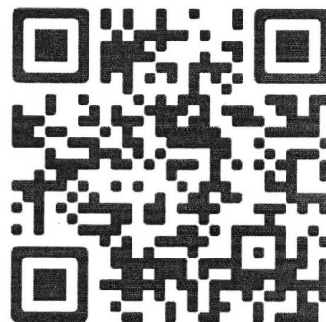




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



✓ 1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

✓ 2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 2, а  $y$  — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 6xy$ .

✓ 3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

✓ 4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

✓ 5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 25$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 35$ .

✓ 6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н1

$$A = 1111a = 101 \cdot 11 \cdot a$$

т.к.  $A \cdot B \cdot C$  - квадрат  $\Rightarrow B \cdot C : 101$  и  $: 11$

$C$  не может быть  $: 101$  т.к.  $C$  - двузначное

$\Rightarrow C : 11$  ~~нужно~~

$C$  может быть

|    |    |
|----|----|
| 11 | 66 |
| 22 | 77 |
| 33 | 88 |
| 44 | 99 |
| 55 |    |

но т.к. там должна быть 3  $\Rightarrow C = 33$

$B$  не может быть одновременно  $: 11$  и  $: 101$  т.к.

если  $B : 101$  и  $: 11 \Rightarrow B \geq 101 \cdot 11 = 1111$ , а  $B$  - трехзначное

$\Rightarrow B : 101$  и  $B$  может быть

|     |
|-----|
| 101 |
| 202 |
| 303 |
| ... |
| 909 |

но т.к. там должна быть 6

$\Rightarrow B = 606$

$$A = 1111a \quad B = 606 = 6 \cdot 101$$

$$101 \cdot 11 \cdot a \quad C = 33 = 3 \cdot 11$$

$\Rightarrow$  ~~нужно~~  $101 \cdot 11 \cdot a \cdot 3 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11$  - квадрат

$101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot a$  - квадрат  $\Rightarrow 2a$  - квадрат

$$\text{на } 1 \leq a \leq 9 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=8 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Есть всего две тройки  $A, B, C$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} A = 2222 \\ B = 606 \\ C = 33 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 8888 \\ B = 606 \\ C = 33 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ y \neq 0 \\ y \neq -2 \end{cases}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow xy = (x-2)(y+2)$$

$$\begin{aligned} xy &= xy + 2x - 2y - 4 \\ 0 &= 2x - 2y - 4 \\ x - y - 2 &= 0 \\ x &= y + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 6xy = (y+2)^3 - y^3 - 6(y+2)y = \\ &= \cancel{y^3} + 6y^2 + 12y + 8 - \cancel{y^3} - 6y^2 - 12y = 8 \end{aligned}$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$a) (\sin(\pi x) + \sin(\pi y)) \sin \pi x = (\cos(\pi x) - \cos(\pi y)) \cos(\pi x)$$

$$\sin^2(\pi x) + \sin(\pi x) \sin(\pi y) = \cos^2(\pi x) - \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$

$$\cos(\pi x) \cos(\pi y) + \sin(\pi x) \sin(\pi y) = \cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x)$$

$$\cos(\pi x - \pi y) = \cos(2\pi x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi(x-y) = \pi(2x) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi(x-y) = -\pi(2x) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y = 2x + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ x-y = -2x + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{y}{3} + \frac{2}{3}k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}, \text{ а } y - \text{любое действительное}$$

Ответ:  $y$ -любое действительное, а  $x = -y + 2k, k \in \mathbb{Z}$  или  $x = \frac{y}{3} + \frac{2}{3}k, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Пусть  $n$  - кол-во одноклассников,  $n \in \mathbb{N}$   
 $x$  - кол-во билетов в конце месяца,  $x \geq 4$ ,  $x \in \mathbb{N}$

$C_n^4$  - кол-во вариантов выбрать 4 одноклассников

$C_{n-2}^2$  - кол-во случаев, когда и Петя и Вася получили билет (просто выбираем, кому достанутся остальные билеты  $n-2=2$ )

$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$  - вероятность для Пети и Васи в начале

$\frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$  - вероятность в конце месяца

$$6 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} \quad 6 \cdot \frac{(n-2)!}{2!(n-2-2)!} = \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-2-x+2)!} \cdot \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} \cdot \frac{x!(n-x)!}{n!}$$

$$\frac{6 \cdot (n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \frac{4!(n-4)!}{n!} = \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} \cdot \frac{x!(n-x)!}{n!}$$

$$\frac{6 \cdot (4 \cdot 3)}{n(n-1)} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)} \Rightarrow 6 \cdot 4 \cdot 3 = x(x-1)$$

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = x(x-1)$$

$$9 \cdot 8 = x(x-1) \Rightarrow x = 9$$

Ответ: 9 билетов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

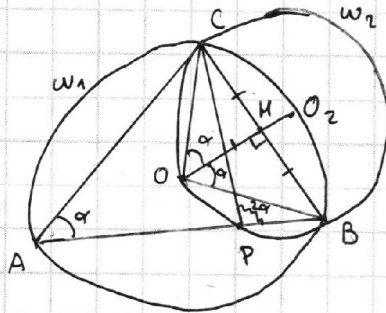


СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15



$\angle COB$  - центральный  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle COB = 2\angle CAB$$

Пусть  $\angle CAB = \alpha$

$$\Rightarrow \angle COB = 2\alpha$$

P и O лежат на одной окр. (~~на~~  $w_2$ )  $\Rightarrow \angle CPB = 2\alpha$

По теореме о трезубце  $CO = HO = OB \Rightarrow \triangle OHB - \text{пр. б.} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle HBO = \alpha$  т.к. он ещё и прямой. Треуг.  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha = 45^\circ \Rightarrow \angle CPB = 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow CP - \text{высота}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = CP \cdot AB \cdot \frac{1}{2} = CP \cdot (AP + PB) \cdot \frac{1}{2} = CP \cdot (30) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 15 \cdot CP$$

По т. Пифагора в  $\triangle ACP$

$$CP^2 = AC^2 - AP^2 = 35^2 - 25^2 =$$

$$= 600 \Rightarrow CP = \sqrt{600} = 10\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = 15 \cdot 10\sqrt{6} = 150\sqrt{6}$$

О т в е т:  $150\sqrt{6}$

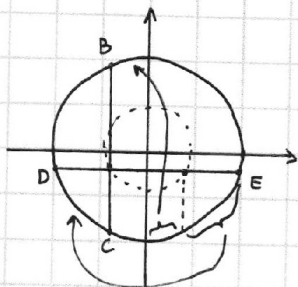


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что сумма длин дуг фигур  $\varphi(\alpha)$  - постоянна и равна половине длины окружности  $\omega$

$$\frac{2\pi R}{2} = \pi R = 13\pi$$

Т.к. мы можем разделить и поменять местами некоторые дуги как по-

казано на рисунке.

Найдем длины отрезков BC и DE:

1. Ур-е прямой BC:  $x = -c$   $x = 5\sqrt{2} \cos \alpha$

Подставим в ур-е (2)

$$25 \cdot 2 \cdot \cos^2 \alpha + y^2 = 169$$

$$y^2 = 169 - 50 \cos^2 \alpha$$

$$y = \pm \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} - \text{ординаты точек B и C}$$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$

2. Ур-е прямой DE:  $y = -s$   $y = 5\sqrt{2} \sin \alpha$

Подставим в ур-е (2)

$$x^2 + 50 \sin^2 \alpha = 169 \Rightarrow x = \pm \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} - \text{абсциссы точек D и E}$$

$$\Rightarrow DE = 2\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$BC + DE = 2(\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} + \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}) =$$

$$= \sqrt{4(169 - 50 \cos^2 \alpha + 2\sqrt{(169 - 50 \cos^2 \alpha)(169 - 50 \sin^2 \alpha)} + 169 - 50 \sin^2 \alpha)} =$$

$$= 2\sqrt{2 \cdot 169 - 50(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2\sqrt{169^2 - 169 \cdot 50 \sin^2 \alpha - 169 \cdot 50 \cos^2 \alpha + 50^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}} = 2\sqrt{2 \cdot 169 - 50 + 2\sqrt{169^2 - 169 \cdot 50(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}} =$$

$$+ 50^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 2\sqrt{2 \cdot 169 - 50 + 2\sqrt{169^2 - 169 \cdot 50 + (50 \sin \alpha \cos \alpha)^2}} =$$

$$= 2\sqrt{488 + 2\sqrt{169(169 - 50) + (50 \sin \alpha \cos \alpha)^2}} \Rightarrow \text{чем больше } \sin \alpha \cos \alpha, \text{ тем больше периметр}$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2+y^2 \leq 169 & (2) \end{cases}$$

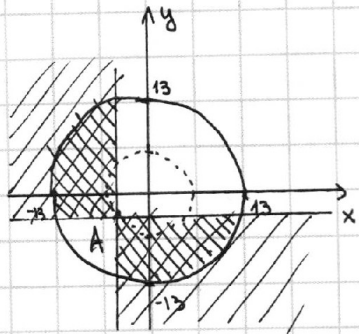
(2) - уравнение окружности (назовем её  $\omega$ ) с центром в  $(0;0)$  и  $R = \sqrt{169} = 13$

Пусть  $c = -5\sqrt{2}\cos\alpha$ ,  $s = -5\sqrt{2}\sin\alpha$

Тогда решением ур-я (1) является  $\begin{cases} x \leq c \\ y \geq s \\ x \geq c \\ y \leq s \end{cases}$

$$c^2 + s^2 = 25 \cdot 2 \cos^2\alpha + 25 \cdot 2 \sin^2\alpha = 50(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 50 \cdot 1 \Rightarrow c^2 + s^2 = 50 \Rightarrow \text{Расстояние от } (0;0) \text{ до точки } A(c;s) \text{ (назовём его } r) \quad r = \sqrt{50}$$

$$7 < \sqrt{50} < 8$$

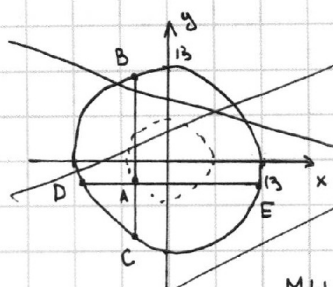


Обозначим на рисунке точку A

Мы хотим добиться макс значения периметра ~~фигуры~~  $\Phi(\alpha)$

A лежит на окружности с радиусом  $r = \sqrt{50}$

- область фигуры  $\Phi(\alpha)$



Чем больше длина хорды BD, тем ~~длина дуги BD~~ больше длина дуги BD (малой дуги)

Аналогично с CE

$$\Rightarrow BD^2 = AB^2 + AD^2 \text{ и } CE^2 = AC^2 + AE^2 \Rightarrow$$

$$BD^2 + CE^2 = AB^2 + AD^2 + AC^2 + AE^2 \Rightarrow \text{если}$$

мы хотим увеличить левую часть ур-я  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  надо увеличить и правую, но увеличивая правую, мы увеличиваем  $AD^2 + AC^2 + AB^2 + AE^2 = DC^2 + BE^2 \Rightarrow$  мы увеличиваем длины дуг BE и DC (малых), которые не



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$(\sin \alpha \cos \alpha) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \Rightarrow$  Если мы ищем max значение~~

~~то  $(\sqrt{2})^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha_{\max} = \frac{1}{2}$~~

~~$\Rightarrow (BC + DE)_{\max} = 2\sqrt{188 + 2\sqrt{169(169 - 50)} + 25^2}$~~

~~или  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha =$~~

Воспользуемся фактом, что  $\sin \alpha \cos \alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$\Rightarrow M_{\max}$  при  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$  или  $\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$

$(BC + DE)_{\max} = 2\sqrt{188 + 2\sqrt{169(169 - 50)} + 25^2} = 2\sqrt{188 + 2\sqrt{169 \cdot 119} + 25^2}$

$= 2 \cdot 24 = 48 \Rightarrow M_{\max} = 13\pi + 48$

Ответ:  $M_{\max} = 13\pi + 48, \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

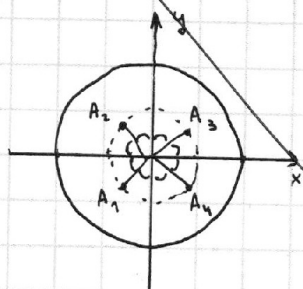
СТРАНИЦА

из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Входят в периметр  $\Rightarrow$  Максимальная длина дуг достигается при  $AB=AE$  и  $AD=DC$

4 случая:  $A_1, A_2, A_3, A_4$



$A_1$ :  ~~$c = s < 0$~~

~~$$c = s < 0$$~~

~~$$-5\sqrt{2}\cos\alpha = -5\sqrt{2}\sin\alpha$$~~

~~$$\sin\alpha = \cos\alpha < 0$$~~

~~$$\alpha = \frac{5}{4}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$~~

$A_2$ :  $c = -s \quad s > 0$

$$-5\sqrt{2}\cos\alpha = 5\sqrt{2}\sin\alpha$$

$$-\cos\alpha = \sin\alpha$$

$$\sin\alpha > 0$$

$$\alpha = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$A_3$ :  $\cos\alpha = \sin\alpha > 0$

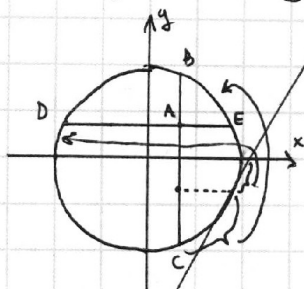
$$\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$A_4$ :  $\cos\alpha = -\sin\alpha \quad \cos\alpha > 0$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

Теперь найдем длину  $M$  периметра рассмотрим любой случай (возьмем  $A_3$ )



Переносим некоторые дуги как показано на рисунке 2 и понимаем, что сумма длин дуг равна  $\frac{2\pi R}{2} = \pi R = \pi \cdot 13 = 13\pi$

$\leftarrow$  половина длины большой окр. и

т.к.  $DE = BC$  достаточно найти длину одной из них

Уравнение прямой  $BC$ :  $x = -c \Rightarrow x = -5\sqrt{2}\cos\alpha, \alpha = \frac{\pi}{4}$

$$x = +5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \quad \text{Подставим в ур-е (2)}$$

$$25 + y^2 = 169 \quad y^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow y = \pm 12 - \text{коорд. угл. т. В и С}$$

$$\Rightarrow BC = 2 \cdot 12 = 24 \Rightarrow M = 13\pi + 48 \quad \text{Ответ: } M_{\max} = 13\pi + 48, \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$



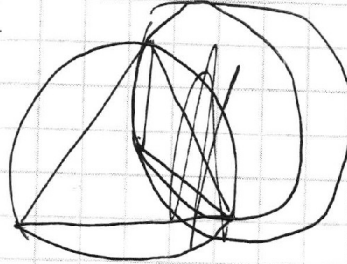
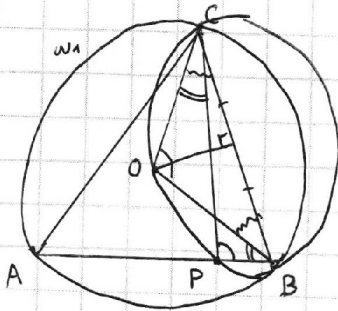
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик  
№ 5



№ 1

40  
40  
80  
160

$$A = 1111a$$

$$B = \frac{6mn}{mn6}$$

$$C = \frac{c3}{3c}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 1111} \\ 11 \overline{) 11} \\ 011 \end{array}$$

$$1. 1111a \cdot (600 + 10m + n) \cdot (10c + 3) =$$

$$101 \cdot 11$$

$$6666 \cdot 606 \cdot 33$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 35 \\ 35 \\ 175 \\ 105 \\ 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 25 \\ 25 \\ 125 \\ 50 \\ 625 \end{array}$$

$$11$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ 11 \\ 11 \\ 11 \\ 11 \\ 121 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 11 \\ 101 \\ 101 \\ 101 \\ 101 \end{array}$$

$$1 \leq a \leq 9$$

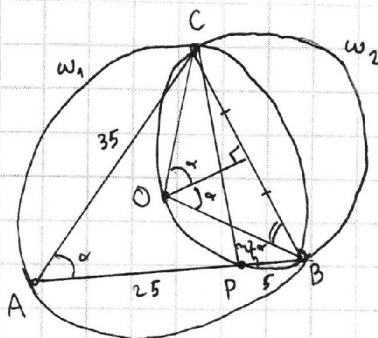
$$\begin{array}{r} 101 \\ 202 \\ 303 \\ 404 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 105 \\ 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1225 \\ - 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 11 \\ 101 \\ 101 \\ 101 \\ 101 \end{array}$$

$$a \cdot 10 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = a \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \Rightarrow a = 2$$
$$a = 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0$$

$$xy + x \cdot 5\sqrt{2} \sin \alpha + y \cdot 5\sqrt{2} \cos \alpha + 25 \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha \leq 0$$

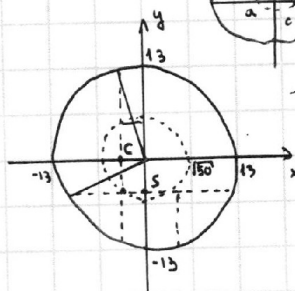
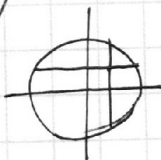
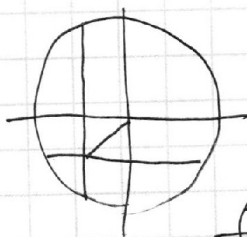
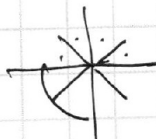
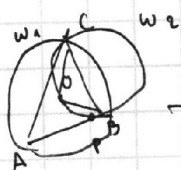
$$\begin{aligned} -5\sqrt{2} \cos \alpha &= c \\ -5\sqrt{2} \sin \alpha &= s \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x \leq c \\ y \geq s \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \geq c \\ y \leq s \end{cases}$$

п.8. 2А  $c \geq 13$   $-5\sqrt{2} \cos \alpha \geq 13$   
 $s \leq -13$   $-5\sqrt{2} \sin \alpha \leq -13$

$$\begin{aligned} c^2 + s^2 &= 25 \cdot 2 \cdot \cos^2 \alpha + 25 \cdot 2 \cdot \sin^2 \alpha = \\ &= 50 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 50 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{c^2 + s^2} = \sqrt{50} = 7\sqrt{2} \approx 9.9 < 8$$



1111a.

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 169 \\ 2 \\ \hline 238 \end{array}$$

$$3 + (2-3) + 4 + 5$$

$$\begin{array}{r} -238 \\ 50 \\ \hline 188 \end{array}$$

$$\begin{aligned} B &= mn6 \\ 6mn \\ m6n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= c3 \\ 3c \end{aligned}$$

$$y = -s$$

$$x = c$$

$$y = 5\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$x = 5\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$y^2 + 50 \cos^2 \alpha = 169$$

$$x^2 + 50 \sin^2 \alpha = 169$$

$$f(x) = 2x \quad x = \pm \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$d_1 = 2 \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$d_2 = 2 \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$

$$d_1 + d_2 = 2 (\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} + \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha})$$

$$(d_1 + d_2)^2 = 4 (169 - 50 \sin^2 \alpha + 169 - 50 \cos^2 \alpha + \dots)$$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) &= \max \\ (a^2 + c^2) + (b^2 + d^2) &= \min \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Значит, когда } b^2 + c^2 = a^2 + d^2$$

$$\sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= 2 \sin$$

$$\sin^2 \alpha$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 =$$

$$= 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$1 = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☐7  
☐СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

y - любое действительное

$$\begin{cases} x = -y + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{y}{3} + \frac{2k}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = \frac{y}{3} + \frac{2k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\delta) \arcsin \frac{-y+2k}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

-1 ≤ 1      -1 ≤ 1

Пусть  $n = \sin \alpha$   
 $-1 \leq n \leq 1$

$$-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x \geq -5\sqrt{2}\sqrt{1-n^2} \\ y \geq -5\sqrt{2}n \\ x \leq -5\sqrt{2}\sqrt{1-n^2} \\ y \leq -5\sqrt{2}n \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + y \geq -5\sqrt{2}(\sqrt{1-n^2} + n)$$

$$\Rightarrow x + y \leq -5\sqrt{2}(\sqrt{1-n^2} + n)$$

$$\begin{cases} y \geq -x - 5\sqrt{2}(\sqrt{1-n^2} + n) \\ y \leq -x - 5\sqrt{2}(\sqrt{1-n^2} + n) \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2} \sin \alpha &= m \\ 5\sqrt{2} \cos \alpha &= n \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \geq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0 \end{cases}$$

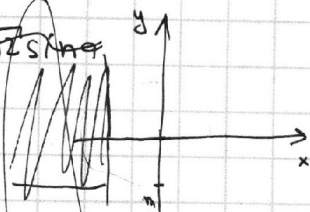
$$x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \leq y + 5\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\begin{cases} x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ -y \leq 5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$$

$$x - y \leq 5\sqrt{2}(\sin \alpha - \cos \alpha)$$

$$y \geq x - 5\sqrt{2}(\sin \alpha - \cos \alpha)$$



$$x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \geq y + 5\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\begin{cases} x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ -y \geq 5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$$

$$x - y \geq 5\sqrt{2}(\sin \alpha - \cos \alpha)$$

$$y \leq x - 5\sqrt{2}(\sin \alpha - \cos \alpha)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Черновик  
н1

$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a$$

$$B = mn6 = m6n = 6mn \rightarrow 100m + 10n + 6$$

$$C = \overline{c3} \text{ или } \overline{3c} \rightarrow \begin{matrix} 100m + 60 + n \\ 600 + 10m + n \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 10c + 3 & 30 + c \end{matrix}$$

$$1. A \cdot B \cdot C = 1111a \cdot (10c + 3) \cdot B$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 2 \\ y \neq -2 \end{cases}$$

$$\frac{y + x + 5}{xy} = \frac{\cancel{y+2} + x + 3 + 5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x + y + 5}{xy} = \frac{x + y + 5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow xy = (x-2)(y+2)$$

$$\begin{aligned} xy &= x\cancel{y} + 2x - 2y - 4 \\ 0 &= 2x - 2y - 4 \\ x - y - 2 &= 0 \\ x &= y + 2 \end{aligned}$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy =$$

$$= \cancel{232} (y+2)^3 - y^3 - 6(y+2)y =$$

$$= \cancel{y^3} + 6y^2 + 12y + 8 - \cancel{y^3} - 6(y^2 + 2y) =$$

$$= \cancel{6y^2} + 12y + 8 - \cancel{6y^2} - 12y = 8$$

н4

$$(y+2)(y+2)(y+2) =$$

$$= (y^2 + 4y + 4)(y+2) =$$

$$= y^3 + 2y^2 + 4y^2 + 8y + 4y + 8 =$$

$$= y^3 + 6y^2 + 12y + 8$$

\* n-однокл.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$C_n^4$  - кол-во  
вар-в выбрать 4-х  
челове

x-кол-во  
билетов  
в конце

$x > 4$

$C_{n-2}^2$  - кол-во случаев  
победы Васи и Пети

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} - \text{вер-ть в начале}$$

$$\frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} - \text{вер-ть в конце}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$6. \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$$

$$6. \frac{\frac{(n-2)!}{2!(n-2-2)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-2-x+2)!}}{\frac{n!}{x!(n-x)!}}$$

$$\frac{6 \cdot (n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \frac{4!(n-4)!}{n!} = \frac{n-2!}{(x-2)!(n-x)!} \cdot \frac{x!(n-x)!}{n!}$$

$$\frac{6 \cdot 4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)} \Rightarrow 6 \cdot 4 \cdot 3 = x(x-1)$$

$$x^2 - x - 72$$

$$D = 1 - 4$$

~3

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2(\pi x) + \sin(\pi x) \sin(\pi y) = \cos^2(\pi x) - \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$

8)  $\pi^2$

$$\cos(\pi x) \cos(\pi y) + \sin(\pi x) \sin(\pi y) = \cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x)$$

$$\cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(2\pi x)$$

$$\cos(\pi(x-y)) = \cos(\pi(2x))$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} & ① \\ \alpha = -\beta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} & ② \end{cases}$$

$$① \pi(x-y) = \pi(2x) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x-y = 2x + 2k$$

$$-y = x + 2k$$

$$x = -y - 2k$$

$$x = -y + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$② \pi(x-y) = -\pi(2x) + 2\pi k$$

$$x-y = -2x + 2k$$

$$3x = y + 2k$$

$$x = \frac{y}{3} + \frac{2k}{3}$$

$$x = \frac{y}{3} + \frac{2}{3}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\begin{aligned} \sin 60^\circ \sin 30^\circ + \cos 60^\circ \cos 30^\circ &= \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} &= \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \\ &= \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 90^\circ \sin 45^\circ + \cos 90^\circ \cos 45^\circ &= \\ = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 &= 0 = \\ = \cos(90^\circ) &= \\ = \cos 1 \end{aligned}$$

