



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

n - натур. число. $A \cdot B \cdot C = n^2$. Т.к. A - четырёхзнач. число, состоящее из одинак. цифр, его можно представить как $1111 \cdot a$, где a - это цифра из которой состоит число A .

$1111 = 11 \cdot 101$. 11 и 101 - простые множители числа n^2 . т.к. $1 \leq a \leq 9$, B, C должны содержать в себе множители 11. 101 число C - двузначное $\Rightarrow C : 101 \Rightarrow B : 101$.

Заметим, что все трехзначные числа кратные 101 имеют вид: $\overline{X0X}$, где X - цифра от 1 до 9, 6 числе есть.

$Y \Rightarrow B = 404$. В не кратно 11 $\Rightarrow C : 11$, все двузначные кратные 11 имеют вид \overline{YY} , где Y - две цифры от 1 до 9, 6 числе есть.

от 1 до 9, 6 числе есть $1 \Rightarrow B = 11 \Rightarrow A \cdot B \cdot C = 1111 \cdot a \cdot 404$.

$$11 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot a \cdot 4 = n^2 \Rightarrow a = 7^{2k+1}, \text{ где } k \text{ - целое } \geq 0.$$

$1 \leq a \leq 9 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow A = 4444 \quad B = 404 \quad C = 11$. Это единственный возможный вариант.

Ответ: (4444; 404; 11).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{По условию: } K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{(x-4)} + \frac{1}{(y+4)} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\text{Приведем к общему знаменателю: } \frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)} \quad \text{П.к. } y > 0 \text{ и } x > 0 \Rightarrow y+x+3 > 3.$$

Чисители одинаковы, следовательно, равны, если равны знаменатели:

$$xy = (x-4)(y+4) \Leftrightarrow xy = xy - 4y + 4x - 16$$

$y = x-4$. т. к. $y > 0 \Rightarrow x > 4$. $\text{Представим, получившееся выраж. для } y \text{ в выраж. для } M:$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 12xy = x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4) = \\ &= (x-x+4)(x^2 + x(x-4) + (x-4)^2) - 12x(x-4) = \\ &= 4 \cdot (3x^2 - 12x + 16) - 12x(x-4) = 12x^2 - 48x + 64 - \\ &- 12x^2 + 48x = 64 - \text{единственное возможное выраж.} \end{aligned}$$

для M .

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y.$$

$$\sin(\pi x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \Rightarrow (\sin \pi y - \sin \pi x) \cdot \sin \pi y = \\ = (\cos \sin(\frac{\pi}{2} + \pi y) + \sin(\frac{\pi}{2} + \pi x)) \sin \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y.$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y.$$

$$-\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi - 2\pi y) = \cos(\pi x - \pi y) \Leftrightarrow \begin{cases} \pi - 2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi k & (1) \\ \pi - 2\pi y = -\pi x + \pi y + 2\pi l & (2) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(1) \pi y + 2\pi k = \pi - \pi x \quad | : \pi \neq 0.$$

$$y + 2k = 1 - x.$$

$$y = -x + 1 - 2k.$$

$$(2) \pi - 2\pi y = -\pi x + \pi y + 2\pi k \quad | : \pi$$

$$1 - 2y = -x + y + 2k \Leftrightarrow 3y + 2k = 1 + x.$$

$$y = \frac{x+1-2k}{3}$$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) \in \left[\begin{array}{l} (x; -x+1-2k) \\ (x; \frac{x+1-2k}{3}) \end{array} \right] \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\delta_1 (x; -x+1-2k): \arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{-x+1-2k}{4} > -\frac{\pi}{2}.$$

~~$$\text{ОДЗ: } -4 \leq x \leq 4 \quad \text{и} \quad -4 \leq -x + 1 - 2k \leq 4 \quad \arccos x \in [0, \pi]$$~~

~~$$-4 \leq -x \leq 3 + 2k. \quad \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$~~

$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{x}{4} > -\frac{\pi}{2} \text{ выполнено при}$$

Outbox



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

всех (x, y) кроме случая, когда $\begin{cases} \arccos y = 0 \\ \arcsin y = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$x =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть k - кол-во одинаковых классиков. p_1 - вер. найти билет на концерт. p_2 - вер. не найти. Число билетов, x - число билетов в концертце.

$11 \cdot p_1 = p_2$. Тетя и Вова бросают кубики, если оба получат по билету после распределения.

$$p_1 = \frac{4}{k} \cdot \frac{3}{k-1} \quad p_2 = \frac{x}{k} \cdot \frac{x-1}{k-1} \quad 11 \cdot \frac{4 \cdot 3}{k \cdot (k-1)} = \frac{x(x-1)}{k \cdot (k-1)}$$

$$k > 1 \Rightarrow 11 \cdot 4 \cdot 3 = x \cdot (x-1) \quad x^2 - x - 11 \cdot 12 = 0,$$

$$x_1 = 12 \quad x_2 = -11 \quad x > 0 \Rightarrow x = 12.$$

м. к. не найти. числа билетов $p_1 \geq 11$ п. $p_2 \leq \frac{1}{14} = 9$

$$\Rightarrow p_1 \leq \frac{1}{11} \quad 12 \cdot 11 - k^2 + k \leq 0. \quad k^2 - k - 12 \cdot 11 \geq 0.$$

$k > 0 \Rightarrow k \geq 12 \Leftrightarrow$ один-об хотят бы 12, тогда при $x=12$

$p_2 \leq 1 \Rightarrow x = 12$ - ответ.

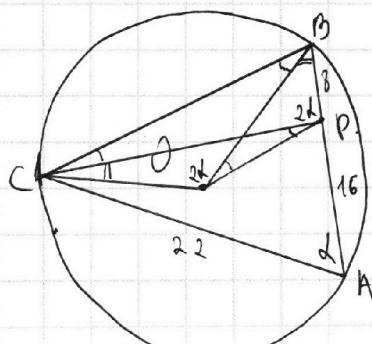
Ответ: 12.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} - ? \quad AP = 16, BP = 8, AC = 22.$$

A Решение:

$$\angle COB = \angle CPB = 2k \text{ (один внеш. остр. на } \cup \text{ с } CB \text{ и } CP \text{ в } W_2)$$

$$\angle CAB = \angle CPB \text{ (центр. и внеш. } \angle \text{ остр. на } \cup \text{ с } CB \text{ в } W_1)$$

$$\text{Таким } \angle B = \angle CPB.$$

$$\angle PCB = 180^\circ - \angle CPB - \angle CBP = 180^\circ - 2k - \angle B.$$

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle CAB - \angle CBP = 180^\circ - l - \angle B.$$

$$\begin{aligned} \angle ACP &= \angle ACB - \angle PCB = 180^\circ - \angle B - k - 180^\circ + 2k + \angle B = \\ &= k = \angle CAB \Rightarrow \angle CPA = p/2 \Rightarrow CP = PA = 16. \end{aligned}$$

но T косинусов для $\triangle ACP$:

$$CP^2 = AP^2 + CA^2 - 2AP \cdot CA \cdot \cos k.$$

$$\begin{aligned} \cos k &= \frac{AP^2 + CA^2 - CP^2}{2AP \cdot CA} = \frac{256 + 484 - 256}{2 \cdot 16 \cdot 22} = \frac{22 \cdot 22}{2 \cdot 16 \cdot 22} = \\ &= \frac{11}{16}. \end{aligned}$$

но T косинусов для $\triangle ABC$: $CB^2 = AB^2 + CA^2 - 2AB \cdot CA \cos k$

$$CB = \sqrt{576 + 484 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{11}{16}} = \sqrt{334}.$$

$$\sin k = \sqrt{1 - \cos^2 k} = \sqrt{\frac{256 - 121}{256}} = \frac{\sqrt{135}}{16}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin k = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{\sqrt{135}}{16} = \frac{99}{2} \sqrt{15}.$$

Ответ: $\frac{99}{2} \sqrt{15}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 36, & (2) \end{cases}$$

(1) решениями этого неравенства будут все точки, лежащие внутри окр. с ц. (0;0) и $R = 6$ или на ее границе.

$$(2) (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0.$$

$$\begin{cases} x + 4 \sin \alpha \leq 0, \\ y - 4 \cos \alpha \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \sin \alpha \\ y \geq 4 \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 4 \sin \alpha \geq 0, \\ y - 4 \cos \alpha \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \sin \alpha \\ y \leq 4 \cos \alpha \end{cases}$$

$x = -4 \sin \alpha$ и $y = 4 \cos \alpha$ — это прямые параллельные осям ординат и абсолюте соответственно. Точки, лежащие на этих прямых будут точками лежащими левее/правее; выше/ниже соответствующих прямых.

П.к. $-4 \sin \alpha$ и $4 \cos \alpha \in [-4; 4]$, прямые $x = -4 \sin \alpha$ и $y = 4 \cos \alpha$ разделят круг (1) на 4 сектора. Тогда решениями исходной системы будут точки лежащие в 2 секторах, причем расположенных противоположными м. пересечения прямых.

Тогда прямые $x = -4 \sin \alpha$ и $y = 4 \cos \alpha$ делят круг на 4 сектора, в секторах $\alpha \in [0, \pi]$ и $\alpha \in [\pi, 2\pi]$. Длина дуг на которых лежат эти прямые.

Между прямыми $x = -4 \sin \alpha$ и $y = 4 \cos \alpha$ угол $= 90^\circ \Rightarrow$
 \Rightarrow по теореме об угле между хордами сумма дуг $= 180^\circ \Rightarrow$
 \Rightarrow длина дуг на которые делят окружность есть постоянная и не зависит от α . Эта величина равна



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

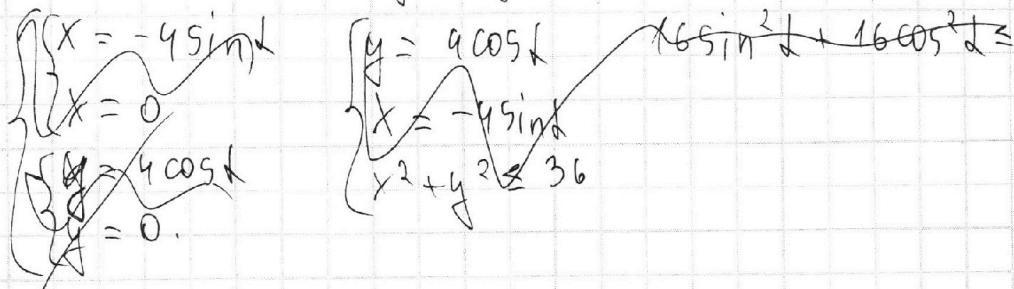
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

наибольшие длины окружности с $R=6$: $\int 2\pi R = 6\pi \Rightarrow$

\Rightarrow периметр $\Phi(d)$ максимален, если максимальна длина хорд. ~~стремится к~~ ~~длина хорд максимальна, если хорда - диаметр~~ \Rightarrow



Задача нахождения максимальной длины хорд эквивалентна задаче нахождения максимального аргумента $f(x) = |\cos x| + |\sin x|$ т.к. длина окружности определяется точкой $(0;0)$, как и единичная

$$f'(x) = -\sin x - \cos x \quad f'(x) = 0 \quad \sin x = -\cos x$$

$$\cos x = \sin(-x) \quad \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad x = -\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k.$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{при этом}$$

$$f''(x) = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}k, k \in \mathbb{Z} \quad f(x) \text{ максимально}$$

$$\text{при } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Длина хорд при этом: } 6 \cdot (\sin x + \cos x) = 6\sqrt{2} \Rightarrow R_{\text{хорд}} = 6\sqrt{1} + 6\sqrt{2} = 6(\sqrt{1} + \sqrt{2})$$

$$\text{Ответ: } 6(\sqrt{1} + \sqrt{2}) \text{ при } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+4 \sin \varphi)(y-4 \cos \varphi) \leq 0.$$

$$xy + 4y \sin \varphi - 4x \cos \varphi - 16 \sin \varphi \cos \varphi \geq 0.$$

$$y = \frac{8 \sin^2 \varphi + 4x \cos \varphi}{(x+4 \sin \varphi)(y-4 \cos \varphi)}$$

$$\begin{cases} x+4 \sin \varphi \leq 0. \\ y-4 \cos \varphi > 0. \\ x+4 \sin \varphi > 0. \\ y-4 \cos \varphi \leq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -4 \sin \varphi, & \sin \varphi = \cos \varphi \\ y > 4 \cos \varphi & \cos \varphi = \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) \\ x > -4 \sin \varphi \\ y \leq 4 \cos \varphi \end{cases}$$

$$\leq -4 \sin \varphi \cdot \cos \frac{\pi}{2} - 4 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \frac{\pi}{2} =$$

$$= -\frac{4\sqrt{2}}{2} (\sin \varphi + \cos \varphi) \quad y+x \geq 4(\cos \varphi - \sin \varphi) - x$$

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + \sin 2\varphi$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 + \sin^2 \varphi} \quad x = -4 \sin \varphi$$

$$y = 4 \cos \varphi$$

$$-4 \sin \varphi = 4 \cos \varphi \quad \sin \varphi = \cos \varphi.$$

$$\sin \varphi + \cos \varphi = 0. \quad \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos \varphi.$$

$$\tan \varphi = -1.$$

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \varphi + 2\pi k.$$

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = -\varphi + 2\pi k.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1 \cdot \cancel{24} \cdot \cancel{22}}{2 \cdot \cancel{48} \cdot 2} = \frac{33}{2}$$

Чтобы вычесть.

$$x, y > 0.$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{(x-4)} + \frac{1}{(y+4)} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{22}{22}$$

$$\frac{44}{44}$$

$$130 - x - 2L = 180 - x - L - B.$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow \begin{cases} y+x+3=0. \\ x-4 \neq 0. \\ xy=(x-4)(y+4) \end{cases} \begin{array}{l} y = -x-3 \\ x > 4. \\ B=L. \end{array}$$

$$xy = xy - 4y + 4x - 16. \quad y = x-4.$$

$$\frac{334}{16} \text{ к2}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = x^3 - (x-4)^3 - 12xy.$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

$$(x-x+4)(x^2 + x(x-4) + x^2 - 8x + 16) - 12xy(x-4) = \\ = 4 \cdot (3x^2 - 12x + 16) - 12x(x-4) = 12x^2 - 48x + 64 - \\ - 12x^2 + 48 = -48x + 112 \quad -48x + 112 > M \quad \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{array}$$

$$n-2 + (n-1) \cdot (n-2) =$$

$$= (n-2) \cdot n.$$

$$+ 2 + 2 \cdot (n-1) +$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ + 576 \\ \hline 484 \\ - 1060 \\ \hline 726 \\ \hline 334 \end{array}$$

$$M \in (-\infty; -80). \quad \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{array}$$

$$-48 \cdot 4 + 112 =$$

$$= -192 + 112 = -80.$$

$$6 \cdot 11 \cdot 11$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ 6 \\ \hline 726 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$A \cdot B \cdot C = \alpha^2 \cdot n^2$$

$$\text{т. } A = 1111 \cdot \bar{\alpha}$$

$$1111 =$$

$$B = \begin{bmatrix} 067 \\ 076 \\ 706 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$= 11 \cdot 101 =$$

?

$$\bar{\alpha} = 404 = 4 \cdot 101.$$

$$C = 11. \bar{\alpha} = 4 \quad A = 4444.$$

$$3) \arccos \frac{x}{y} - \arcs$$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cdot \cos \pi y.$$

$$\sin^2 \pi y \cdot \cos \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y - \cos^2 \pi y - \cos \pi x \cdot \cos \pi y = 0.$$

$$-\cos 2\pi y - \cos(\pi x - \pi y) = 0.$$

$$-\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$-\cos x = \cos(\pi x - \pi y) \quad \cos(\pi - 2\pi y) = \cos(\pi x - \pi y).$$

$$\pi - 2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi k,$$

$$\pi - 2\pi y = -\pi x + \pi y + 2\pi k.$$

наг.

$$\frac{n+4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \neq \frac{x \cdot (x-1)}{n \cdot (n-1)}$$

$$11 \cdot 4 \cdot 3 = x^2 - x.$$

$$x^2 - x - 132 = 0.$$

$$\begin{array}{r} 132 \\ 66 \\ 33 \\ 11 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$$

$$(x-12)(x+11)=0.$$

$$x=12.$$

$$\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$$

$$\frac{12}{12} \cdot \frac{11}{12} = 1.$$