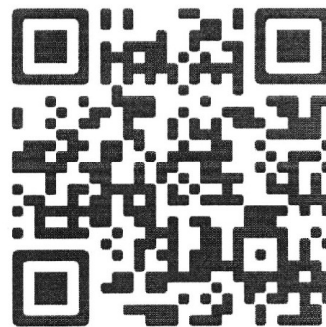




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1

Зачем, что число A точно кратно числу 1111

Найдем все делители, $1111 = 11 \cdot 101$
Разложим на простые множители

$A = 1111 \cdot a$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \in [1; 9]$; $B \cdot C < 100$

Значит, чтобы $A \cdot B \cdot C$ было полным квадратом,
необходимо чтобы $B \cdot C$ делилось на 1111 ,
т.е. на 11 и 101 , и содержа 11 и 101 именно
в четной степени.

Зачем, что т.к. $B \cdot C < 100$, то на простое
число 101 может делиться только B , а если учесть,
что B содержит цифру 7 , то для B есть 1
вариант $B = 707$

Тогда:

$$A = 1111 \cdot a$$

$$B = 707$$

$C = 11 \cdot c$, т.к. по условию C содержит 1 , это может
быть только 11 . Тогда цифра $a = 7$

Ответ: $A = 7777$, $B = 707$, $C = 11$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 2

По условию:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ (x-4)(y+4) \neq 0 \\ \begin{cases} x+y+3=0 \\ xy=(x-4)(y+4) \text{ (I.)} \end{cases} \end{cases} \rightarrow \text{По у. } x, y \text{ - положительные, значит } x+y \neq -3$$

$$\text{I. } xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$x - y = 4$$

Решение системы:

$$\begin{cases} x, y \neq 0 \\ x \neq 4 \\ y \neq -4 \\ x = y + 4 = x - 4 \end{cases}$$

Подставим равенство в $M = x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4)$

$$M = x^3 - (x^3 - 12x^2 + 48x - 64) - 12x^2 + 48x$$

$$M = \cancel{x^3} - \cancel{x^3} + 12x^2 - 48x + 64 - \cancel{12x^2} + \cancel{48x} = 64$$

Ответ: 64



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3

Введём обозначения: $\alpha = \pi x$, $\beta = \pi y$, Подставим в условие:

$$(\sin \beta - \sin \alpha) \cdot \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cdot \cos \beta$$

$$\sin^2 \beta - \cos^2 \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = 0$$

$$-\cos(2\beta) - \cos(\beta - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\beta) = -\cos(\beta - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2\beta) + \cos(\beta - \alpha) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{2\beta + \beta - \alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\beta - \beta + \alpha}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{3\beta - \alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\beta - \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{\beta + \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\beta - \alpha = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \beta + \alpha = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Подставим исходные значения:

$$\begin{cases} 3\pi y - \pi x = \pi + 2\pi n & |: \pi \\ \pi y + \pi x = \pi + 2\pi k & |: \pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3y - x = 2n + 1 & (n \in \mathbb{Z}) \\ y + x = 2k + 1 & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Следовательно, подходят все пары для которых верно:
Ответ:

$$\begin{cases} x = 3y + (2n + 1) & (n \in \mathbb{Z}) \\ x = -y + (2n + 1) \end{cases}$$

д)

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

Определим функциональный диапазон x и y :



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{x}{7} \in [-1; 1] \rightarrow x \in [-7; 7]$$

$$\frac{y}{4} \in [-1; 1] \rightarrow y \in [-4; 4]$$

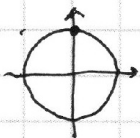
Диапазоны значений самих ф-ций:

$$\arccos\left(\frac{x}{7}\right) \in [0; \pi], \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Тогда $\arccos\left(\frac{x}{7}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) \leq -\frac{\pi}{2}$ ~~или~~ ^{только при} $\begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{7}\right) = 0 \\ \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

иначе равенство в условии будет верно

$$\begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{7}\right) = 0 \end{cases}$$



$$\frac{x}{7} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ по усл. } x\text{-целое,}$$

значит $\frac{x}{7} \neq \frac{\pi}{2}$ в выражении с $\frac{\pi}{2}$ в

т.к. это нецелое,

второе условие можно не проверять, правой части
равенства ~~никогда~~ ^{никогда} не будет

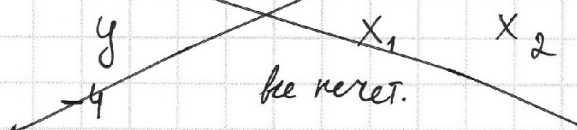
• Вернёмся к совокупности из п. а:

$$\begin{cases} x = 3y + (2n+1) \text{ (I)} \\ (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y + (2n+1) \text{ (II)} \end{cases}$$

I. $\begin{cases} x = 3y + (2n+1), n \in \mathbb{Z} \\ x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \end{cases} \quad (X_1) \rightarrow$

~~Переберём все подходящие x для
каждого фиксированного y:~~



~~не имеет.~~

II. $\begin{cases} x = -y + (2n+1), n \in \mathbb{Z} \\ x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \end{cases} \quad (X_2)$

~~Примечание к таблице справа:~~

~~Т.к. числа задаются формулой
 $x = ky + (\text{любое нечет. число})$, то~~

Заметим, что т.к. числа задаются
формулой $y = kx + (\text{любое нечет. число})$, то подойдёт любая пара
лежущая в диапазоне функций
x и y, в которой значения x и y
отличаются



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку $\text{чет} + \text{чет} = \text{чет}^y + \text{чет}^x = \text{чет}^x$
 $\text{чет} + \text{чет} = \text{чет},$

а коэффициент k в обоих случаях нечетный $\rightarrow$ на четность y в выражении kx не влияет.

Получаем кол-во подходящих пар:

для нечет. x (8 вариантов ^{в диапазоне} $[-7; 7]$) - четные y (5 вариантов $[-4; 4]$)

$$8 \cdot 5 = 40 \text{ вариантов}$$

И наоборот: $\text{нечет}^x \cdot \text{чет}^y = 7 \cdot 4 = 28$

Ответ: $40 + 28 = 68$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 4

Обозначим за n кол-во школьников, тогда в начале учебная вер-сть:

$$P_1 = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{(n-1)} \quad (\text{вер-сть того, что оба пойдут, и 4 билета})$$

это вер-сть того, что из n человек пойдёт Пётя умножит на вер-сть того, что из оставшихся 3 билета $n-1$ человека 1 из 3 билетов будет Вадим)

Пусть ~~окажем~~ за a обозначим кол-во билетов в конце месяца. ^($a > 4$) Тогда аналогично

$$P_2 = \frac{a}{n} \cdot \frac{(a-1)}{(n-1)}$$

По усл. $11P_1 = P_2$

$$\text{т.е. } \frac{11 \cdot 12}{n(n-1)} = \frac{a(a-1)}{n(n-1)}$$

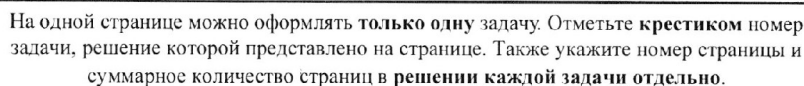
$$11 \cdot 12 = a^2 - a$$

$$a^2 - a - 11 \cdot 12 = 0$$

$$(a-12)(a+11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=12 \\ a=-11 \\ a>4 \end{cases}$$

Подходит только $a=12$

Ответ: 12



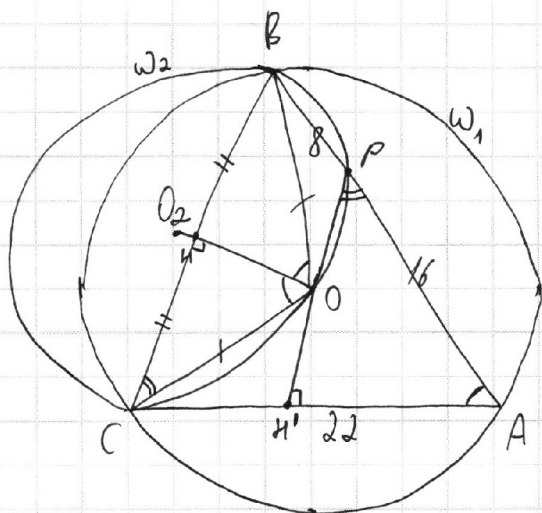
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Наим: S, ABC



Решение: Т.к. O_1 и O_2 ~~распо~~ у. опис. окружностей, то BC —
общая хорда, то $O_2 O_1 \perp BC$ и делит хорду

Т.к. $\angle BOC$ ^(ОВ, ОС - радиусы) $\angle BOO_2 = \angle O_2OC$ и $\angle BAC$ ($\angle BOC$ - центральный, $\angle BAC$ - вписанный) оба опираются на BC)

Соединим T, P и O, T, K . Чуг. $OPBC$ вписан в W_2 , то $\angle OPA = \angle OCB$ ($\angle OPA$ - внешний для впис. чуг.)

Заметим, что $\angle BCO + \angle COO_2 = 90^\circ$ (из прямоуг. $\triangle COH$),
значит продолж PO , $PO \cap AC = H'$, $\angle PH'A = 90^\circ$

OH' - радиус $\perp$ хорде $AC \rightarrow H'$ - середина AC ,

$AH' = 11$. Тогда из равенств $\sigma(AH')$

По т. Пифагора : $PH' = \sqrt{16^2 - 11^2} = \sqrt{5 \cdot 27} = 3\sqrt{15}$
 За ѓ. објазнам $\triangle BAC$, ѓ. правуг. $\triangle APH'$:

$$\sin \angle = \frac{PH'}{AP} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По формуле

S через 2 стороны и синус угла между ними:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{16} = \frac{99\sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $\frac{99\sqrt{5}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

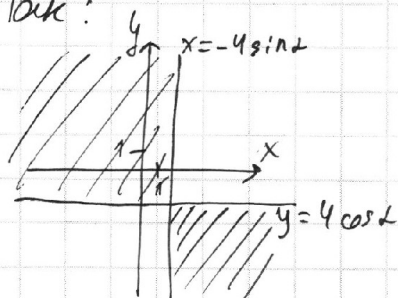
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6

$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leq 0 & (I.) \\ x^2 + y^2 \leq 36 & (II.) \end{cases}$$

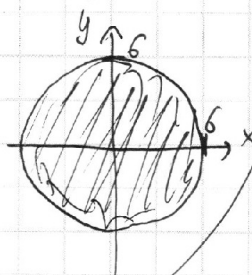
I. Решением 1-го неравенства являются 2 прямые вертикальных угла, ограниченные прямыми $x = -4\sin\alpha$ и $y = 4\cos\alpha$ при фиксированном α и то 2 каких-то угла. Все точки, удовлетворяющие ^{первому} неравенству, расположены

Так:



II. Решением 2-го неравенства является круг в центре $(0; 0)$,

$r = 6$



• Поскольку требуется максимизировать периметр, нас интересуют только границы фигуры, т.е. такие, что



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

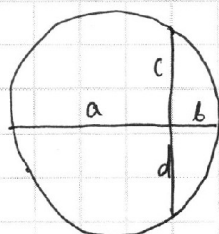
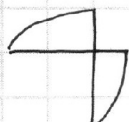
6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом, необходимо максимизировать длину
линий такой фигуры:



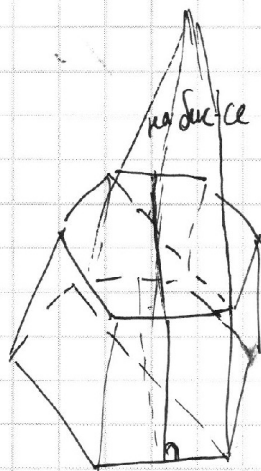
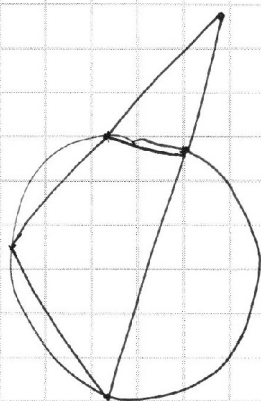
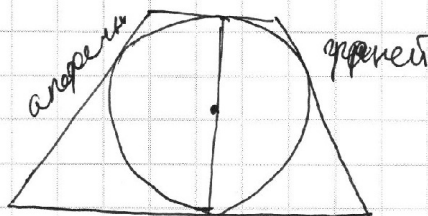
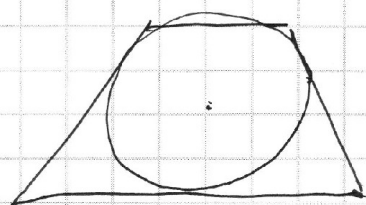


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

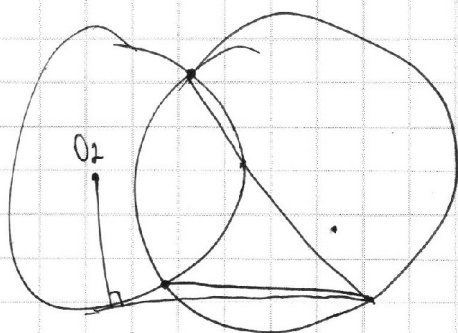
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

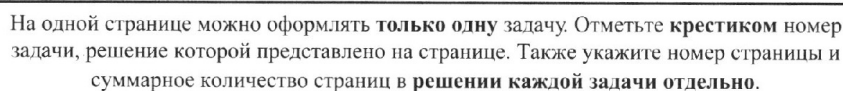


рисер

$$\frac{8 \cdot 16}{22} = \frac{68}{11}$$

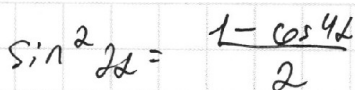


$$\frac{16 \cdot 24}{22} = \frac{24 \cdot 8}{11}$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Найти:

5. ABC

0, 0, летят на орбите
к ВС,
или их соединить

$$16.24 = (8.56)^2$$

$$2R = \frac{BC}{\sin \alpha}$$

$$R = \frac{BC}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{BC^2}{\sin^2 2\alpha}}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC \cdot 2 \cdot \overset{\text{Cos}}{\cancel{\sin}} = 24^2 + 22^2 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cdot \text{Cos}$$

~~*~~ $\sin 2L = 2 \sin L \cdot \cos L$

$$24^2 + 22^2 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cdot \cos 2$$

Как выразить p ?

Множ кол-во таких точек, и внутренняя часть окр-сти

$$x^2 + y^2 = 6$$

$$x = 4 \cos t \quad y = -4 \sin t$$

$$J = pr = \frac{abc}{4R}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1 Черновик

~1 A - 4 зн.

ABC - квадрат

7 1 1

либо B сам полный квадрат

либо A : делитель B или C :

4

Остаток 5 человек
 $\frac{9}{25}$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \cos(2\alpha)$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

$$\sim 2 \quad k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$$

2 человека

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$(x-4)(y+4)(y+x+3)$$

X_{нет}: 7

X_{нет}: 8

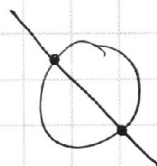
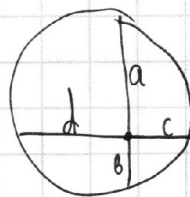
лет: -4, -2, 0, 2, 4

9

$$\cos 2 = -\sin \beta$$

y_{нет} = 5

y_{нет} = 4





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~ 3

$$(\sin(\pi y) - \sin(\pi x)) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \alpha - \sin \beta \cdot \sin \alpha = \cos^2 \beta + \cos \beta \cdot \cos \alpha \quad (\text{обфактури})$$

$$\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha + \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha = 0$$

$$(\cos \beta - \sin \alpha)(\cos \beta + \sin \alpha) + \cos(\beta - \alpha) = 0$$

$$\cos(\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) - \sin \alpha)(\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) + \sin \alpha) + \cos(\beta - \alpha) = 0$$

$$2 \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{(\alpha + \beta)}{2}) \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}) \cdot 2 \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}) \cdot \cos(\frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sin(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}) + \cos(\beta - \alpha) = 0$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - (\beta - \alpha)) = 0$$

$$\pi y = \beta, \quad \pi x = \alpha$$

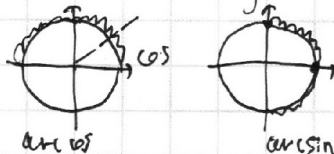
$$(\sin \beta - \sin \alpha) \cdot \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cdot \cos \beta$$

$$\sin^2 \beta - \cos^2 \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta = 0$$

$$\sin^2 \beta - \cos^2 \beta - \cos(\beta - \alpha) = 0$$

$$\cos(2\beta) - \cos(\beta - \alpha) = 0$$

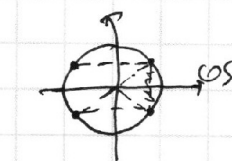
$$\cos \alpha = -\cos \beta \rightarrow \alpha = \pi - \beta + 2\pi n$$



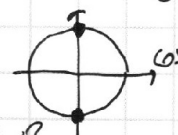
$$\cos \alpha + \cos \beta = 0$$

$$\arccos \in [0; \pi), \quad \arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$3\beta - \alpha = \pi + 2\pi n$$



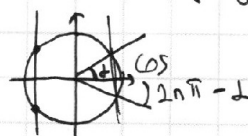
$$\cos \alpha = \cos \beta$$



$$\cos \alpha = -\cos \beta$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 0$$

$$2 \cos(\frac{\alpha + \beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha - \beta}{2}) = 0$$



$$\alpha = 2\pi n - \beta$$

$$\alpha + \beta = 2\pi n$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

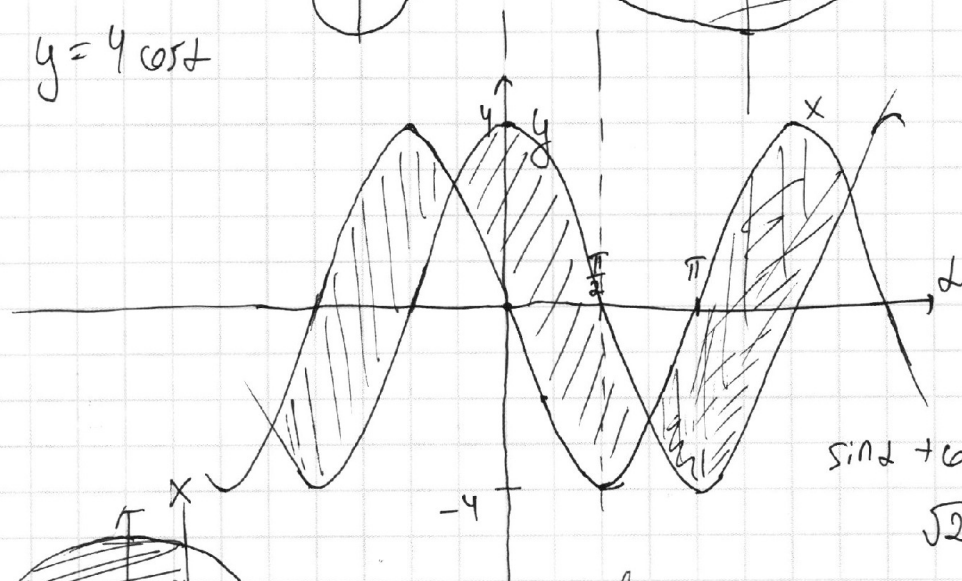
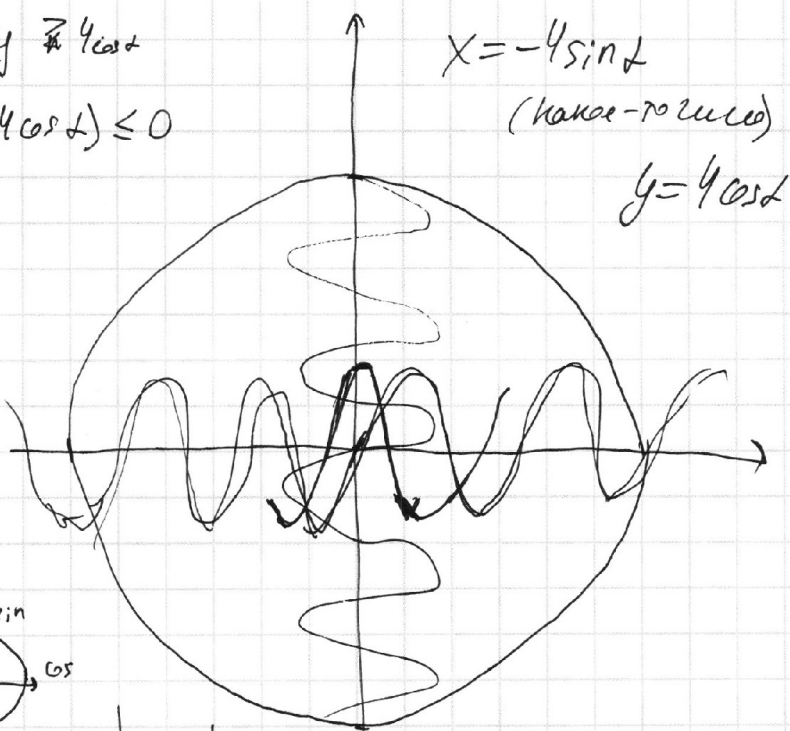
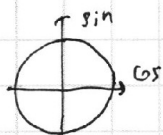
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6 $x > -4 \sin t$ $y \neq 4 \cos t$

$$\begin{cases} (x + 4 \sin t)(y - 4 \cos t) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

Если оба > 0 , то
неверно, значит
оба ≤ 0

$$\begin{aligned} x &= -4 \sin t \\ y &= 4 \cos t \end{aligned}$$

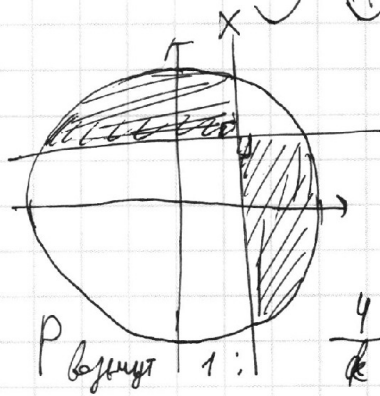


$$\begin{aligned} 4 \cos t &= 4 \sin t \\ \sin t &= -\cos t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin t + \cos t &= 0 \quad | \cdot \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \sin(t + \frac{\pi}{4}) &= 0 \\ t &= -\frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

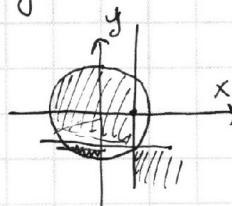
$$x = -4 \sin t = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} y &= -2\sqrt{2} \\ \text{2 вертикальные} \\ \text{линии} \end{aligned}$$



$$\frac{4}{k} \cdot \frac{3}{(k-1)} =$$

Какая наибольшая P?





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~4

Обозначим за k кол-во детей

Тогда если билетов всего 4, то вер-сть что оба пойдут:

$$\frac{4}{k} \cdot \frac{4}{k}$$

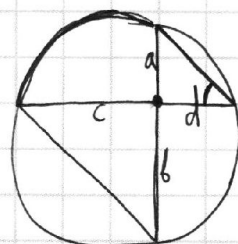
Пусть окажется, что выданы a билетов ($a > 4$), Тогда в этом случае вер-сть что оба идут:

$$\frac{a}{k} \cdot \frac{a}{k}$$

По условию $\frac{16}{k^2} \cdot 11 = \frac{a^2}{k^2}$

Период

$$\begin{cases} x = -4 \sin t \\ y = 4 \cos t \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$



a и b — длины
 радиусов
 $ad = bc$
 $6 \cdot \arcsin \frac{c}{b}$

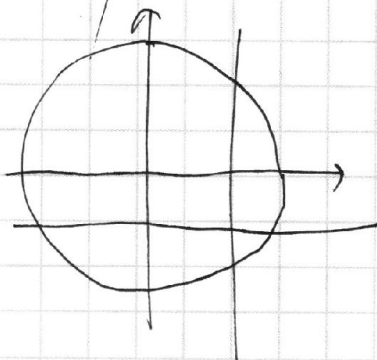
→ все эти точки
 подойдут
 когда их наиб. кол-во?

$$16 \sin^2 t + 16 \cos^2 t \leq 36$$

$$16 \leq 36$$

$$(x + 4 \sin t)(y - 4 \cos t) \leq 0$$

$$x = 4 \sin t$$



Когда

1 1 1 1

$$101 = 37$$