



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 3, а  $y$  — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 9xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{16}{5}$ ,  $BP = 2$ ,  $AC = 4$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$B = \overline{b_1 b_2 b_3}$$

$$\begin{cases} b_1=1 \\ b_2=1 \\ b_3=1 \end{cases}$$

$a \leq 9$       11, 101 - **простые**

$$A : 101 \Rightarrow ABC : 101$$

$$C = \overline{c_1 c_2}$$

$$\begin{cases} c_1=5 \\ c_2=5 \end{cases}$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2$$

||

$$B = 101 \quad <= 1 = b_1 = b_3 \quad <= \cancel{\frac{b_1=b_3}{b_2=0}} \quad \cancel{<= B : 101}$$

$$A : 11 \Rightarrow ABC : 11 \Rightarrow n^2 : 11 \Rightarrow n^2 : 11^2$$

$$\cancel{ABC : 11^2}$$

$$\cancel{B : 101}$$

$$C : 11 \Rightarrow \cancel{C : 11} \quad \cancel{C_1 = C_2 = 5}$$

$$C : 5 \Rightarrow \cancel{C : 5} \Rightarrow a = 5$$

$$(A; B; C) = (5555; 101; 55)$$

$$\text{Ответ: } (A; B; C) = (5555; 101; 55)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

12

$$x > 0 \quad y > 0$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{y+x+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x \neq 3$$

$$(y+x+1)((x-3)(y+3) - xy) = 0$$

$$(y+x+1)(3x - 3y - 9) = 0$$

$$\begin{cases} y+x+1=0 \\ x=y+3 \end{cases} \quad y = -1-x < 0, \text{ но } y > 0 \Rightarrow \text{нет решений}$$

$$x = y + 3$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3) =$$

$$= 3y^2(y^2 + 6y + 9) - y^3 - 9y(y+3) =$$

$$= 3y^2 + 6y^2 + 18y + 27y + 27 - 9y^2 - 24y = 24$$

Ответ:  $M = 24$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

13

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \sin \pi x \cdot \sin \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

||

$$-\cos 2\pi x$$

||

$$\cos \pi(x-y)$$

$$\pi(x-y) = \pm 2\pi x \mp \pi \mp 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x-y = \pm 2x - 1 - 2k$$

~~знач~~

$$\left| \begin{array}{l} a) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 2k+1+3x \\ y = 2k+1-x \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z} \\ \quad \quad \quad x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\text{т} \quad \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

$$0 \leq \arccos z \leq \pi, \quad -1 \leq z \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \quad \text{и}, \quad \text{таким} \quad \arccos \frac{x}{4} = \arccos \frac{y}{9}$$

$$\text{то} \quad \arccos \frac{x}{4} = \arccos \frac{y}{9}$$

$$\text{таким} \quad \frac{x}{4} = \frac{y}{9}, \quad \text{тогда} \quad \frac{x}{4} = \frac{y}{9} \neq -1$$

$$\Rightarrow (x; y) = (-4; -9) - \text{не подходит}$$

$$-4 \leq x \leq 4, \quad -9 \leq y \leq 9 \quad -4; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4 - \text{если } 5x$$

$$x = -4 \Rightarrow \cancel{x=0} \quad \text{таким} \quad x : 2 \Rightarrow y : 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = -9 \\ y = -4 \\ y = -5 \\ y = -1 \end{array} \right\} 10$$

$$\Rightarrow \text{таким} \quad x : 2 \Rightarrow y : 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 2 \\ y = 4 \\ y = 5 \\ y = 9 \end{array} \right\} 9$$

$$-3; -1; 1; 3 - \text{если } 4x$$

$$\Rightarrow 5 \cdot 10 + 4 \cdot 9 - 1 = 50 + 36 - 1 = 85$$

Ответ: а)  $\left[ \begin{array}{l} y = 2k+1+3x, x \in \mathbb{R} \\ y = 2k+1-x, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$  85 решений  $(x, y)$  парных

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№4

$n$  - кол-во одноклассников

$a$  - кол-во гиперов в начале месяца

$p_1$  - вероятность выигрыша месяца

$p_2$  - вероятность проигрыша месяца

$C_n^4$  - всего случаев в начале месяца

$C_{n-2}^2$  - случаев когда Петька и Вася едят в конце месяца

$C_n^a$  - всего в конце

$C_{n-2}^{a-2}$  - Петька и Вася едят в конце

$$p_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!}}{\frac{n!}{4!}} = \frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}$$

$$p_2 = \frac{C_{n-2}^{a-2}}{C_n^a} = \frac{\frac{a(n-2)!}{(n-a)!(a-2)!}}{\frac{n!}{(n-a)! \cdot a!}} = \frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{a!}{(a-2)!} = \frac{a(a-1)}{n(n-1)}$$

$$p_2 = 3,5 p_1 \quad \frac{a(a-1)}{n(n-1)} = 3,5 \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}$$

$$a(a-1) = 42$$

$$\begin{aligned} a^2 - a - 42 &= 0 \\ (a-7)(a+6) &= 0 \\ a > 0 \Rightarrow a &= 7 \end{aligned}$$

Ответ: 7

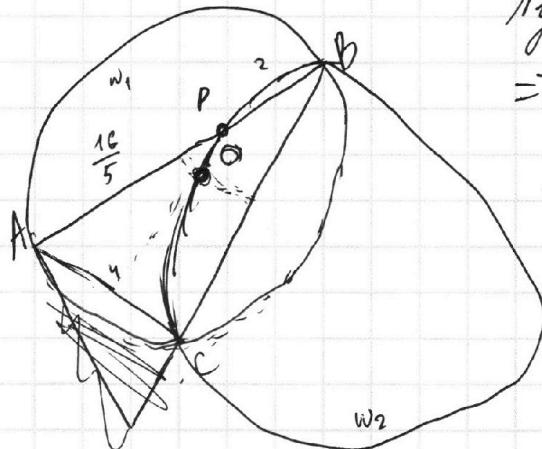
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

15



Пусть  $\angle CAB = 2$

$$\Rightarrow \angle COB = 2 \cdot 2 \text{ тк опирается на ту же дугу}$$

$$\angle COB = \angle CPB = 2 \cdot 2$$

$$\Rightarrow \cancel{\triangle ABC} \angle APC = 180^\circ - 2 \cdot 2$$

$$\Rightarrow \angle ACP = 180^\circ - 2 \cdot 2 - (180^\circ - 2 \cdot 2) = \\ = 2$$

$\Rightarrow \triangle APC$  - равноб.

$$\Rightarrow AP = CP = \frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{16}{5} \cdot \cos 2 = AC = 4$$

$$\cos 2 = \frac{5}{8}$$

$$\sin 2 = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \\ = \sqrt{\frac{39}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

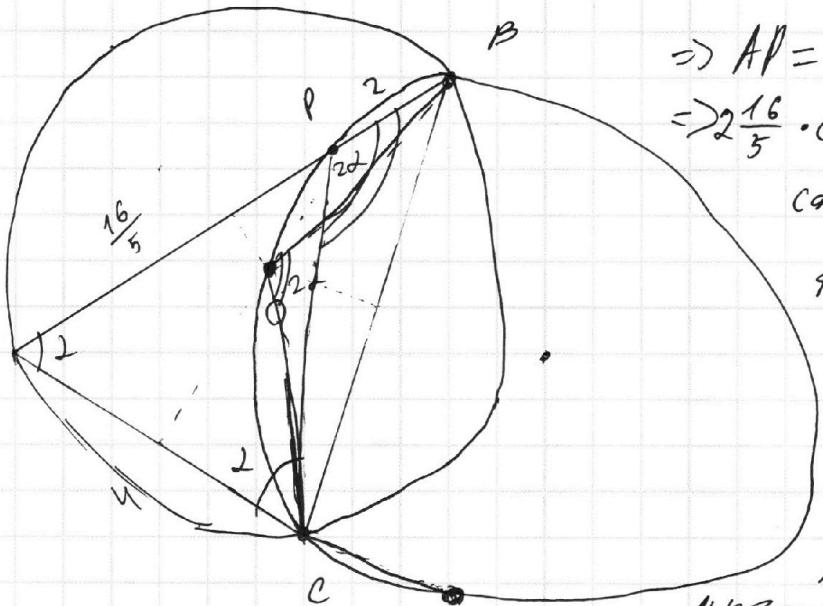
$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 2}{2}$$

$$AB = \frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5}$$

$$AC = \frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{26}{5} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} =$$

$$= \frac{13\sqrt{39}}{10}$$



$$\text{AC} \cdot AD = AB \cdot AB$$

$$4 \cdot (4 + CD) = \frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5}$$

$$4 \cdot (4 + 4) = \frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5}$$

$$C D = \frac{4 \cdot 26}{25} - 4 = \frac{4}{25}$$

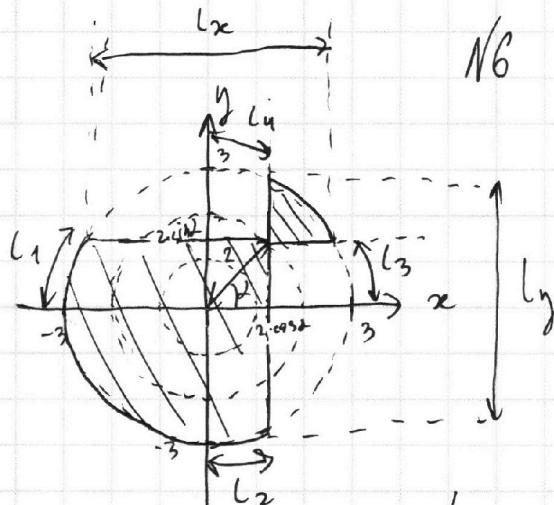
$$\text{Ответ: } S_{ABC} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + y^2 \leq 9 - \text{круг радиуса } 3$$

$$(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \nwarrow \end{array}$$

$$l_x = 2\sqrt{3^2 - 2^2 \sin^2 \alpha} = 2\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha}$$

$$l_y = 2\sqrt{3^2 - 2^2 \cos^2 \alpha} = 2\sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha}$$

$l_1 = l_2 \leftarrow$  6 симметрии  
 $l_2 = l_4 \leftarrow$

$$M = \cancel{\pi r^2} + l_1 + l_2 - l_4 - l_3 + l_x + l_y$$

$$r = 3$$

$$= 3\pi + l_x + l_y$$

$$\cancel{\pi r^2} (M - 3\pi)^2 = l_x^2 + l_y^2 + 2l_x l_y = 4(81 - 16\sin^2 \alpha - 16\cos^2 \alpha)$$

$$= 4(9 - 4\sin^2 \alpha + 9 - 4\cos^2 \alpha) + 8\sqrt{(9 - 4\sin^2 \alpha)(9 - 4\cos^2 \alpha)}$$

$$= 4(18 - 4) + 8\sqrt{81 - 9 \cdot 4 + 16\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

极大値を取る  $M \Rightarrow M - 3\pi \Rightarrow \text{MAX} \Rightarrow (M - 3\pi)^2 - \text{MAX} \Rightarrow 16\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$$4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 4\sin^2 2\alpha - \text{MAX} \Rightarrow \sin 2\alpha = \pm 1$$

$$8(M - 3\pi)^2 = 56 \Rightarrow 8\sqrt{4 - \sin^2 2\alpha} = \frac{\pi}{2} + m\pi k \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \sin^2 2\alpha = \frac{1}{2} \quad \cos^2 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$M = 3\pi + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{3} = 3\pi + 4\sqrt{4}$$

Ответ:  $M = 3\pi + 4\sqrt{4}, \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1      2      3      4      5      6      7

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>					
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-------------------------------------

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2^y)^2 + (R_2 - R_3)^2 = R_1^2$$

$$m^2 + \frac{1}{q} f.$$

$$y^2 + \frac{(b-c)^2}{\frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos 180^\circ}{n}} = \frac{bc}{n}$$

$$4u^2 = a^2 \sin^2 L = \frac{(b+c)^2}{4} \sin^2 L$$

$$(b+c)^2 \sin^2 \angle + \frac{(b-c)^2}{\tan^2 18^\circ} = bc$$

$$\sin D = \frac{bc \cdot \sin^2 180^\circ}{n} - \frac{(bc)^2}{n}$$

$$\sin \angle = \frac{bc - \frac{(b-c)^2}{\tan^2 \frac{180^\circ}{n}}}{(b+c)^2}$$

~~✓ 66-722-06~~

*Kipu REED*

*[Signature]*

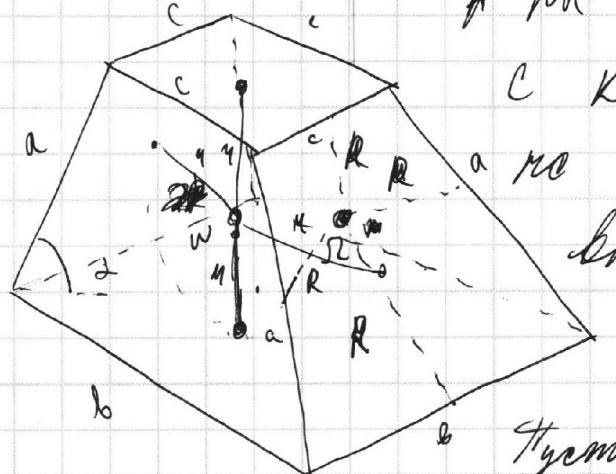
 =



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

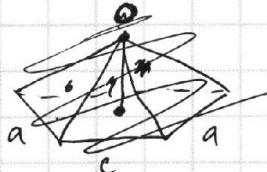


$\frac{1}{4}$   
 $n$ -кон-бо сторона в основании  
 На картинке пирамида  
 с квадратным в основании  
 не обращайтесь за эти  
 вычисления, а рассмотрите  
 общий случай

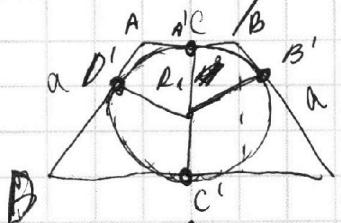
Число  $O$  - центр  $R$  - радиус  $R$   
 $o$  - центр  $w$  - радиус  $w$

~~Рассмотрим основание~~

~~$2\gamma = a \sin \alpha$~~



~~Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью~~  
~~Рассмотрим сечение срезом боковой грани:~~



$$\begin{aligned} AD' = AA' \\ DD' = DC' \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} A'B = BB' \\ CC' = CB' \end{aligned} \right\} \Rightarrow b + c = 2a$$

$$(2R_1)^2 = a^2 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{(b+c)^2 - (b-c)^2}{4} = bc$$

$$R_1 = \frac{\sqrt{bc}}{2}$$



$$\begin{aligned} b &= 2R_2 \tan \frac{180^\circ}{n} \\ c &= 2R_3 \tan \frac{180^\circ}{n} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x > 0 \quad y > 0 \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{3}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{3}{3xy}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy$$

$$\cancel{xy} \quad y + x + 1 = 3y + \frac{x}{3} + 1$$

$$2y = \frac{2x}{3} \quad y = \frac{x}{3}$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} = \frac{4x+3}{x^2}$$

$$M = x^3 - \frac{x^3}{24} - 3x^2 = \frac{x^2}{24}(26x - 81)$$

$$kx^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\cancel{x^2} \quad D = 16 + 12k$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!