



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = 2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -8$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a - b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$.
6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 4$, $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$, $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$, $CN = 2\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① По условию $x^2 + px + q = f(x)$, и надо найти сумму его корней ($-p$).

$$x^2 + px + q = 2x^2 \Rightarrow -x^2 + px + q = -(x^2 - px - q) = 0 \text{ — имеет одно решение, тогда}$$

$$x^2 - px - q \text{ — полный квадрат} \Rightarrow -q = \frac{p^2}{4}$$

$$\text{Аналогично } x^2 + px + q = -8 \Rightarrow x^2 + px + q + 8 = 0 \text{ — полный квадрат, } \Rightarrow q + 8 = \frac{p^2}{4}$$

$$\text{Суммируем полученные равенства: } \frac{1}{2}p^2 = 8, \text{ т.е. } p = \pm 4; q = -4.$$

$$\text{Подставим } p \text{ и } q: x^2 \pm 4x - 4 = 2x^2 \Rightarrow -x^2 \pm 4x - 4 = -(x^2 \mp 4x + 4) = -(x \mp 2)^2 = 0$$

$$x^2 \pm 4x - 4 = -8 \Rightarrow x^2 \pm 4x + 4 = (x \pm 2)^2 = 0$$

Эти выражения имеют по одному корню $\Rightarrow$ оба значения 4 и -4 подходят для p . Тогда возможны две суммы корней уравнения $S(x) = 0$: 4 и -4.

Ответ:

4 ; -4



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

②

$$n = 2^{401} \cdot 3^{500} = x \cdot y; y : x.$$

Очевидно, что числа x и y имеют вид $x = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1}$ и $y = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2}$, причем $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ — неотрицательные целые числа. Тогда $\alpha_2 \geq \alpha_1, \beta_2 \geq \beta_1, (y : x), \alpha_1 + \alpha_2 = 401, \beta_1 + \beta_2 = 500$.
Отсюда $\alpha_2 \geq \frac{401}{2}, \beta_2 \geq \frac{500}{2} \Rightarrow \alpha_2 \geq 201, \beta_2 \geq 250$. Заметим, что α_1 и β_1 однозначно определяются через α_2 и β_2 соотв., но α_1 и β_1 независимы. Так как $401 \geq \alpha_2 \geq 201$ и $500 \geq \beta_2 \geq 250$, способов выбрать α_2 и β_2 равно 201 и 251 соотв.; а общее количество способов выбрать x и y — равно $201 \cdot 251 = 50451$

Ответ: 50451



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③ y обратная логарифм должно быть положительное число, т.е. $x > 0$ и $y > 0$, а также $x \neq 1$ и $y \neq 1$.

$$0 = \log_x 2 + 3 \log_3 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = \frac{1}{\log_2 x} + \frac{3}{\log_3 y} + \frac{4}{\log_{xy} \frac{1}{16}} = \frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 xy}$$

Заменим $a = \log_2 x$, $b = \log_2 y$, $\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y = a + b$ ~~$\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y = a + b$~~

$$0 = \frac{1}{a} + \frac{9}{b} - \frac{16}{a+b} \Leftrightarrow \frac{9a+b}{ab} = \frac{16}{a+b} \Leftrightarrow (9a+b)(a+b) = 16ab \Leftrightarrow 9a^2 + b^2 - 6ab = 0 \Leftrightarrow (3a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3a = b$, т.е. $3 \log_2 x = \log_2 y$, откуда $x^3 = y$.

~~Система:~~ Система:
$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} > \frac{3 \cdot x^3 - 3}{7 \cdot x^3 + 7} \\ x \leq 31, x > 1 \end{cases}$$
 ($x > 1$, т.к. x — целое, $x \neq 0$, $x \neq 1$)

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{x^3-1}{x^3+1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}; \text{ т.к. } x > 1, \frac{x-1}{x+1} > 0, \text{ получим } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{3}{7} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \Leftrightarrow 7(x^2-x+1) > 3(x^2+x+1), \text{ т.к. } x^2-x+1 > 0 \text{ при } x > 1$$

В итоге $4x^2 - 10x + 4 = 2(2x-1)(x-2) > 0$ — неравенство верно при $x > 2$.

$2 < x \leq 31$ — отсюда количество значений x — 29, а y однозначно определяется через x .

Ответ: 29.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) или ~~хотя~~ перестановки a на b , b на a система не меняется. Пусть $a > b$ ($a \neq b$, т.к. $\text{НОД}(a; b) > 0$)

тогда система:
$$\begin{cases} 4b = 3(a-b)^2 \\ 3a = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

$$\text{НОК}(a; b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a; b)} \Rightarrow 3a = \frac{ab}{\text{НОД}(a; b)} \Rightarrow b = 3 \text{НОД}(a; b)$$

$$4b = 3(a-b)^2 = 12 \text{НОД}(a; b) \Rightarrow (a-b)^2 = 4 \text{НОД}(a; b).$$

Если $\text{НОД}(a; b) = \text{НОД}(a; b)$, то $a-b = k \cdot \text{НОД}(a; b)$. Проверим:

$$k^2 \cdot \text{НОД}(a; b) = 4 \Rightarrow \begin{cases} k=1, \text{НОД}(a; b)=4 \\ k=2, \text{НОД}(a; b)=1 \end{cases}$$

при $k=1$:

$$a-b=4, \text{НОД}(a; b)=4 \Rightarrow b=3 \cdot 4=12, a=b+4=16.$$

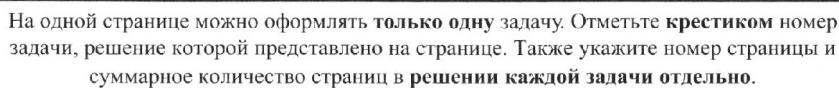
при $k=2$:

$$a-b=2, \text{НОД}(a; b)=1 \Rightarrow b=3 \cdot 1=3, a=b+2=5.$$

Проверим:
$$\begin{cases} 4 \cdot 12 = 3 \cdot (16-12)^2 \\ 3 \cdot 16 = \text{НОК}(12, 16) = 48 \end{cases} - \text{верно}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot 3 = 3 \cdot (5-3)^2 \\ 3 \cdot 5 = \text{НОК}(5; 3) = 15 \end{cases} - \text{верно}$$

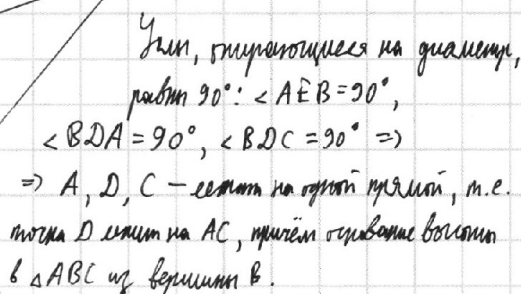
Ответ: $(3; 5), (5; 3), (12; 16), (16; 12)$



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что точка F лежит на CE , т.е. точка

перпендикуляр BF и CE лежат в ω_2 , т.к. $BF \perp CE$ и опираются на одну хорду BC $\angle BDC = 90^\circ$. Касательные перпендикулярны радиусу в точке касания $\Rightarrow BF \perp BA$. Имеем $BC \perp BE$, $\angle AEB = 90^\circ \Rightarrow BC \parallel AC$ и $BF \perp CE$, $BF \perp BA \Rightarrow CE \perp BA$. Значит $ABCE$ — параллелограмм.

Далее, $CF = 3$; $BC = \frac{CF}{\cos \angle BCE} = 5$, $BF = \sqrt{BC^2 - CF^2} = 4$, $CE = \frac{BC}{\cos \angle BCE} = \frac{25}{3}$, $CE = BA$

Площадь параллелограмма $S_{ABCE} = BF \cdot CE = BD \cdot AC \Rightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{AC}{CE}$

Wegen $AC: AC^2 = BF^2 + (CF + BA)^2 = 4^2 + (3 + \frac{25}{3})^2 = \frac{1300}{9} \Rightarrow AC = \frac{10}{3}\sqrt{13}$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{AC}{CE} = \frac{\frac{10}{3} \cdot \sqrt{13}}{\left(\frac{25}{3}\right)} = \frac{2\sqrt{13}}{5}$$

Omben:

$$BF:BD = 2\sqrt{13} : 5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☒

2
☒

3
☒

4
☒

5
☒

6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 3 \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \\ 4 \min(a; b) = 3(a-b)^2 \end{cases}$$

$a \leftrightarrow b$, пусть $a \geq b$, $a > b$

$$3a = \text{НОК}(a; b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a; b)} \rightarrow b = 3 \text{НОД}(a; b)$$

$$4b = 3(a-b)^2$$

$$4 \cdot 3 \text{НОД}(a; b)^2 = 4 \cdot 3 \text{НОД}(a; b)$$

$$(a-b)^2 = 4 \text{НОД}(a; b)$$

$$a-b = k \text{НОД}(a; b)$$

$$a-b = k \text{НОД}(a; b)$$

$$k^2 \text{НОД}(a; b) = 4$$

↓

$$k=1, \text{НОД}=4 \Rightarrow a-b=4$$

$$k=2, \text{НОД}=1 \Rightarrow a-b=2$$

$$\text{НОД}=0 \text{ б}$$

$$3a = ab$$

$$4b = 3 \cdot 2^2$$

$$b=3, a=5$$

$$3 = \frac{b}{4} \Rightarrow b=12$$

$$a=16$$

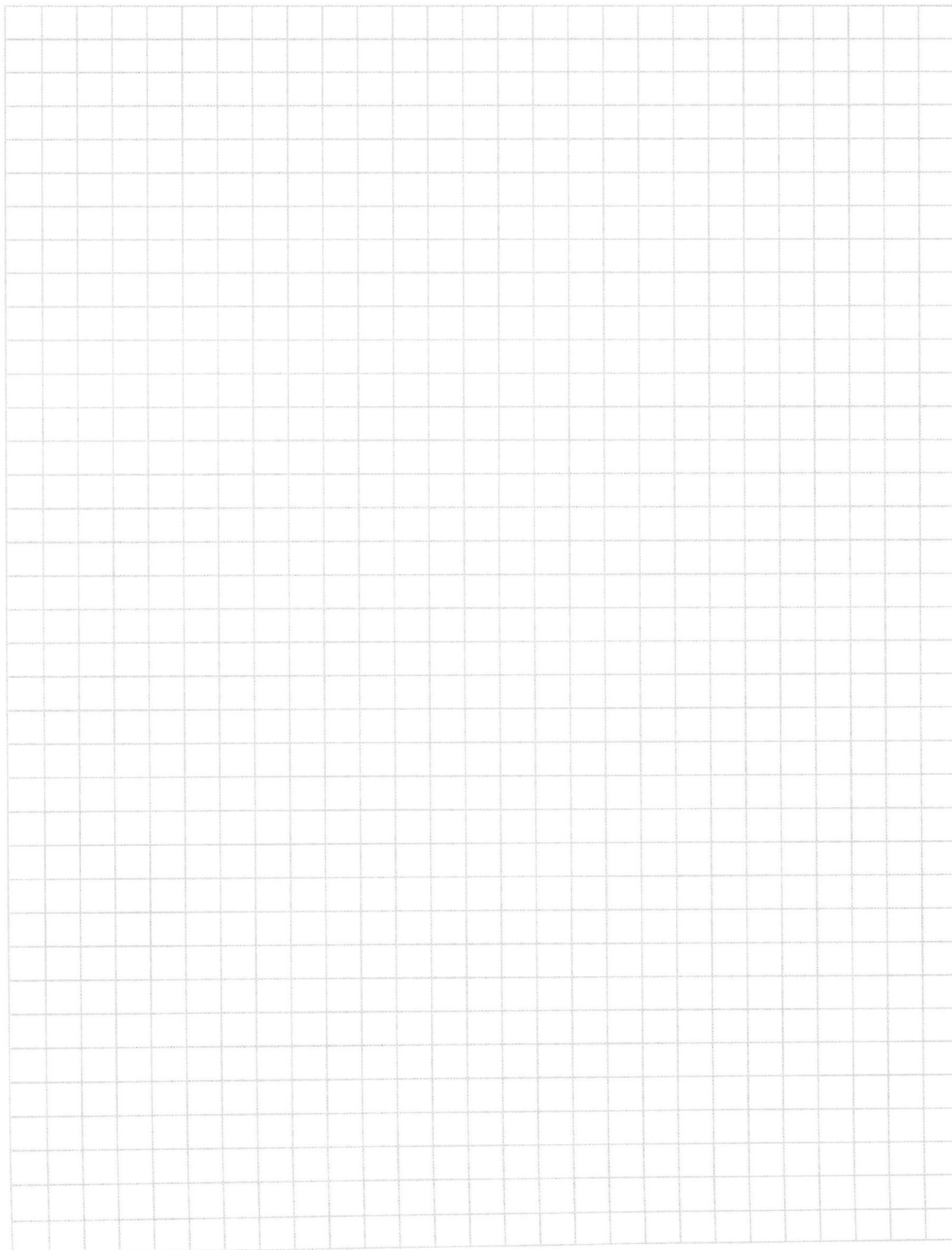


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☒3
☒4
☒5
☒6
☒7
☒СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3x^3-3}{7x^3+7} = \frac{3}{7} \left(\frac{x^2-1}{x^3+1} \right) = \frac{3}{7} \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$7(x^2 - x + 1) > 3(x^2 + x + 1)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$4x^2 - 10x + 4 > 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 > 0$$

$$3 \leq x \leq 31$$

$$\frac{5}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} \quad (x-1)(x-2) = 2x^2 - 5x + 2$$

$$31 - 3 + 1 = 29$$

$$8 - 10 + 2$$

$$(2a+1)x - a^2 + 1 - x^2 - x - 1 = -x^2 + 2a - a^2 = -(x-a)^2$$

$$2a+1-1=2a$$

$$-a^2+1-1=-a^2$$

$$(2a+1)x - a^2 \cancel{+1} \cancel{-x} \cancel{-1} = x(2a+2) - a^2$$

$$a \neq -\frac{1}{2}$$

$$-(x-a)^2 (x(2a+2) - a^2) (x^2 - 3xy + 4y^2) = 0$$

$$x^2 - 3xy + 4y^2 = x^2 - 3(2a+1)x^2 + 3a^2x - 3x + 4(2a+1)^2x^2 + (a^2+1)^2 - 2(a^2+1)(2a+1)x$$

$$y^2 = ((2a+1)x - (a^2+1))^2 = (a+1)^2x^2 + (a^2+1)^2 - 2(a^2+1)(2a+1)x$$

$$xy = (2a+1)x^2 - a^2x + x$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$-x^2 - x - \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} -2x - 4 \\ x = -2 \end{aligned}$$

$$y = \frac{3}{4}$$

$$a = \frac{a^2}{2a+2}$$

$$2a^2 + 2a = a^2 \quad x+1$$

$$a+2=0$$

$$a = -2$$

$$3 \cdot \frac{3}{4}^2$$

$$\frac{3}{4} - x^2 - x - 1 = -x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$D = 1 + 4 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{4} = 2$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Делим на CA $S = 4 \cdot \frac{25}{3} = AC \cdot BD$
 F делим на CE $S = BF \cdot \frac{25}{3}$

$\frac{BF}{BD} = \frac{AC}{CE} = \frac{3}{25} AC = \frac{10\sqrt{13}}{25} = \frac{2\sqrt{13}}{5}$
 $(BF \perp BA, BF \perp CE)$
 аналогично $BC \parallel AE$
 $ABCE$ — паралл.

$8 + \frac{1}{3} \quad 11 + \frac{1}{3}$
 $137 \cdot 9 = 1233$
 $1233 + 66 = 1300$
 $1300 = 10\sqrt{13}$
 $AC = \sqrt{137 + \frac{27}{3} + \frac{1}{9}} = \sqrt{137 + 9 + \frac{1}{9}} = \sqrt{146 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1315}{9}} = \frac{\sqrt{1315}}{3}$
 $3AC = \sqrt{1233 + 16 + 1} = \sqrt{1300} = 10\sqrt{13}$

$AC = \sqrt{\left(\frac{25}{3} + 3\right)^2 + 4^2}$
 $121 + \frac{1}{9} + \frac{22}{3} + 16$
 $\frac{BF}{BD} = \frac{4 \cdot 3}{25} = \frac{12}{25}$
 $\frac{BF}{BD} = \frac{AC}{CE} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{1}{CF + FE}$
 $\frac{BF}{CF} = \tan(\alpha + \beta)$
 $CF = \frac{BF}{\tan(\alpha + \beta)}$
 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{FE}{BF} \Rightarrow FE = BF \cdot \tan(\alpha + \beta)$
 $\frac{BF}{BD} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tan(\alpha + \beta)} + \tan(\alpha + \beta)}$
 $2 \tan \beta = \tan(\alpha + \beta)$
 $\frac{25}{3} = \frac{10}{3} \times$
 201
 251
 $201 \cdot 251 = 50451$
 $S_{ABCE} = \frac{25}{3} \cdot 4$
 $BD = \frac{1}{4} \cdot \frac{S_{ABCE}}{AC} ?$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☒

2
☒

3
☒

4
☒

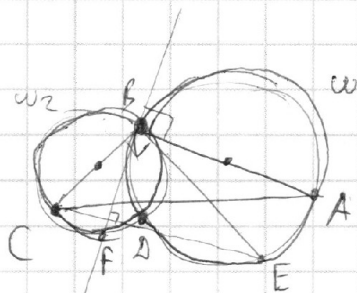
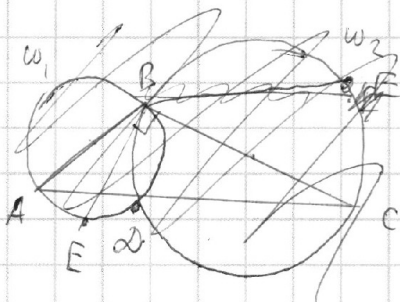
5
☒

6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{BF}{BD} = ? \quad \angle BCE = \frac{3}{5}$$

~~Решение~~

~~Решение~~

~~Решение~~ $x^2 - 3yx + \frac{9}{4}y^2 + \frac{7}{4}y^2 = 0$

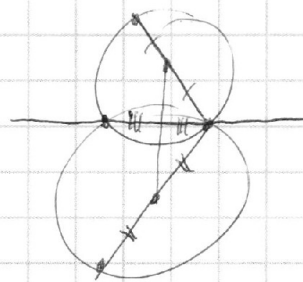
~~Решение~~ $(x - \frac{3}{2}y)^2 + \frac{7}{4}y^2 = 0$

~~Решение~~ открытие

или $y = 0$

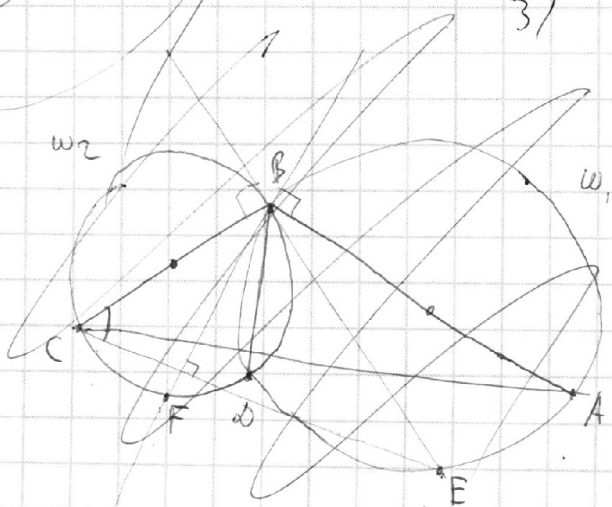
$x = 0$

$$\frac{\lg(d+\beta)}{\sin d(1+\lg^2(d+\beta))}$$



AB || CE

37





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + px + q$$

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2$$

$$h = 2^{401} \cdot 3^{500} = x \cdot y$$



$$-x^2 + px + q = 0$$

целые корни $(-p)$?

$$y \div x$$

маленький шаг

$$-(x^2 - px - q) \Rightarrow -q = \frac{p^2}{4}$$

$$y = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1}$$

$$x = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1}$$

$$x^2 + px + q + 8 = 0$$

$$(x^2 - \frac{p}{2})^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4}$$

$$y \div x$$

$$y = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2}$$

мне

$$p = \pm 4$$

$$x^2 + px + (8 - \frac{p^2}{4}) = 0$$

$$x^2 \pm 4x + 4 = (x \pm 2)^2$$

$$(\frac{p}{2})^2 = 8 - \frac{p^2}{4}$$

$$x^2 \pm 2x + 1 = (x \pm 1)^2$$

$$\alpha_2 \geq \alpha_1, \text{ пусть } \alpha_1 + \alpha_2 = 401$$

$$x^2 \pm 4x + 4$$

$$\frac{1}{2}p^2 = 8$$

$$p = \pm 4 \text{ — ответ}$$

Кружок!

a, b — натуральные

$$\frac{1}{16} = 2^{-4}$$

$$\log_2 9 \neq 2$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 xy} = 0$$

$$\min(a, b) = \frac{1}{2}(a+b - |a-b|)$$

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a+b + |a-b|)$$

$$a = \log_2 x, b = \log_2 y$$

$$\begin{cases} 12 \min(a, b) \geq 6(a+b - |a-b|) = 9(a-b)^2 \\ 12 \max(a, b) = 6(a+b + |a-b|) = 4 \text{НОК}(a, b) \end{cases}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{9}{b} = \frac{16}{a+b} = \frac{b+9a}{ab}$$

$$16ab = (a+b)(b+9a) = 10ab + b^2 + 9a^2$$

$$9a^2 + b^2 - 6ab = 0$$

$$(3a-b)^2 = 0$$

$$3a = b$$

$$\log_2 x^3 = \log_2 y$$

$$x^3 = y$$

$$\log_x 2 + \log_x 2^3 + 4 \log_x 2^{-4} = 0$$

$$1 + 3 - 4 = 0$$



$$12 \min(a, b) = 9 \text{НОК}(a, b) \geq 10$$

$$a-b \neq 0 \text{ } a-b \text{ } 2a+b=$$

$$\frac{x+1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \geq \frac{3x^3-3}{7x^3+7}$$

$$(7x^3+7)(x-1) \geq (3x^3-3)(x+1)$$

$$7x^4 - 7x^3 + 7x - 7 \geq 3x^4 + 3x^3 - 3x - 3$$

$$\frac{3y-3}{7y+7} = \frac{3}{7} \left(\frac{y-1}{y+1} \right) = \frac{3}{7} \left(1 - \frac{2}{x+1} \right)$$

$$4x^4 - 10x^3 + 10x + 4 > 0$$

$$x \leq 31$$