



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC = 1$  и  $BC = 16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .
7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = 2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

за  $v_p(a)$  обозначим наибольшее неотрицательное число  $k$ , такое, что  $p^k | a$  ( $x | y \Leftrightarrow y : x$ ), где  $p$  — простое,  $a$  — целое

т.к.  $ab : 3^{11} \neq$ , то  $ab : 3^{11} \Rightarrow v_3(ab) \geq 11$ . заметим, что  $v_3(a \cdot b) = v_3(a) + v_3(b) \Rightarrow v_3(a) + v_3(b) \geq 11$ . также  $ab : 7^{11} \Rightarrow v_7(a) + v_7(b) \geq 11$

аналогично, т.к.  $bc : 3^{18} \neq 16$ , то  $v_3(b) + v_3(c) \geq 18$ ;  $v_7(b) + v_7(c) \geq 16$ . т.к.  $ac : 3^{21} \neq 38$ , то  $v_3(a) + v_3(c) \geq 21$ ;  $v_7(a) + v_7(c) \geq 38$ .

имеем:

$$\begin{cases} v_3(a) + v_3(b) + v_3(b) + v_3(c) + v_3(a) + v_3(c) \geq 11 + 18 + 21 \\ v_7(a) + v_7(b) + v_7(b) + v_7(c) + v_7(a) + v_7(c) \geq 11 + 16 + 38 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 2(v_3(a) + v_3(b) + v_3(c)) \geq 50 \\ 2(v_7(a) + v_7(b) + v_7(c)) \geq 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_3(a) + v_3(b) + v_3(c) \geq 25 \\ v_7(a) + v_7(b) + v_7(c) \geq \frac{65}{2} \end{cases}$$

т.к.  $v_p(a) \in \mathbb{Z}$ , то  $v_7(a) + v_7(b) + v_7(c) \geq 33$

заметим, что  $v_3(a) + v_3(b) + v_3(c) = v_3(abc) \geq 25$

также аналогично,  $v_7(abc) \geq 33$

значит,  $abc : 7^{33}$  и  $abc : 3^{25} \Leftrightarrow abc : 3^{25} \cdot 7^{33} \Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 7^{33}$

но кроме того,  $v_7(a \cdot c) \geq 38 \Rightarrow v_7(a) + v_7(c) \geq 38 \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_7(a) + v_7(b) + v_7(c) \geq 38 \Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$$

равенство может достигаться при  $a = 3^7 \cdot 7^{11}$ ;  $b = 3^4$ ;  $c = 3^{14} \cdot 7^{27}$

Ответ:  $3^{25} \cdot 7^{38}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{b} - \text{несократима} \Rightarrow (a; b) = 1 \quad (a; b) = \text{НОД}(a; b)$$

$$m - \text{наибольшее число} : m \mid a+b \text{ и } m \mid a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow m = (a+b; a^2 - 2ab + b^2)$$

$$(a+b; a^2 - 2ab + b^2) = (a+b; (a+b)^2 - 4ab) = (a+b; -10ab)$$

$$m \mid a+b \text{ и } m \mid -10ab$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \\ a &\equiv -b \pmod{m} & -10ab &\equiv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \\ -10ab &\equiv 10b^2 \pmod{m} \equiv 0 \quad \text{если } m \mid b, \text{ то } m \mid a \text{ - противореч. с } (a; b) = 1 \\ &\Downarrow \\ &10 \equiv 0 \pmod{m} \end{aligned}$$

получается,  $m$  - делитель 10. Наибольший делитель

положительного числа - само число  $\Rightarrow$  наибольшее  $m = 10$ .

возьмем  $a = 3; b = 7$ :

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2 + 4ab} = \frac{10}{-110} \Rightarrow m = 10$$

получается

Ответ:  $m = 10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

н.к.  $2x^2 - 3x + 4 > 0$  и  $2x^2 + x + 3 > 0$  при любых  $x \in \mathbb{R}$ , но

РДЗ: ~~х~~  $x$ -любые

положим  $2x^2 - 3x + 4 = a$ ,  $4x - 1 = b$ , уравнение примет вид:

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+b} = -b$$

$$\sqrt{a} + b = \sqrt{a+b} \quad | \text{возведем обе части в квадрат}$$

$$a + 2b\sqrt{a} + b^2 = a + b$$

$$b^2 + 2b(2\sqrt{a} - 1) = 0$$

⇓

$$b = 0$$

1st case:  $b = 0 \Leftrightarrow 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

$$b + 2\sqrt{a} - 1 = 0$$

подставим для проверки:  $\sqrt{\frac{2}{16} - \frac{12}{16} + \frac{64}{16}} - \sqrt{\frac{2}{16} + \frac{4}{16} + \frac{48}{16}} \stackrel{?}{=} 0$   
 $\stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{54}{16}} - \sqrt{\frac{54}{16}} \stackrel{?}{=} 0$  верно  $\Rightarrow x = \frac{1}{4}$  - реш

2nd case:  $b + 2\sqrt{a} - 1 = 0$

$$2\sqrt{a} = 1 - b \quad | \text{возведем в квадрат}$$

$$4a = 1 - 2b + b^2$$

н.к.  $a = 2x^2 - 3x + 4$ ,  $b = 4x - 1$ , то

$$8x^2 - 12x + 16 = 1 - 8x + 2 + 16x^2 - 8x + 1$$

$$8x^2 - 4x - 12 = 0 \quad | :4$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x_1 = -1; x_2 = \frac{3}{2}$$

еще проверим угадывая, что  $x = -1$  и

$x = \frac{3}{2}$  - не оба реш.

Ответ:  $x = \frac{1}{4}$

Подставим  $x = \frac{3}{2}$ :

$$\sqrt{\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 4} - \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{3}{2} + \frac{6}{2}} \stackrel{?}{=} 1 - 6$$

$$\stackrel{?}{=} 1 - 6 \Leftrightarrow \sqrt{4} - \sqrt{9} = -5, \text{ что неверно}$$

Подставим  $x = -1$ :

$$\sqrt{2+3+4} - \sqrt{2-1+3} \stackrel{?}{=} 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9} - \sqrt{2} = 5, \text{ что неверно}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

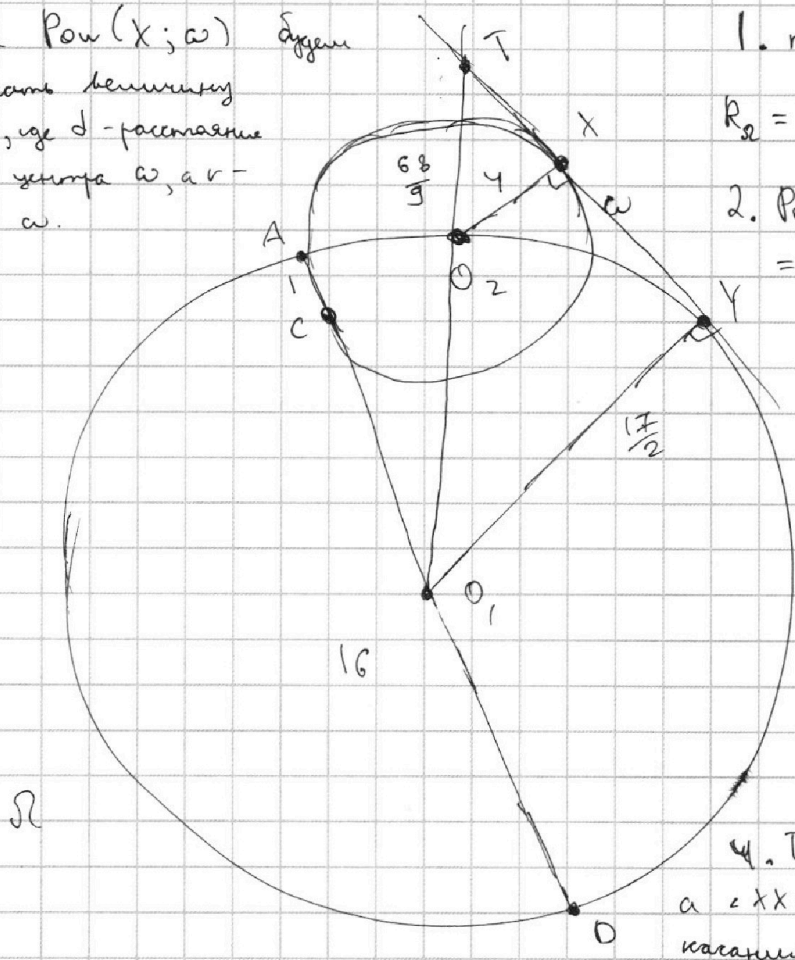
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



за  $Pow(X; \omega)$  будем обозначать величину  $d^2 + r^2$ , где  $d$  - расстояние от  $X$  до центра  $\omega$ , а  $r$  - радиус  $\omega$ .



1. м.к.  $AC=1$ ;  $OC=16$ , по

$$R_{\Omega} = (1+16) \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

2.  $Pow(O_2; \omega) = O_2O_2^2 - R\omega^2 =$   
 $= \frac{289}{4} - R\omega^2 = O_1C^2 = (\frac{15}{2})^2$

$\Downarrow$  двойника степени точки  
 $R\omega^2 = \frac{289}{4} - \frac{225}{4} = 16$

$\Downarrow$   
 $P_{\omega} = 4$

3. линия  $XY$  - общая кас. к  $\omega$  и  $\Omega$ ,  $X \in \omega$ ;  $Y \in \Omega$ . проведем  $O_1O_2$  до перес. с  $XY$ :  $O_1O_2 \cap XY = T$

4.  $\angle O_2X \sim \angle O_1Y$  ( $\angle T$  - общий, а  $\angle XXO_2 = \angle TYO_1 = \frac{17}{2}$  угла касания)

5. из подобия п. 4:

$$\frac{TO_2}{TO_2 + O_2O_1} = \frac{O_2X}{O_1Y} \Leftrightarrow \frac{TO_2}{TO_2 + \frac{17}{2}} = \frac{4}{\frac{17}{2}} \Leftrightarrow \frac{2TO_2}{2TO_2 + 17} = \frac{8}{17} \Rightarrow 34TO_2 = 16TO_2 + 136 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow TO_2 = \frac{68}{9}$$

6.  $Pow(T; \omega) = TO_2^2 - R\omega^2 = \frac{4624}{81} - 16 = \frac{3328}{81} = TX^2 \Rightarrow TX = \frac{8}{9} \sqrt{52} =$

$$= \frac{16}{9} \sqrt{13}$$

7. из подобия п. 4  $\Rightarrow \frac{TY}{TX} = \frac{4}{\frac{17}{2}} \Leftrightarrow \frac{16\sqrt{13}}{9TY} = \frac{8}{17} \Rightarrow 34\sqrt{13} = 9TY \Rightarrow TY = \frac{34}{9} \sqrt{13}$

8.  $XY = TY - TX = \frac{34}{9} \sqrt{13} - \frac{16}{9} \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$

Ответ:  $2\sqrt{13}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x + 2y = 2 \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \quad (x, y, z \neq 0) ; x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = ? = A$$

преобразуем второе равенство:

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{3}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{z}{2} \Leftrightarrow \frac{xy}{3y+x} = \frac{z}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2xy}{3y+x}$$

$$\text{знаем, } \frac{2xy}{3y+x} = 3x+2y \Rightarrow 2xy = (3x+2y)(3y+x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2xy = 9xy + 3x^2 + 6y^2 + 2xy \Leftrightarrow x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x+2y) = 0$$

$$\text{1st case: } x = -y \Rightarrow z = -y, \text{ тогда } A = \frac{3y^2 - 4y^2 - y^2}{y^2 - 6y^2} = \frac{-2y^2}{-5y^2} = \frac{2}{5}$$

$$\text{2nd case: } x = -2y \Rightarrow z = -4y : A = \frac{12y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 - 6y^2} = \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4$$

~~Ответ:  $\frac{2}{5}$  или 4.~~ Ответ: 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

обозначим длину пути от А до В за  $S$ , скорости великопудина - за  $v_b$ , мопедиста - за  $v_m$  по условию верна система:

$$\begin{cases} \frac{S}{v_b} = \frac{S}{v_m} + 2 & (1) \\ v_b \cdot \frac{S}{v_m} + 96 = v_m - \frac{S}{v_b} & (2) \\ \frac{S}{v_b+6} = \frac{S}{v_m+6} + \frac{5}{4} & (3) \end{cases}$$

умножим (1) на  $v_b$ :  $S = \frac{S \cdot v_b}{v_m} + 2v_b = v_m \cdot \frac{S}{v_b} + 2v_b$

$$\frac{v_m \cdot S}{v_b} = S + 2v_b = v_b \cdot \frac{S}{v_m} + 96, \text{ т.к. } \frac{S}{v_m} = \frac{S}{v_b} - 2, \text{ то}$$

$$S + 2v_m = v_b \cdot \left(\frac{S}{v_b} - 2\right) + 96 \Rightarrow S + 2v_m = S - 2v_b + 96 \Rightarrow \boxed{v_m + v_b = 48}$$

подставим в (1) и (3) вместо  $v_b = 48 - v_m$ :

$$\begin{cases} \frac{S}{48-v_m} = \frac{S+2v_m}{v_m} \Rightarrow S v_m = 24S + 48v_m - v_m^2 \\ \frac{S}{54-v_m} = \frac{S}{v_m+6} + \frac{5}{4} \Rightarrow S(v_m+6) = (54-v_m)(S+a v_m+6a) \end{cases}$$

$$S v_m + 6S = 54S$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$v_m, v_b, t_m, t_b.$$

$$v_b \cdot t_b = ?$$
$$v_m \cdot t_m = ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_m + 2 = t_b \\ v_b \cdot t_m + 96 = v_m \cdot t_b \\ \frac{v_b \cdot t_b}{v_b + 6} = \frac{v_m \cdot t_m}{v_m + 6} + a \end{array} \right.$$

$$a = \frac{7}{6}$$

$$-26 t_b = -36 t_m - 72$$

$$\frac{v_b \cdot t_b}{v_b + 6} = \frac{t_b}{6} - \frac{6 t_b}{v_b + 6} = t_m - \frac{6 t_m}{v_m + 6}$$

$$2 - \frac{6 t_b}{v_b + 6} = - \frac{6 t_m}{v_m + 6}$$

$$-6 v_m t_b = -6 v_b t_m - 96 \cdot 6$$

$$\frac{2 v_b + 12 - 6 t_b}{v_b + 6} = \frac{-6 t_m}{v_m + 6}$$

$$2 v_b \cdot v_m + 12 v_m - 6 t_b v_m + 12 v_b + 72 - 36 t_b = -6 t_m v_b - 36 t_m$$

$$2 v_b \cdot v_m + 12 v_m - 96 \cdot 6 + 12 v_b + 72 - 36 t_b = -36 t_m$$

$$2 v_b \cdot v_m + 12 v_m - 96 \cdot 6 + 12 v_b = 0$$

$$v_b \cdot v_m + 6 v_m - 96 \cdot 3 + 6 v_b = 0 \quad | \cdot t_b$$

$$t_b \cdot v_m + 6 v_m \cdot t_b - 96 \cdot 3 t_b + 65 = 0$$

$$5 \cdot v_m + 6(v_b t_m + 96) - 96 \cdot 3 t_b + 65 = 0 \quad t_b = t_m + 2$$

$$5 \cdot v_m + 6 v_b \cdot t_m + 96 \cdot 6 - 96 \cdot 3(t_m + 2) + 65 = 0$$

$$v_b \cdot t_b = v_m + 6 v_b \cdot t_m - 3 t_m + 65 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



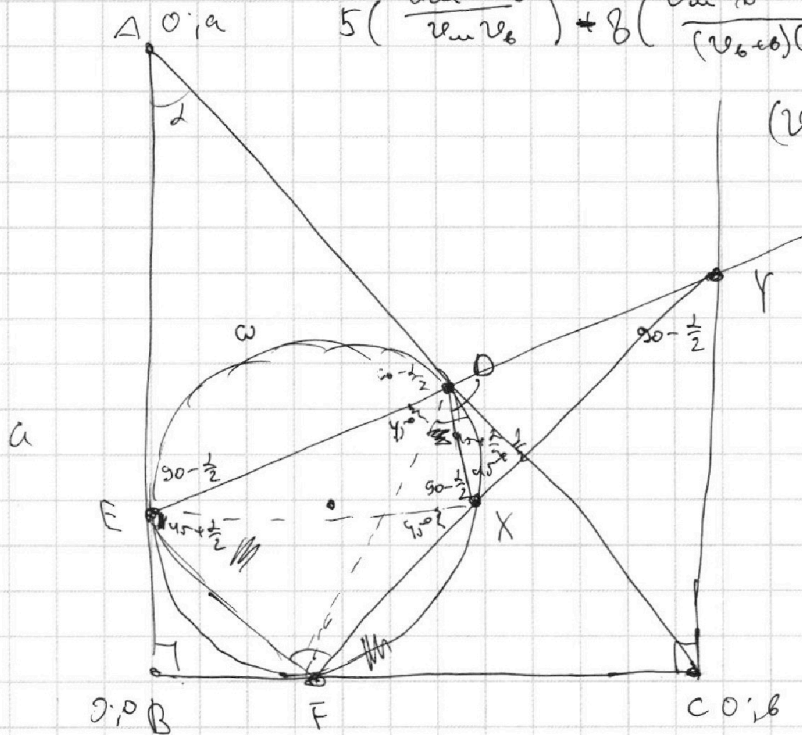
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{5s}{v_b} - \frac{5s}{v_m} - \frac{6s}{v_b + 6} + \frac{8s}{v_m + 6} = 0$$

$$5 \left( \frac{v_m + v_b}{v_m v_b} \right) + 8 \left( \frac{v_m + 6 - v_b - 6}{(v_b + 6)(v_m + 6)} \right) = 0$$

$$(v_m - v_b) \left( \frac{5}{v_m - v_b} - \frac{8}{v_m + 6} \right) = 0$$



$$\frac{Ab}{bc} = ?$$

$$EX = 2\sqrt{2} XY$$

$$b \quad 45 + \frac{a}{2}$$

$$45 + \frac{a}{2}$$

$$90 - a$$

$$\frac{s}{v_m} + 2 = \frac{s}{v_b}$$

$$\frac{s + 2v_m}{v_m} = \frac{s}{v_b}$$

$$sv_b + 2v_m v_b = sv_m$$

$$\frac{s}{v_m + 6} + \frac{s}{4} = \frac{s}{v_b + 6}$$

$$\frac{8}{v_m} - \frac{s}{v_b} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{5s}{v_b} - \frac{5s}{v_m} = 2 \quad | \cdot 10 \\ \frac{8s}{v_b + 6} - \frac{8s}{v_m + 6} = 8 \quad | \cdot 10 \end{array} \right.$$

$$\frac{4s + 5v_m + 30}{4(v_m + 6)} = \frac{4s}{4v_b + 24}$$

$$16sv_b + 20v_m v_b + 100v_b =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S}{46-v_m} = \frac{S+2v_m}{v_m} \quad 46-v_m$$

$$Sv_m = 46S - Sv_m + 96v_m - 2v_m^2$$

$$Sv_m = 24S + 46v_m - v_m^2$$

$$\frac{4S}{54-v_m} = \frac{4S+5v_m+30}{v_m+6}$$

$$4Sv_m + 24S = 216S + 270v_m + 34 \cdot 30 - 4Sv_m + 5v_m^2 + 30v_m$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{5s}{v_b} = \frac{5s}{v_m} + 10$$

$$t_b = t_m + 2$$

$$\frac{6s}{v_b + 6} = \frac{6s}{v_m + 6} + 10$$

$$v_b \cdot t_m + 96 = v_m \cdot t_b$$

$$t_b + \frac{6t_b}{v_b + 6} = t_m - \frac{6t_m}{v_m + 6} + a$$

$$\frac{5s}{v_b} - \frac{6s}{v_b + 6} = \frac{5s}{v_m} - \frac{6s}{v_m + 6}$$

$$\frac{5v_b + 30 - 6v_b}{v_b(v_b + 6)} = \frac{5v_m + 30 - 6v_m}{v_m(v_m + 6)} \quad \frac{s}{v_b + 6}$$

$$\frac{30 - 3v_b}{v_b(v_b + 6)} = \frac{10 - 3v_m}{v_m(v_m + 6)}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{s}{a} &= \frac{s}{a} + 2 \\ \frac{s}{b+6} &= \frac{s}{a+6} + \frac{5}{4} \end{aligned} \right.$$

$$b \cdot \frac{s}{a} + 96 = a + \frac{s}{b}$$

$$\frac{bs}{a} + 96 = \frac{as}{b}$$

$$\frac{s}{b} - \frac{s}{b+6} = \frac{s}{a} - \frac{s}{a+6} + \frac{3}{45}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{bs + 96a}{a} &= \frac{as}{b} \\ \frac{s + 2a}{a} &= \frac{s}{b} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{62}{b(b+6)} = \frac{62}{a(a+6)} + \frac{18}{45}$$

$$2 \left( \frac{1}{b(b+6)} + \frac{1}{a(a+6)} \right) = \frac{1}{2s}$$

$$\frac{a^2 + 6a + b^2 + 6b}{a(a+6)(b+6)b} = \frac{1}{2s}$$

$$bs = \frac{a(a+6)(b+6)}{a^2 + 6a + 6b + b^2}$$

$$\frac{s}{v_m} = \frac{s}{v_b} - 2$$

$$\frac{bs + 96a}{s + 2a} = a$$

$$s + 2v_m = s - 2v_b + 96$$

$$\frac{bs + 96a}{a} = 2s + 42a$$

$$\frac{bs}{a} + 96 = s + 2a$$

$$a \left( \frac{s}{a} + 2 \right) = s + 2a$$

$$\frac{as}{b} = s + 2a$$

$$s + 2a = s + 2a$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including calculations, geometric diagrams, and algebraic derivations.

**Calculations:**

- $\sqrt{\frac{2}{16}} - \frac{a+2}{16} + \frac{64}{16} = \sqrt{\frac{2}{16}}$
- $\sqrt{\frac{2}{16}} - \frac{4}{16} + \frac{12}{16}$
- $\frac{2}{16} - \frac{12}{16} + \frac{64}{16} = \frac{54}{16}$
- $\frac{2}{16} + \frac{4}{16} + \frac{48}{16}$
- $2\sqrt{3} = 1 - 3$
- $2\sqrt{3} = 2$
- $\sqrt{3} + 3 = \sqrt{6}$
- $\frac{15}{2} \cdot \frac{225}{4} = \frac{289}{4}$
- $\frac{17}{2}$
- $\frac{4}{17} = \frac{a}{a + \frac{17}{2}}$
- $\frac{8}{17} = \frac{2a}{2a + 17}$
- $37a = 16a + 136$
- $18a = 136$
- $16 \cdot 10 = 136$
- $10 = 136$

**Geometric Diagrams:**

- A large circle with center  $O_1$  and points  $A, B, C, X$  on its circumference.
- Points  $O_2$  and  $P$  are also shown within or on the boundary of the circle.
- Angles of  $90^\circ$  and  $17/2$  are marked.
- A smaller circle  $\Omega$  is shown on the left with its own diagram.
- Various lines and arcs connect the points, forming triangles and other geometric figures.

**Algebraic Derivations:**

- $\frac{4624}{1296}$
- $\frac{4624 - 129}{3328}$
- $\frac{3328}{81}$
- $\frac{3328 \cdot 4}{32} = 416$
- $\frac{3328 \cdot 4}{1632}$
- $\frac{208 \cdot 4}{20} = 41.6$
- $\frac{126}{16}$
- $\frac{3328}{28}$
- $\frac{136}{120}$
- $\frac{136}{18}$
- $\frac{136}{16}$
- $\frac{17}{18}$
- $\frac{16}{120}$
- $\frac{17}{18}$
- $\frac{16}{120}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 3^4 7^{11}$$

$$bc: 3^{12} 7^{16}$$

$$ac: 3^{21} 7^{38}$$

$$v_3(a) + v_3(c) \geq 21$$

$$v_3(a) + v_3(b) \geq 11$$

$$v_3(b) + v_3(c) \geq 18$$

$$2(v_3(a) + v_3(b) + v_3(c)) \geq 50 \Rightarrow v_3(a) + v_3(b) + v_3(c) \geq 25$$

$$v_7(a) + v_7(b) \geq 11$$

$$v_7(b) + v_7(c) \geq 16$$

$$v_7(a) + v_7(c) \geq 38$$

$$\begin{matrix} 50 + 15 = \\ = 65 \end{matrix}$$

$$2(v_7(a) + v_7(b) + v_7(c)) \geq 65 \Rightarrow v_7(a) + v_7(b) + v_7(c) \geq 33$$

$$(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - bab + b^2} =$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 10ab}$$

$$\frac{38 + 16 + 11}{2} =$$

$$(a+b)^2 - 10ab$$

$$(a+b; a^2 - bab + b^2) =$$

$$(a+b; (a+b)^2 - 10ab)$$

$$\frac{21}{168}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - bab + b^2} \cdot \frac{a+b}{a+b} = \frac{a^2 + ab}{a^2 - 9ab + b^2}$$

$$\frac{a+b}{a} = 0$$

$$\frac{a+b}{-10ab}$$

$$\frac{7+3}{49 - (6b+9)}$$

$$a = 3^2 7^{11}$$

$$\frac{a}{a} = 0$$

$$10ab \equiv -10b^2 \Rightarrow 10 \equiv 0 \pmod{a}$$

$$c = 3^8 7^{16}$$

$$c = 7 = \frac{10}{110} = 10$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{6} = -3 \quad b \equiv 0 \pmod{a}$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$\begin{matrix} 7^{38} \\ c = 7 \\ a = a = 7 \end{matrix}$$

$$2x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 4}\sqrt{2x^2 + x + 3} + 2x^2 + x + 3 = 1 - 8x + 16x^2$$

$$4x^2 - 2x + 6 - 2\sqrt{\dots} = -8x + 16x^2$$

$$\begin{matrix} 2x^2 - 3x + 4 = a \\ 4x - 1 = 6 \end{matrix}$$

$$4x^2 + 6x + 6 - 2\sqrt{\dots} = 16x^2$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+b} = -b$$

$$3x + 3 - \sqrt{\dots} = 6x^2$$

$$\begin{matrix} 9 - 16b + 49 = \\ 110 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a+b = 11 \\ 4x = 16 \quad 25 \\ a+c = 21 \end{matrix}$$

$$a + 2b - \sqrt{a+b} = a+b$$

$$\begin{matrix} 2\sqrt{a} = 1-b \\ 4a = b^2 - 2b + 1 \end{matrix}$$

$$b^2 + b(2\sqrt{a} - 1) = 0$$

$$b + 2\sqrt{a} - 1 = 0$$

$$1) b = 0$$

$$\boxed{\begin{matrix} c = a \cdot 14 \\ a = 7 \quad b = 4 \end{matrix}}$$

информатика

16.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x + 2y = z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{z}{2}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$\frac{1}{\frac{3}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2}{z}$$

$$\frac{xy}{3y+x} = \frac{z}{2}$$

$$z = \frac{2xy}{3y+x}$$

$$2xy = (3y+x)(3x+2y)$$

$$9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2xy = 2xy$$

$$9xy + 3x^2 + 6y^2 = 0$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$(x+y)$$

$$y^2 - 2y \quad \text{A} \quad x_1 = -y$$

$$x_2 = -2y$$

1.  $x = -y \Rightarrow z = -y$

$$(x+y)(x+2y)$$

$$\frac{S}{v_b + 6} = \frac{S}{v_b + 6} = \frac{S + av_m + 6a}{v_m + 6}$$

$$Sv_m + 6S = Sv_b + av_mv_b + 6av_b + 6S + 6av_m + 36a$$

A  $2v_mv_b = av_mv_b + 6a(v_b + v_m) + 36a$

$$\frac{Sv_b + 96v_m}{v_m} = \frac{Sv_m}{v_b} \quad \text{B}$$

$$\frac{S}{v_b} = \frac{S}{v_m} + 2 \quad \left[ Sv_b^2 + 96v_mv_b = \frac{Sv_m^2}{S} \right] \quad \frac{75}{60} = \frac{65}{\frac{5}{4}}$$

$$v_b \cdot \frac{S}{v_m} + 96 = v_m \cdot \frac{S}{v_b}$$

$$\frac{S}{v_b} = \frac{S + 2v_m}{v_m}$$

$$\frac{S}{v_b + 6} = \frac{S}{v_m + 6} + \frac{5}{4} = a$$

$$Sv_m = Sv_b + 2v_mv_b$$

$$\frac{S}{v_b + 6} = \frac{S + \frac{5}{4}(v_m + 6)}{v_m + 6}$$

$$Sv_m + 6S = Sv_b + 6S + \frac{5}{4}(v_m + 6) \cdot v_b + \frac{5 \cdot 3}{2}(v_m + 6)$$

$$Sv_b + 2v_mv_b = Sv_b + \frac{5}{4}v_mv_b + \frac{15}{2}v_b + \frac{15}{2}v_m + 45$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r}
 3328 \quad | \quad 64 \\
 -320 \\
 \hline
 128
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 -\sqrt{2} \quad | \quad 17 \\
 \hline
 12
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3328 \quad | \quad 256 \\
 -256 \\
 \hline
 2816
 \end{array}$$

$$2x^2 - 3x + 4 = a \quad \cancel{4x-1} \quad \cancel{4x-1} = b$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{a+b} = -b$$

$$b = 5$$

$$\begin{array}{l}
 \sqrt{a} - b = \sqrt{a-b} \\
 a - 2b\sqrt{a} + b^2 = a - b \\
 b^2 - 2b\sqrt{a} + b = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \sqrt{a} + b = \sqrt{a+b} \\
 a + 2b\sqrt{a} + b^2 = a + b
 \end{array}$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = -5$$

$$b^2 + b(2\sqrt{a}-1) = 0 \quad x = \frac{1}{4}$$

$$b(b + 2\sqrt{a} - 1) = 0$$

$$b - 1 + 2\sqrt{a} = 0$$

$$\begin{array}{l}
 2\sqrt{a} = 1 - b \\
 4a = b^2 - 2b + 1
 \end{array}$$

$$b = 4 \cdot \frac{3}{2} - 1 = 5$$

$$2\sqrt{a} = -4$$

$$4(2x^2 - 3x + 4) = (4x-1)^2 - 2(4x+1) + 1$$

$$2\sqrt{6} =$$

$$8x^2 - 12x + 16 = 16x^2 - 8x + 1 - 8x + 2 + 1$$

$$6$$

$$8x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\sqrt{\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{12}{2}} - \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{3}{2} + \frac{6}{2}} =$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$= \sqrt{6+9} =$$

$$p = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$$

$$\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 4 = 2$$

$$2 - 3 =$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{4}; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{9}{2} + \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = 9$$

$$\sqrt{9} - \sqrt{2} =$$