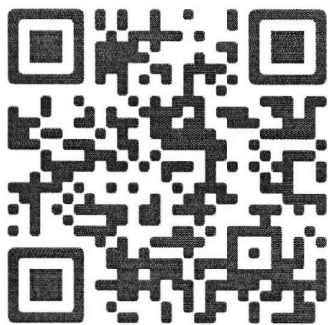




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пп.к. А - четырехзначное число, составленное из одинаковых цифр, то $A = 1111 \cdot a$, где $a = \overline{1,9}$

Значит, $A \cdot B \cdot C = x^2$, то $x^2 : 1111$, $x^2 : 11 \cdot 101 \Rightarrow x^2 : 11^2 \cdot 101^2$, т.к. 11 и 101 простые числа

Заметим, что А не может делиться на 11^2 и на 101^2 , т.к. иначе $A \geq 11 \cdot 1111 > 9999$ (максимального четырехзначного числа $(101 \cdot 1111)$)

Тогда либо В делится на 101, либо $C : 101$, но т.к. С - двузначное, то на 101 делится В. У В есть цифра 6, а единственное трехзначное число кратное 101 и имеющее цифру 6 - это 606. $\Rightarrow B = 606$

$B = 606$, значит $C : 11$, хотя бы 1 цифра ^{сравна} 3 $\Rightarrow C = 33$, т.к. это единственное двузначное число кратное 11 и имеющее цифру 3.

Получаем: $33 \cdot 606 \cdot a \cdot 1011 = x^2$, $3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2 \cdot a = x^2$
Значит 2а это квадрат натур. числа, $a = \overline{1,9} \Rightarrow a = 2$, либо $a = 8$

Значит возможны следующие тройки: $(2222; 606; 33)$
 $(8888; 606; 33)$

Ответ: $(2222; 606; 33); (8888; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$x, y > 0 \Rightarrow x+y+5 > 0$$

$$xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$y = x-2$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 6xy = x^3 - (x-2)^3 - 6(x-2)x = \\ &= x^3 - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 6x^2 + 12x = 6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x = \\ &= 8 \end{aligned}$$

Ответ: $M = 8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin \pi x (\sin \pi x + \sin \pi y) &= (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x \\ \sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y &= \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x \\ (\sin \pi x \sin \pi y + \cos \pi x \cos \pi y) &\div (\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) = 0 \\ \cos(\pi x - \pi y) - \cos 2\pi x &= 0 \\ -2 \sin \frac{\pi x - \pi y + 2\pi x}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y - 2\pi x}{2} &= 0 \\ \sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0 \\ \sin \frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\pi x - \pi y = 2\pi k \\ \pi x + \pi y = 2\pi n; \quad k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 2k; \\ x + y = 2n; \quad k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 2k \\ y = 2n - x \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

Для любого $x \in \mathbb{R}$ и любых целых k и n .

~~8)~~

$$\text{б) } \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$|\frac{x}{6}| \leq 1; \quad |\frac{y}{2}| \leq 1 \Rightarrow -6 \leq x \leq 6, \quad -2 \leq y \leq 2$$

$$\begin{aligned} \text{в) } 3x - y &= 2k \\ y &= -1 \\ 3x &= 2k + 1 \\ x &= \frac{2k+1}{3} \in \mathbb{Z} \\ y &\in \mathbb{Z}; \quad -1 \leq y \leq 1 \\ -6 &\leq \frac{2k+1}{3} \leq 6 \end{aligned}$$

$$\arcsin t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

Значит, чтобы $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$, то хотя бы одно из слагаемых должно быть меньше $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \arcsin \frac{x}{6} < \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{y}{2} < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\frac{x}{6}| \leq 1; \quad |\frac{y}{2}| \leq 1 \\ \frac{x}{6} \neq 1 \\ |\frac{y}{2}| \leq 1; \quad |\frac{x}{6}| \leq 1 \\ \frac{y}{2} \neq 1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $x+y=2n$ сумма двух целых чисел четна.

Это значит, что x и y одной четности.

$$|\frac{x}{6}| \leq 1; |\frac{y}{6}| \leq 1 \quad -6 \leq x \leq 6; -2 \leq y \leq 2$$

$x \in [-6; 6]$, среди них в этом промежутке

7 четных и 6 нечетных

$y \in [-2; 2]$, в этом промежутке 3 четных и 2 нечетных

Значит всего пар, сумма которых четна:

$$7 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 12 + 21 = 33.$$

Но заметим, что среди них есть варианты которые не подходят. Это когда $\frac{x}{6} = 1$ и $\frac{y}{2} = 1 \Rightarrow x=6$ и $y=2$ — 1 вариант.

Значит всего подходящих: $33 - 1 = 32$

2). $3x-y=2k$ разность двух целых чисел четна

Значит: $3x \equiv y$; $3x \equiv x \Rightarrow x \equiv y$, а значит

x и y одной четности, а это случай 1)

Ответ: ~~33~~. 32.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

m - кол-во ординариатиклассников.
 b - кол-во билетов в конце месяца.

Вероятность, что Васе и Пете достанется билет!
(в начале месяца)
 $\frac{4}{m} \cdot \frac{3}{m-1}$

Вероятность, что Васе и Пете достанется билет
в конце месяца:
 $\frac{b}{m} \cdot \frac{b-1}{m-1}$

Получаем: $b \cdot \frac{12}{m(m-1)} = \frac{b(b-1)}{m(m-1)}$

$$72 = b(b-1) \quad b^2 - b - 72 = 0 \quad (b-9)(b+8) = 0$$

$$b > 0 \Rightarrow b = 9$$

Ответ: 9 билетов

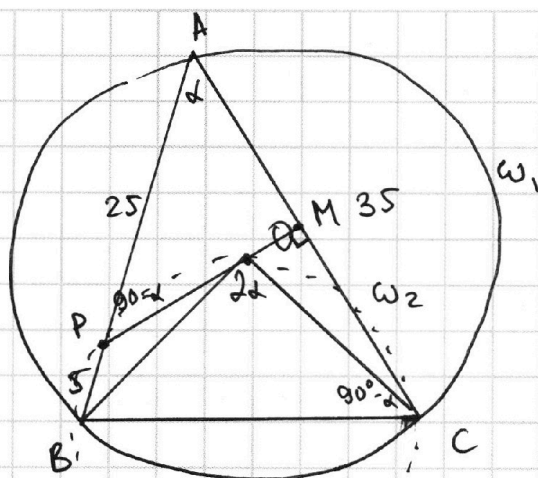


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1 $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha$
т.к. это центральная, ^{вписанной} опирающаяся на одну дугу.

$OC = OB$ (радиусы ω_1)
Значит $\angle OCB = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$

$\angle BOC$ - вписанной $\Rightarrow$
 $\angle BPO = 180 - \angle BCO = 90 + \alpha$
 $\angle OPA = 180 - \angle BPO = 90 - \alpha$

Продлим PO до пересечения с AC . $\angle ACP \cap PO = M$

Заметим, что $\angle PMA = 180 - \angle APM - \angle PAM = 180 - 90 + \alpha - \alpha = 90$

III.к. $OM \perp AC \Rightarrow M$ - это середина AC , т.к. O - центр $\triangle ABC$. Значит $AM = \frac{1}{2} AC = \frac{35}{2}$

Значит $\cos \angle PAM = \frac{AM}{AP} = \frac{\frac{35}{2}}{25} = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$

$\sin \angle PAM = \sqrt{1 - \cos^2 \angle PAM} = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} (AP + PB) \cdot AC \cdot \sin \angle PAM =$
 $= \frac{1}{2} (25 + 5) \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = \frac{30 \cdot 35 \sqrt{51}}{2 \cdot 10} = \frac{105 \sqrt{51}}{2}$

Ответ: $\frac{105 \sqrt{51}}{2}$

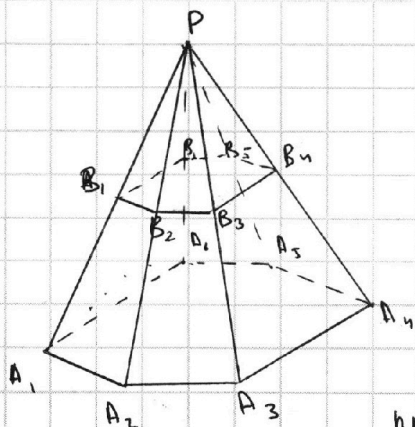


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



A_i - вершина нижнего основания
 B_i - вершина верхнего основания.
 n - кол-во вершин многоугольника основания.

Продлим $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ до пересечения.

$A_1B_1 \cap A_2B_2 \cap \dots \cap A_nB_n = P$

П.к. усеченная пирамида правильная, то $PB_1 = PB_2 = \dots = PB_n$
 $PA_1 = PA_2 = \dots = PA_n$

Рассмотрим сферу касящуюся всех ребер усеченной пирамиды. Заметим, что $A_1A_2B_1B_2, A_2A_3B_2B_3, \dots, A_{n-1}A_nB_{n-1}B_n, A_nA_1B_nB_1$ - вписанные трапеции, тогда $B_1B_2 + A_1A_2 = A_1B_1 + A_2B_2; \dots, A_iB_i + A_{i+1}A_{i+1} = A_iB_i + A_{i+1}B_{i+1}$
 ~~$A_1B_1 = A_2B_2 = \dots = A_nB_n, A_2B_2 = A_3B_3 = \dots = A_nB_n$~~

$$A_1B_1 = A_2B_2 = \dots = A_nB_n \Rightarrow B_1B_2 + A_2A_1 = A_2A_3 + B_2B_3 = \dots = A_nA_1 + B_nB_1$$

$$\frac{PB_1}{PA_1} = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{PB_i}{PA_i} = \frac{B_iB_{i+1}}{A_iA_{i+1}}; \quad PB_1 = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} \cdot PA_1 \quad B_1B_2 = \frac{PB_1}{PA_1} \cdot A_1A_2$$

$$B_1B_2 + A_1A_2 = A_1A_2 \left(1 + \frac{PB_1}{PA_1} \right)$$

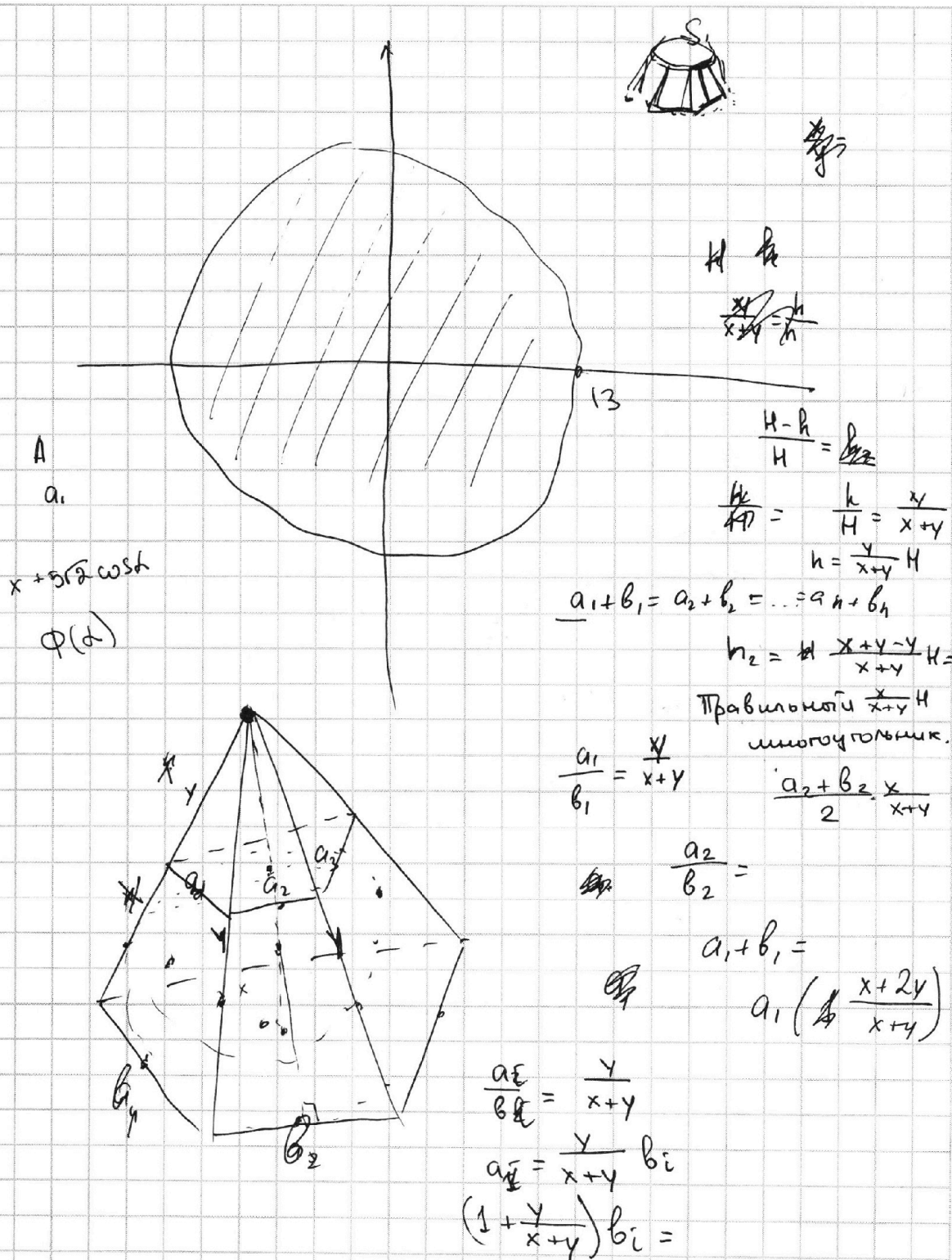
$$\frac{B_iB_{i+1}}{A_iA_{i+1}} = \frac{PB_1}{PA_1}$$

$$B_iB_{i+1} = \frac{PB_1}{PA_1} \cdot A_iA_{i+1}$$

$$B_iB_{i+1} + A_iA_{i+1} = A_iA_{i+1} \left(\frac{PB_1}{PA_1} + 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_nA_1$$

Значит $A_1 \dots A_n, B_1 \dots B_n$ - правильные многоугольники





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

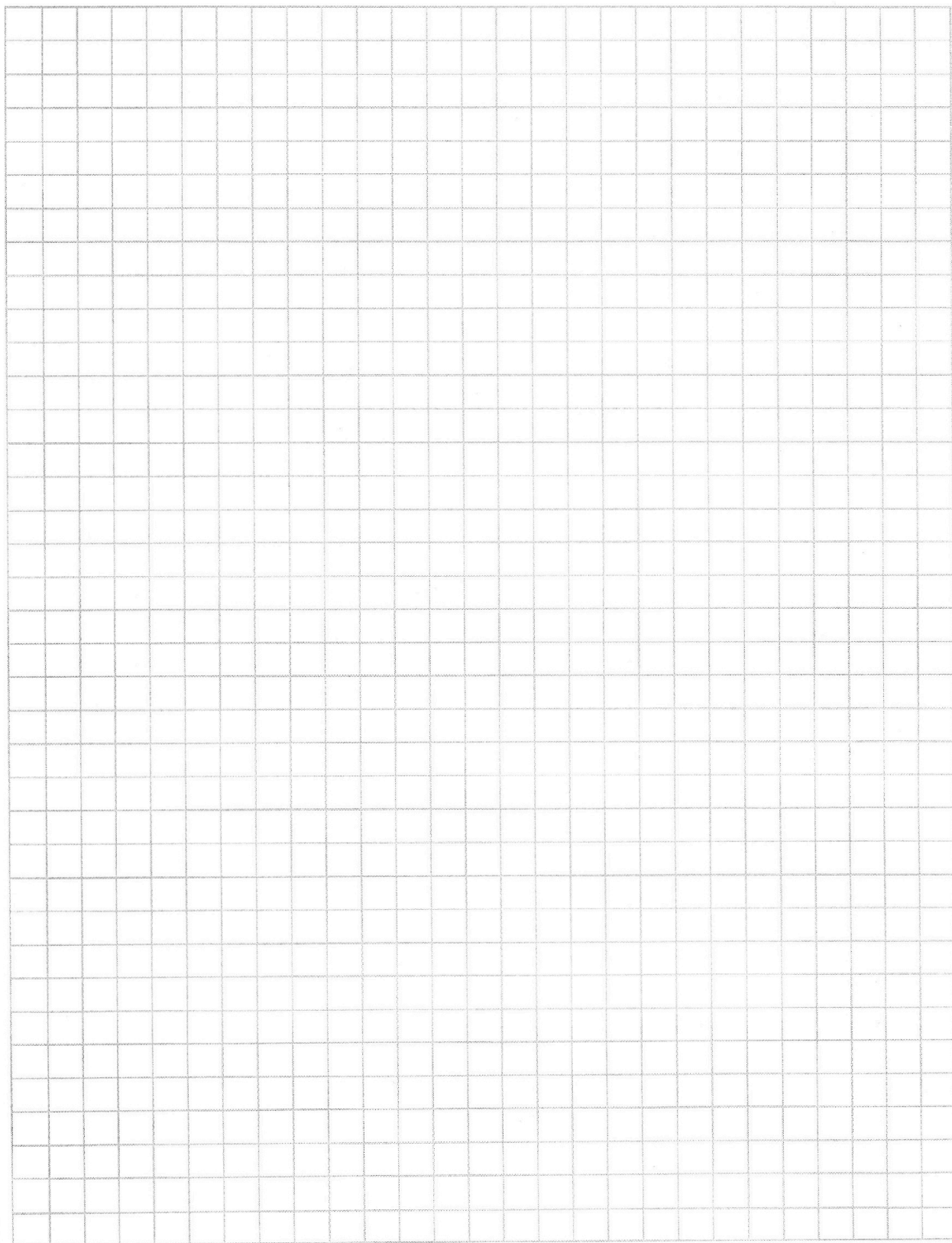
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $x+y=2n$, сумма двух ~~нечетных~~^{целых} чисел четна.

Это значит, что x и y одной четности.

$$\left| \frac{x}{6} \right| \leq 1 \quad \left| \frac{y}{2} \right| \leq 1 \quad -6 \leq x \leq 6; -2 \leq y \leq 2$$

Четных x - 7 вариантов; нечетных - 6

Четных y - 3 варианта; нечетных - 2.

Значит всего: $7 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 12 + 21 = 33$

Но нам не подходят варианты когда ~~либо~~ $x=6$, ~~либо~~ $y=2$

Когда $x=6$ нам не подходит 3 варианта
Когда $y=2$ нам не подходит 4 варианта
~~Итого~~ Когда $x=6, y=2$ - 1 вариант.

Всего подходящих: ~~33 + 3 + 4 + 1 = 41~~ $33 - 1 = 32$

2) $3x - y = 2k$; $\begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -18 \leq 3x \leq 18 \\ -2 \leq -y \leq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -20 \leq 3x - y \leq 20 \\ -2 \leq -y \leq 2 \end{cases}$

$\begin{cases} -10 \leq k \leq 10 \\ -2 \leq -y \leq 2 \end{cases}$ $3x - y = 2k$

Рассмотрим подходящие пары $(x; y)$

разной четности. (одинаковой мы рассмотрим в 1) случае)

1. $k = -10$; $3x = 20 + y$; $-20 + y \leq 0$ $y \leq -2$ $y = -2$ $x = 6$ $(6, -2)$ - не подходит, $x \leq 6$
2. $k = -9$; $3x = 18 + y$; $y = 0$; $x = 6$ $(6, 0)$ - одной четности x
3. $k = -8$; $3x = 16 + y$; $-16 + y \leq 3$ $y \leq 1$
4. $k = -7$; $3x = 14 + y$; $-14 + y \leq 3$ $y \leq 2$
5. $k = -6$; $3x = 12 + y$; $-12 + y \leq 3$ $y \leq 3$ $y = 0$; $x = 4$
6. $k = -5$; $3x = 10 + y$; $-10 + y \leq 3$ $y \leq 4$
7. $k = -4$; $3x = 8 + y$; $-8 + y \leq 3$ $y \leq 5$ $y = 2$
8. $k = -3$; $3x = 6 + y$; $-6 + y \leq 3$ $y \leq 6$ $y = 0$; $x = 2$
9. $k = -2$; $3x = 4 + y$; $-4 + y \leq 3$ $y \leq 7$ $y = 1$
10. $k = -1$; $3x = 2 + y$; $-2 + y \leq 3$ $y \leq 8$ $y = 2$
11. $k = 0$; $3x = 0 + y$; $y \leq 3$ $y = 0$; $x = 0$
12. $k = 1$; $3x = 2 + y$; $2 + y \leq 3$ $y \leq 1$ $y = 1$
13. $k = 2$; $3x = 4 + y$; $4 + y \leq 3$ $y \leq 2$ $y = 2$
14. $k = 3$; $3x = 6 + y$; $6 + y \leq 3$ $y \leq 3$ $y = 0$; $x = 2$
15. $k = 4$; $3x = 8 + y$; $8 + y \leq 3$ $y \leq 4$ $y = 1$
16. $k = 5$; $3x = 10 + y$; $10 + y \leq 3$ $y \leq 5$ $y = 2$
17. $k = 6$; $3x = 12 + y$; $12 + y \leq 3$ $y \leq 6$ $y = 0$; $x = 4$

$3x - y$ равно четному числу; значит x и y одной четности, а это 1) случай.

Значит всего вариантов: 32

Ответ: 32

$$\frac{x}{6} = 1 +$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+y=2n \\ 3x-y=2k \end{cases}$$

Если хотя бы 1 значение
меньше $\frac{\pi}{2}$

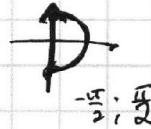
$$\arcsin \frac{x}{6} < \frac{\pi}{2}$$

$$\left| \frac{x}{6} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{y}{2} \right| \leq 1$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{2n-x}{2} < \pi$$



$$\begin{aligned} \arcsin a &= \alpha \\ \sin \alpha &= a \end{aligned}$$

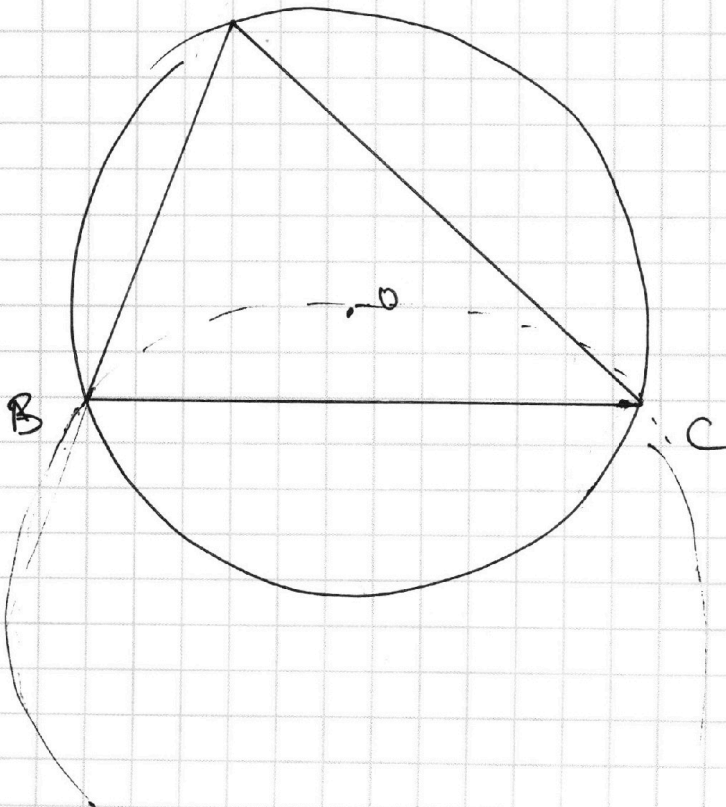
$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$x \leftarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin$$

$$\begin{aligned} -6 &\leq x \leq 6 \\ -2 &\leq y \leq 2 \\ &A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= 2n \\ y &= \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

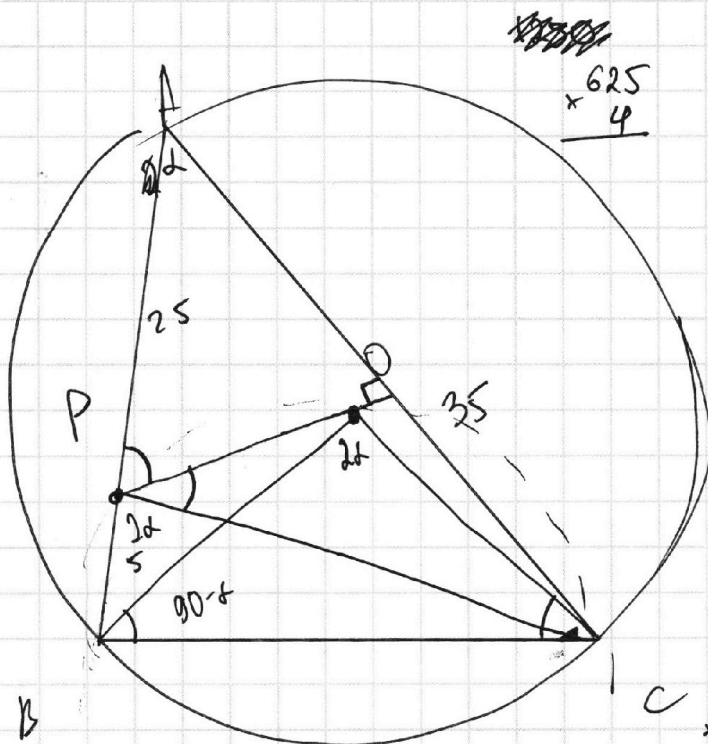
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos \alpha = \frac{\frac{35}{2}}{25} =$$

$$\frac{35}{50} =$$

$$\frac{7}{10}$$

$$\frac{\sqrt{100-49}}{10} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$



$S_{ABC} = ?$

$$\begin{array}{r} 1250 \\ 2500 \\ \hline 1225 \\ \hline 1275 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 625 \\ 1250 \\ \hline 1285 \\ 25 \\ \hline 2 \end{array}$$

625 -

$$\begin{array}{r} 2 \\ 35 \\ \hline 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$\begin{array}{r} 1275 \\ \hline 125 \\ \hline 25 \end{array}$$

50 35

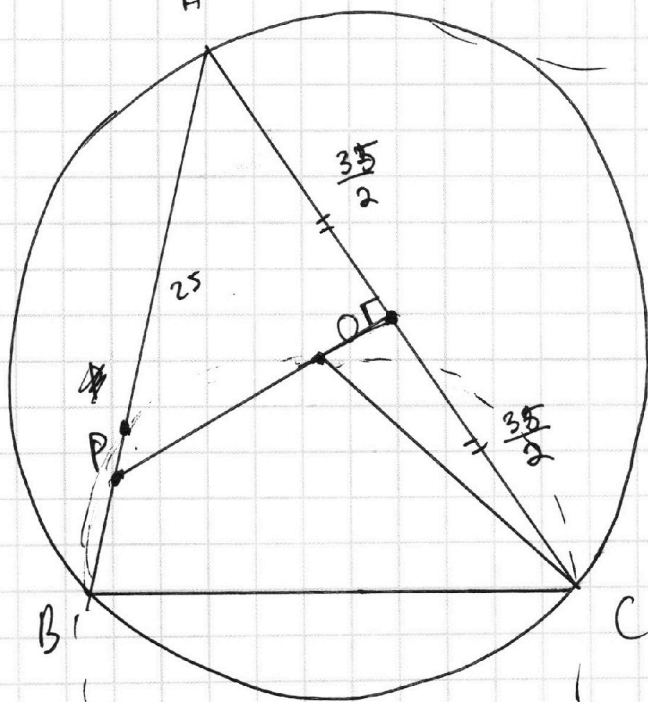
$$\begin{array}{r} 28 \\ 10 \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 576 \\ + 49 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ 49 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 625 - \frac{1225}{2} \\ \hline 1250 - 1225 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\frac{25}{2} =$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A - ~~четырех~~ ^{двух} ~~аааа~~

B - ^{хотел бы} ~~трех~~ ^{одна цифра} ~~на~~ 6.

C - ^{хотел бы} ~~двух~~ ^{1 и 2 цифр} ~~на~~ - 3 ~~на~~

A · B · C - кварра

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ \underline{11} \\ 0 \end{array}$$

$$A \cdot 1111 = 101 \cdot 11 \cdot A$$

$$B \cdot C : 101 \cdot 11$$

$$B \cdot 1111$$

B - ~~трех~~ ^{двух} ~~на~~

$$C : 101 \quad C : 11 \Rightarrow C = 3 \cdot 11$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$$

$$B : 101 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \quad 606 = 6 \cdot 101$$

$$3 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101 \cdot A$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2A = x^2$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy - ?$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\begin{cases} x+y+5 \neq 0 \\ xy = (x-2)(y+2) \end{cases}$$

$$\cancel{xy} = \cancel{xy} - 2y + 2x - 4$$

$$\cancel{x} - 2y = 5$$

$$y = x - 2$$

$$y = -x - 5$$

$$x^3 - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 6(x-2)x$$

$$6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x \quad (x-2)(x^2 + 2x + 4) - 6x(x-2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\cos(\pi(x-y)) = \cos 2\pi x$$

$$\cos(\pi(x-y)) - \cos(2\pi x) = 0$$

$$-2 \sin \frac{\pi x - \pi y + 2\pi x}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y - 2\pi x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} \sin \frac{\pi y + \pi x}{2} = 0$$

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \pi k,$$

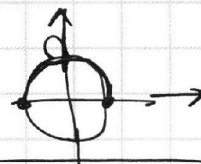
$$\frac{\pi y + \pi x}{2} = \pi k$$

$$3x - y = 2k,$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{2y-x}{2} < \pi$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{36}}} \cdot \frac{1}{6}$$



$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\cos(\pi x - \pi y) = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \cos 2\pi x$$

$$\cos(\pi x - \pi y) - \cos 2\pi x = 0$$

$$-2 \sin \frac{\pi x - \pi y + 2\pi x}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y - 2\pi x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \pi k$$

$$k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x - y}{2} = k$$

$$3x - y = 2k$$

$$x + y = 2n$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $3x - y = 2k$

~~$y = 2k - 3x$~~ ~~$3x - y = 2k$~~

1.1) $\begin{cases} |\frac{x}{6}| \leq 1 \\ |\frac{y}{2}| \leq 1 \\ \frac{x}{6} \neq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} -6 \leq x \leq 6, \\ -2 \leq y \leq 2, \\ 3x - y = 2k \end{cases}$

$\begin{cases} -6 \leq x \leq 5 \\ -2 \leq y \leq 2 \\ 3x - y = 2k \end{cases}$

$\begin{cases} -18 \leq 3x \leq 15 \\ -2 \leq -y \leq 2 \\ 3x - y = 2k \end{cases}$

$\begin{cases} -20 \leq 3x - y \leq 17 \\ -2 \leq -y \leq 2 \\ 3x - y = 2k \end{cases}$

$\begin{cases} -20 \leq 2k \leq 17 \\ -2 \leq -y \leq 2 \\ 3x - y = 2k \end{cases}$

$\begin{cases} -10 \leq k \leq \frac{17}{2} \\ -2 \leq -y \leq 2 \\ 3x - y = 2k \end{cases}$

$\begin{cases} -10 \leq k \leq 8 \\ -2 \leq -y \leq 2 \\ 3x - y = 2k \end{cases}$

1. ~~$k = -10$~~
2. ~~$k = -9$~~
3. ~~$k = -8$~~
4. ~~$k = -7$~~
5. ~~$k = -6$~~
6. ~~$k = -5$~~
7. ~~$k = -4$~~
8. ~~$k = -3$~~
9. ~~$k = -2$~~

1. $k = -10$

$3x - y = -20$

1.1) $y = -2$ $3x + 2 = -20$, $3x = -22$ $x = -\frac{22}{3} \notin \mathbb{Z}$

1.2) $y = -1$ $3x + 1 = -20$, $3x = -21$ $x = -7$; $|\frac{x}{6}| \neq 1$

1.3) $y = 0$ $3x = -20$; $x = -\frac{20}{3}$ $x \notin \mathbb{Z}$

1.4) $y = 1$ $3x - 1 = -20$; $x = -\frac{19}{3} \notin \mathbb{Z}$

1.5) $y = 2$ $3x - 2 = -20$; $x = -6$ $\text{нодхогум. } (-6; 2)$

2. $k = -9$

$3x = -18 + y$ $-18 + y : 3 \Rightarrow y : 3 \Rightarrow y = 0$

$3x = 18 \Rightarrow x = 6$, ~~$x = 6$~~ нодхогум.

3. $k = -8$

$3x = -16 + y$ $-16 + y : 3 \Rightarrow y \equiv 16 \equiv 1 \Rightarrow y = 1$

$3x = -16 + 1 = -15$ $x = -5$ $\text{нодхогум. } (-5; 1)$

$3x = -16 - 2 = -18$ $x = -6$ $\text{нодхогум. } (-6; -2)$

4. $k = -7$

~~$3x = -14 + y$~~ $-14 + y : 3 \Rightarrow y \equiv 14 \equiv -1 \Rightarrow y = -1$

~~$3x = -14 - 1 = -15$~~ $x = -5$ $\text{нодхогум. } (-5; -1)$

~~$3x = -14 + 2 = -12$~~ $x = -4$ $\text{нодхогум. } (-4; 2)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

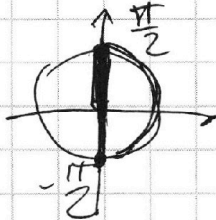
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| \frac{x}{6} \right| + 1$$

$$\frac{2x-1}{3} = 6$$

$$3+3+4+5=15$$



$$2 \geq y \geq -2$$

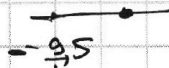
$$-2 \leq -y \leq 2$$

$$7+6+6=22$$

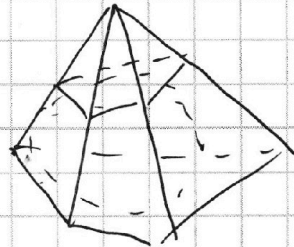
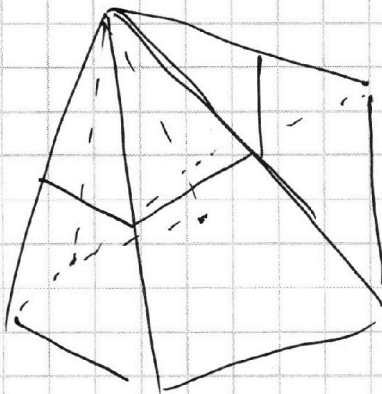
$$\frac{4}{m} \cdot \frac{3}{m-1}$$

$$6 \cdot \frac{4}{m} \cdot \frac{3}{m-1} = \frac{6}{m} \cdot \frac{6-1}{m-1}$$

$$2 \cdot 72 = 6(6-1)$$
$$b^2 - b$$



$$\frac{72}{9 \cdot 8}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

2 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. $k = -6$

$$3x = -12 + y; \quad -12 + y \equiv 0 \Rightarrow -12 \equiv y \equiv 0 \Rightarrow y = 0$$

$$3x = -12; \quad x = -4; \quad (-4; 0) - \text{нодхорум}$$

6. $k = -5$

$$3x = -10 + y; \quad -10 + y \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 10 \equiv 1 \quad y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$3x = -10 - 2 = -12; \quad x = -4; \quad (-4; -2) - \text{нодхорум}$$

$$3x = -10 + 1 = -9; \quad x = -3; \quad (-3; 1) - \text{нодхорум}$$

7. $k = -4$

$$3x = -8 + y; \quad -8 + y \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 8 \equiv 2 \Rightarrow y = 2$$

$$3x = -8 - 1 = -9; \quad x = -3; \quad (-3; -1) - \text{нодхорум}$$

$$3x = -8 + 2 = -6; \quad x = -2; \quad (-2; 2) - \text{нодхорум}$$

8. $k = -3$

$$3x = -6 + y; \quad -6 + y \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 6 \equiv 0 \Rightarrow y = 0$$

$$3x = -6; \quad x = -2; \quad (-2; 0) - \text{нодхорум}$$

9. $k = -2$

$$3x = -4 + y; \quad -4 + y \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 4 \equiv 1 \Rightarrow y = 1$$

$$3x = -4 - 2 = -6; \quad x = -2; \quad (-2; 1) - \text{нодхорум}$$

$$3x = -4 + 1 = -3; \quad x = -1; \quad (-1; -2) - \text{нодхорум}$$

10. $k = -1$

$$3x = -2 + y; \quad -2 + y \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 2 \Rightarrow y = 2$$

$$3x = -2 - 1 = -3; \quad x = -1; \quad (-1; -1) - \text{нодхорум}$$

$$3x = -2 + 2 = 0; \quad x = 0; \quad (0; 2) - \text{нодхорум}$$

11. $k = 0$

$$3x = y; \quad y \equiv 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 0; \quad (0; 0) - \text{нодхорум}$$

12. $k = 1$

$$3x = 2 + y; \quad 2 + y \equiv 0 \Rightarrow y \equiv -2 \Rightarrow y = -2$$

$$3x = 2 - 2 = 0; \quad x = 0; \quad (0; -2) - \text{нодхорум}$$

$$3x = 2 + 1 = 3; \quad x = 1; \quad (1; 1) - \text{нодхорум}$$

13. $k = 2$

$$3x = 4 + y; \quad 4 + y \equiv 0 \Rightarrow y \equiv -4 \equiv -1 \Rightarrow y = -1$$

$$3x = 4 - 1 = 3; \quad x = 1; \quad (1; -1) - \text{нодхорум}$$

$$3x = 4 + 2 = 6; \quad x = 2; \quad (2; 2) - \text{нодхорум}$$

14. $k = 3$

$$3x = 6 + y; \quad 6 + y \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 0 \Rightarrow y = 0$$

$$3x = 6; \quad x = 2; \quad (2; 0) - \text{нодхорум}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☒ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 6

☒ 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15. $k=4$; $3x=8+y$; $8+y \equiv 0$; $y \equiv -8$; $y \equiv 1 \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-2 \end{cases}$ $3x=8+1=9$ $x=3$ $(3; 1)$
 $3x=8-2=6$ $x=2$ $(2; -2)$
16. $k=5$; $3x=8+y$; $10+y \equiv 0$; $y \equiv -10$; $y \equiv -1 \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ y=2 \end{cases}$ $3x=8-1=7$ $x=3$ $(3; -1)$
 $3x=8+2=10$ $x=4$ $(4; 2)$
17. $k=6$; $3x=8+y$; $y \equiv 0$; $y \equiv 0$; $3x=12$; $x=4$ $(4; 0)$
18. $k=7$; $3x=14+y$; $14+y \equiv 0$ $y \equiv 1$ $\Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-2 \end{cases}$ $14+1=3x=15$ $x=5$ $(5; 1)$
 $14-2=12=3x$ $x=4$ $(4; -2)$
19. $k=8$; $3x=16+y$; $16+y \equiv 0$ $y \equiv 2$ $\Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=-1 \end{cases}$ $16+2=3x=18$ $x=6$ - не подходит.
 $16-1=15=3x$ $x=5$ $(5; 2)$

Таким образом всего подходящих решений в этом случае: 29

$$\begin{aligned} 1.2) \quad & \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \\ -18 \leq 3x-y \leq 20 \\ -1 \leq -y \leq 2 \\ 3x-y=2k \end{cases} \quad \begin{cases} -18 \leq 3x \leq 18 \\ -2 \leq y \leq 1 \\ 3x-y=2k \\ -18 \leq 2k \leq 20 \\ -1 \leq -y \leq 2 \\ 3x-y=2k \end{cases} \quad \begin{cases} -18 \leq 3x \leq 18 \\ -1 \leq -y \leq 2 \\ 3x-y=2k \\ -\frac{19}{2} \leq k \leq 10 \\ -1 \leq -y \leq 2 \\ 3x-y=2k \end{cases} \quad \begin{cases} -9 \leq k \leq 10 \\ -1 \leq -y \leq 2 \\ 3x-y=2k \end{cases} \end{aligned}$$

при $k \in [-9; 8]$ всех пар $(x; y)$ не годятся, т.к. они были рассмотрены в случае 1.1)

$k=9$ $8+y=3x$; $18+y:3 \Rightarrow y \equiv 0$, т.к. $y:3$

$x=6$ $(6; 0)$

$k=10$ $20+y=3x$ $20+y:3 \Rightarrow y \equiv 1$ $\begin{cases} y=1 \\ y=-2 \end{cases}$

$3x=21$ $x=7$, но $x \leq 6$

$3x=18$ $x=6$, $(6; -2)$

2) $x+y=2n$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

m - одиннадцатиклассников b - билетов.

$$\frac{m!}{(m-b)!}$$

$(3x) - (4)$

13

$$1 \text{ билет} \rightarrow m$$

$$2 \text{ билет} \rightarrow m-1$$

$$b \text{ - билет} \rightarrow m-b+1$$

$$\frac{m!}{(m-b)!}$$

$$12 \cdot \frac{(m-2)!}{m!} =$$

$$= \frac{12}{m(m-1)}$$

4 билета изначально
 b билетов после.

$$6 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot \frac{(m-2)!}{(m-4)!}}{\frac{m!}{(m-4)!}} = \frac{b(b-1) \frac{(m-2)!}{(m-b+2)!}}{\frac{m!}{(m-b)!}}$$

$$\frac{12}{72}$$

$$96 \cdot \frac{(m-2)!}{(m-4)!} \cdot \frac{(m-4)!}{m!} = b(b-1) \frac{(m-2)!}{(m-b+2)!} \cdot \frac{(m-b)!}{m!}$$

$$96 = b(b-1) \frac{(m-b)!}{(m-b+2)!}$$

$$b(b-1) \rightarrow \frac{(m-b)!}{(m-b+2)!}$$

$$96(m-b+2)! = b(b-1)(m-b)!$$

$$96(m-b+1)(m-b+2) = b(b-1)$$

$$b = 4 + x$$

$$96 = 3 \cdot 32$$

$$96(m^2 - mb + 2m - bm + b^2) = 96$$

$$72 \cdot \frac{(m-2)!}{(m-4)!} \cdot \frac{(m-4)!}{m!} = b(b-1) \frac{(m-2)!}{(m-b+2)!} \cdot \frac{(m-b)!}{m!}$$

$$72 \frac{(m-2)!}{m!} = b(b-1) \cdot \frac{(m-2)!}{m!} \cdot \frac{(m-b)!}{(m-b+2)!}$$

$$72 = b(b-1)(m-b)!$$

$$72(m-b+2)(m-b+1) = b(b-1)$$

$$b = 4 + x$$

$$72(m-4+x+2)(m-4-x+1) = (4+x)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

m - одиннадцатиклассников.

4

6

~~4~~

6:

4m

4.3.2

1.2

...

...

0.3 2.4 5

1.3 2.3

$$m \cdot (m-2) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$$

$\frac{m!}{(m-4)!}$ - всего вариантов распределения.

$$\frac{m!}{(m-4)!}$$

1 2

3	24
2	13 25
	14 23
	14 25
	15 23
	15 24

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{m!}$$

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{m!}$$

1 2 3 4

$(m-2)$
2

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot (m-2) \cdot (m-1)}{m!}$$

~~6~~

$$b \cdot (b-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$$

$$b(b-1) \cdot \frac{(m-2)!}{(m-b)!}$$

$$\frac{m!}{(m-b)!} \cdot m \text{ одноклассников}$$

$$\frac{12 \cdot (m-2)^{\frac{1}{2}} \cdot (m-1) \cdot (m-4)! \cdot (m-3)}{m! \cdot (m-3)}$$

$$\frac{(m-1)! \cdot 12}{m! \cdot (m-3)} = \left(\frac{12}{m(m-3)} \right)$$

начально

$$72(m-b+1)(m-b+2) = b(b-1)$$

$$72(m^2 - 2mb + b^2 + 2m - 2b + m - b + 2) = b^2 - b$$

$$72m^2 - 144mb + 72b^2 + 144m - 144b + 72m - 72b + 144$$