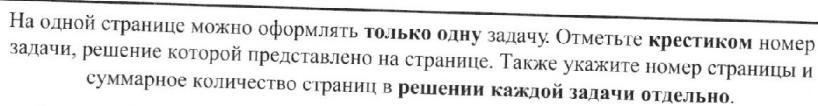
$$-4 \leq y \leq 4$$

$$\begin{aligned} &(-7, -4) \quad (-7, -2) \quad (-7, 0) \\ &(-7, 2) \quad (-7, 4) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} = 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

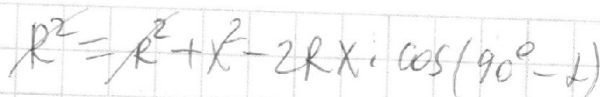
$$\begin{cases} \frac{x}{7} = 1 \\ \frac{y}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$5 \cdot 14 + 4 = 74$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ -16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$8 \cdot 24 \cdot 16 \cdot 24 = 2^{11} \cdot ?$$

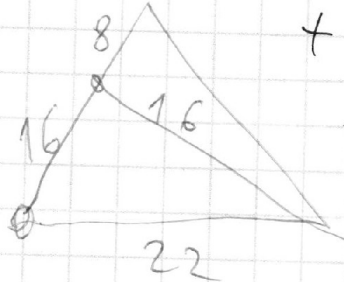
$$? = \frac{192}{11}$$

$$22 \frac{22}{49} \times \frac{49}{49} \times \text{POB} = 8 \sin 21$$

$$\frac{x}{\sin 2} = \frac{8}{\sin 100}$$

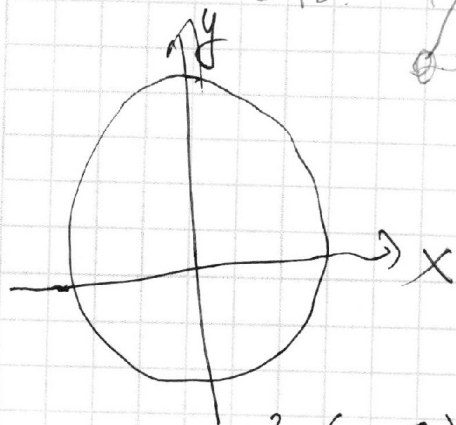
$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ + 480 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\cos \varphi = \frac{72 - 64 \cos \theta}{-72}$$



$$\begin{array}{r} 528 \overline{) 176} \\ \underline{-3} \\ 22 \\ \underline{-21} \\ 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1060 \\ 334 \\ \hline 726 \end{array} \quad \begin{array}{r} 363 \\ 528 \\ \hline \end{array}$$



$$X^2 + (4 \cos^2 2)^2 = 36$$

$$x^2 = 36 - 16 \cos^2 \alpha$$

$$X = \sqrt{36 - 16 \cos 2}$$

$$(2\sqrt{36-16\cos\theta})^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos\theta$$

$$4(36 - 16 \cos^2 \theta) = 72 - 64 \cos^2 \theta$$

$$\cancel{72} - 64 \cos 2 = \cancel{72} - 72 \cos 4$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{72 - 64 \cos \alpha}{-72} \right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{72^2 - (72 - 64 \cos t)^2}}{72^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111 \cdot d_A = 11 \cdot 101 \cdot d_A$$

$$B = 707 = 7 \cdot 101$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y+y} + \frac{3}{(x-y)(y+y)}$$

$$xy \neq xy + 4x - 4y - 16$$

$$4y + 16 \neq 4x$$

$$y + 4 \neq x$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{y}{2}\right) =$$

$$= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$y + x + 3 = 0$$

$$xy \neq (x-y)(y+y)$$

$$2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$(y+y)^3 - y^3 - 12(y+y) \cdot y = y^3 + 3y^2 + 12y^2 + 48y + 64$$

$$y^3 - 12y^2 - 48y = 64$$

$$\begin{cases} \cos \angle = \frac{x}{2} \\ \sin \angle = \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin \pi y \sin \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos \pi y \cos \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\cos \cos(\pi y + \pi y) + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x - 3\pi y}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\pi x - 3\pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

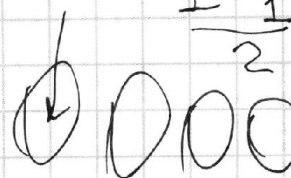
$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x - 3y}{2} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x + y}{2} = \frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x - 3y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$



$$7 - 12 = -5$$