



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = -2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -6$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0, \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}, \\ y \leq 24. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$.
6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 11$, $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $AQ = 2\sqrt{5}$, $CM = 4\sqrt{5}$, $CN = 5\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$f(x) = x^2 + ax + b, \quad x_1, x_2 - \text{корни } f(x) = 0$$

1) $x^2 + ax + b = -2x^2 - 1$ решение ($D=0$)

$$3x^2 + ax + b = 0$$

$$D = a^2 - 12b$$

2) $x^2 + ax + b = -6$ - 1 решение ($D=0$)

$$x^2 + ax + b + 6 = 0$$

$$D = a^2 - 4b - 24$$

Получаем
$$\begin{cases} a^2 - 12b = 0 \\ a^2 - 4b - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b - 24 = 0 \\ a^2 = 12b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = \pm 6 \end{cases}$$

При $a = -6$ $x_1 + x_2 = 6$ (по теореме Виета)
При $a = 6$ $x_1 + x_2 = -6$

Ответ: $(x_1 + x_2 = -6)$ или $(x_1 + x_2 = 6)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☒☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$h = 5^{151} \cdot 7^{600}$$

$$h = x \cdot y, \quad x, y \in \mathbb{N}, \quad y \vdots x$$

Тогда $x = 5^{\alpha} \cdot 7^{\beta}$

$$y = 5^{151-\alpha} \cdot 7^{600-\beta}$$

$$0 \leq \alpha \leq 151$$

$$0 \leq \beta \leq 600$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N}$$

Так как $y \vdots x$, то
$$\begin{cases} 151 - \alpha \geq \alpha \\ 600 - \beta \geq \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 75,5 \geq \alpha \\ 300 \geq \beta \end{cases}$$

Тогда $0 \leq \alpha \leq 75$ и $0 \leq \beta \leq 300$

Количество способов будет равно произведению числа способов выбрать α и числа способов выбрать β (α и β однозначно задают пару x и y)

$$(75+1) \cdot (300+1) = 22876$$

Ответ: 22876 способов



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

ОДЗ:

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0 & (1) \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1} & (2) \\ y \in 2^{\mathbb{N}} & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \\ xy \neq 1 \end{cases}$$

$$(1): 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0$$

$$9 \log_x 3 + \log_y 3 + (-16) \log_{xy} 3 = 0$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3(xy)} = 0$$

Пусть $a = \log_3 x$, $b = \log_3 y$. Тогда $\log_3(xy) = \log_3 x + \log_3 y = a + b$ (на ОДЗ).

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} - \frac{16}{a+b} = 0 \Leftrightarrow \frac{9b^2 + 9ab + a^2 + ab - 16ab}{ab(a+b)} = 0$$

$$\frac{a^2 - 6ab + 9b^2}{ab(a+b)} = 0 \Leftrightarrow (a - 3b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 3b$$

$$\log_3 x = 3 \log_3 y \Leftrightarrow x = y^3$$

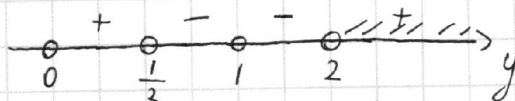
Подставим в (2): $3 \cdot \frac{y+1}{y-1} < 7 \cdot \frac{y^3+1}{y^3-1}$

$$3 \cdot \frac{y+1}{y-1} < 7 \cdot \frac{(y+1)(y^2-y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)} \quad | \cdot \frac{(y-1)}{(y+1)} > 0$$

$$7 \cdot \frac{y^2-y+1}{y^2+y+1} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{7y^2-7y+7-3y^2-3y-3}{y^2+y+1} > 0 \quad | \cdot \frac{(y^2+y+1)}{2} > 0$$

$$2y^2 - 5y + 2 > 0 \Leftrightarrow (y-2)(2y-1) > 0$$

По методу интервалов



$$y > 2$$

Тогда $3 \leq y \leq 24$ (из (3))



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Каждому y соответствует свой $x = y^3$

Тогда число пар целых x и y равно числу целых y на отрезке $[3; 24]$

$$24 - 3 + 1 = 22$$

Ответ: 22 пар



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a-b)^2 \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{N}$$

Поскольку $(a-b)^2 = (b-a)^2$ и $\text{НОК}(a; b) = \text{НОК}(b; a)$, то, не упуская общности, можем рассматривать пары $a \leq b$.

Число пар $b < a$ равно числу пар $a > b$ (пара $(x; y)$ есть обратная пара $(y; x)$, если $x \neq y$)

Тогда перепишем условие под $a \leq b$:

$$\begin{cases} 4a = 5(a-b)^2 & (1) \\ 5b = \text{НОК}(a; b) & (2) \end{cases} \quad \begin{aligned} &4a > 0, \text{ так как } a \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a \neq b \text{ (из (1))} \end{aligned}$$

$$\text{НОК}(a; b) \leq ab \Rightarrow 5b \leq ab \Rightarrow a \geq 5$$

$$5(a-b)^2 : 5 \Rightarrow 4a : 5 \Rightarrow a : 5$$

Примем $a = 5x^2$, $x \geq 1$, $x \in \mathbb{N}$, так как $2^2 \cdot a = 5(a-b)^2$

$$a = 5 \Rightarrow 4 = (b-5)^2 \Rightarrow b = 7 \quad (5; 7) \quad (7; 5)$$

$$a = 20 \Rightarrow 16 = (b-20)^2 \Rightarrow b = 24 \quad (20; 24) \quad (24; 20)$$

$$a = 45 \Rightarrow 36 = (b-45)^2 \Rightarrow b = 51 - \text{не подходит, так как}$$

$$5 \cdot 51 \neq \text{НОК}(45; 51). \text{ Заметим, что если } a = 5x^2,$$

$$\text{то } b = 5x^2 + 2x$$

$$5x^2 : x^2$$

$$2x : x^2 \text{ только при } x \in \{1; 2\}$$

$$\text{Если } x > 2, \text{ то } a : x^2, \text{ а } b \not: x^2 \text{ и } \text{НОК}(a; b) \rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

превысит 56, так как в каноническом разложении a найдётся простой p_i , у которого степень будет выше, чем у b .

Ответ: $(5; 7)$, $(7; 5)$, $(20; 24)$, $(24; 20)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

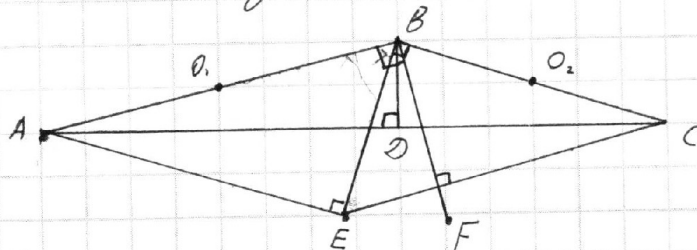


СТРАНИЦА

— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5



$$\Delta ABC \quad \cos \angle BCE = \frac{3}{4}$$

$$\angle B > 90^\circ$$

$$BE \perp BC$$

$$BF \perp CE$$

BF - касательная к $W_1(O_1; QA)$

$$BF \perp QB \Rightarrow AB \parallel EC$$

($EC \perp BF$ из условия)

$\angle AEB$ - вписанный в W_1 , AB - диаметр $\Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$

$AE \parallel BC$ ($BC \perp BE$ из условия)

$ABCE$ - параллелограмм, $\angle BCE = \angle BAE$

O_1, O_2 - средняя линия $\Delta ABC \Rightarrow O_1O_2 \parallel AC \Rightarrow BD$ - высота в ΔABC
 $O_1O_2 \perp BD$

$$\cos \angle BCE = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \angle BCE = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \tan \angle BCE = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\sin \angle BAE = \frac{BE}{AB} \Rightarrow AB = BE \cdot \frac{4}{\sqrt{7}}, \quad \tan \angle BCE = \frac{BE}{BC} \Rightarrow BC = BE \cdot \tan \angle BCE = BE \cdot \frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$AB \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = BC \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow AB = BC \cdot \frac{4}{3}$$

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAE \Rightarrow \cos \angle ABC = -\cos \angle BAE = -\frac{3}{4}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot (-\frac{3}{4})} = \sqrt{BC^2 \cdot (\frac{16}{9} + 1 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 4})} = BC \cdot \sqrt{\frac{33 + 144 + 112}{144}} =$$

$$= BC \cdot \frac{\sqrt{305}}{12}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☒ 6

☐ 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$\begin{cases} (y+x^2-4x+1)(x^2-2xy+3y^2)(y-2x+1)=0 & (1) \\ y=(-2a+4)x+a^2-1 & (2) \end{cases} \text{ - ровно 2 решения}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+1 & (3) \\ x^2-2xy+3y^2=0 & (4) \\ y=2x-1 & (5) \end{cases}$$

$$(3): y=-x^2+4x+1=-(x-2)^2+3 \quad \text{- график параболы } -x^2$$

$O(0;0) \rightarrow O(2;3)$

$$(4): x^2-2xy+3y^2=0$$

$$\text{Эй} \quad y^2-3y^2=-2y^2 \geq 0 \Rightarrow y=0, x=0 \quad \text{- точка } O(0;0)$$

$$(5): y=2x-1 \quad \text{- прямая}$$

$$(2): y=(-2a+4)x+a^2-1 \quad \text{- прямая}$$

$$(2) \text{ не пересекает } (5), \text{ если они параллельны } 2=-2a+4 \Leftrightarrow a=1$$

$$(2) \text{ пересекает } (4), \text{ если } (2) \text{ верно при } (0;0): 0=a^2-1 \Leftrightarrow a=\pm 1$$

Тогда (2) пересекает (4) или (5) ровно 1 раз при $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

$$\text{При } a=-1 \quad (2): y=6x \quad 6x=2x+1 \Leftrightarrow x=0,25$$

(пересечение с (5))

$$6x=-x^2+4x+1 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \quad \text{(пересечение с (3))}$$

Получаем 3 разных пересечения, следовательно, $a=-1$ не подходит.

При $a \neq -1$ необходимо ровно 1 пересечение с (3)

$$(-2a+4)x+a^2-1=-x^2+4x+1 \Leftrightarrow x^2-2ax+a^2=0 \Leftrightarrow x=a$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получаем 2 пересечения, если они не совпадают

$$-x^2 + 4x - 1 \neq 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 0) \text{ или } (x \neq 2)$$

При $a = 0$ и $a = 2$ пересечения $\varnothing$ с $\{(4) \text{ или } (5)\}$ и (3) совпадают и дают лишь 1 решение.

Получается, что при $a = -1$ - 3 решения

при $a = 0$ или $a = 2$ - 1 решение

при $a \in (-\infty; +\infty) \setminus \{-1; 0; 2\}$ - 2 решения

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

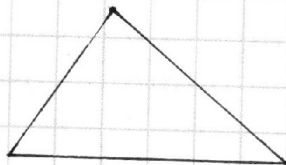
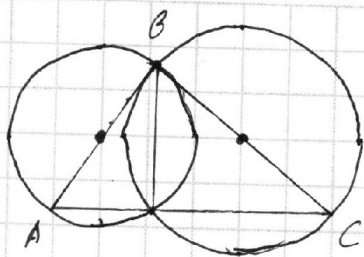
5
☐

6
☐

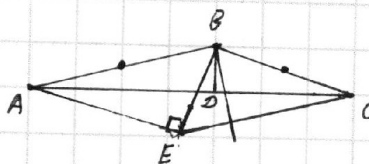
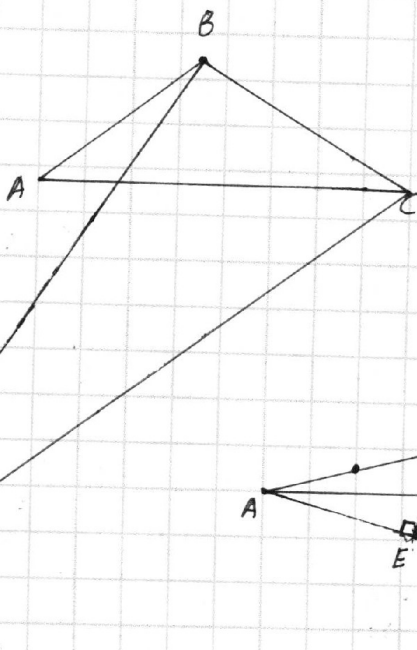
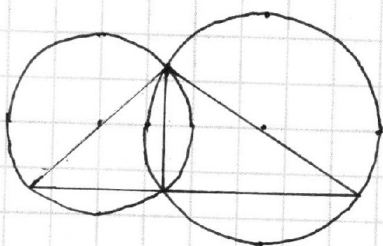
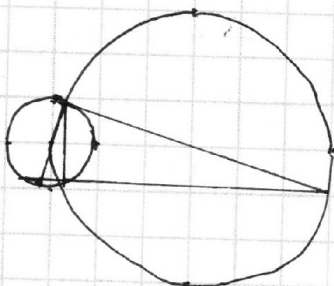
7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



УДП



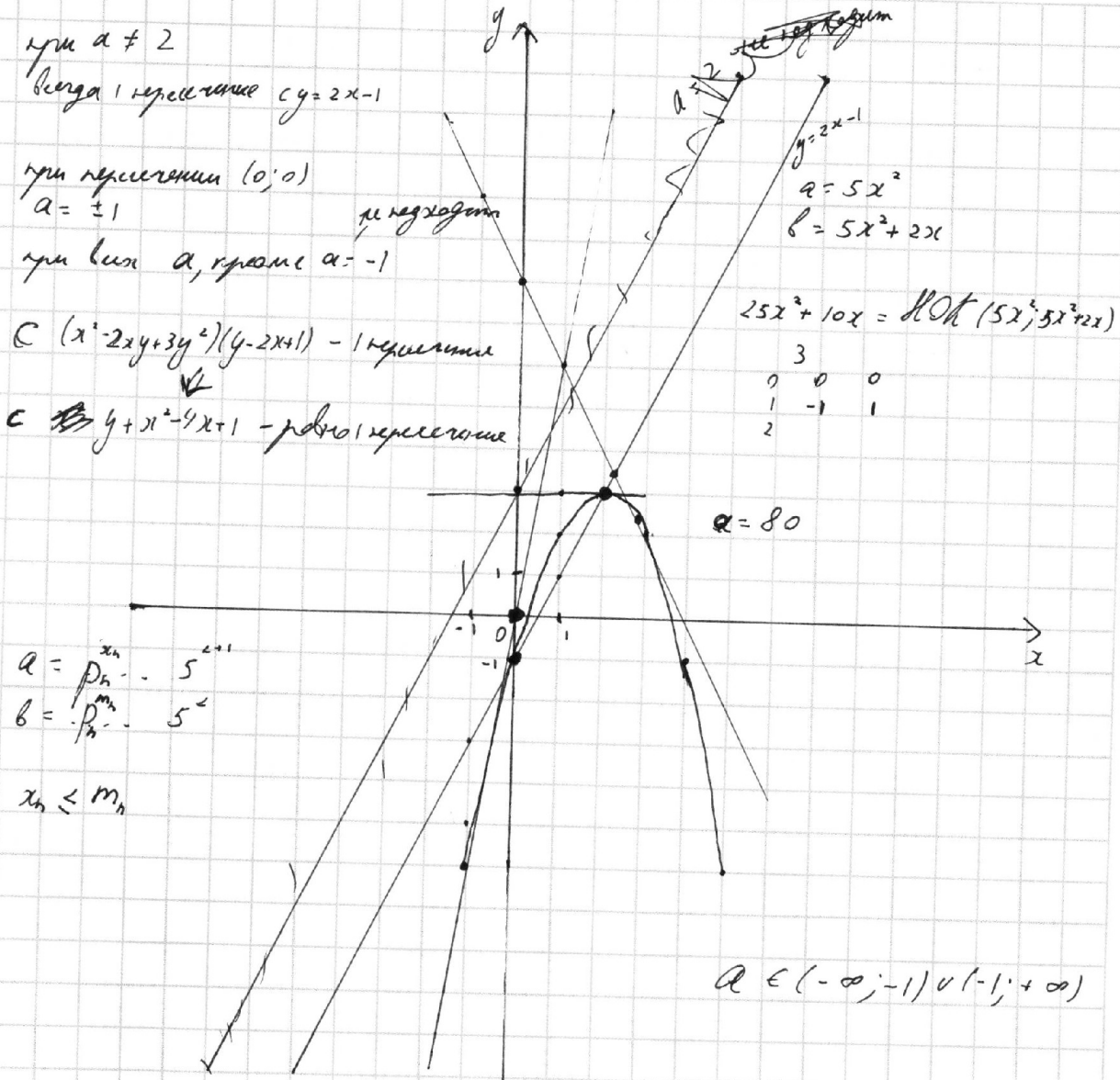


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} -x^2 + 4x - 1 &= (-2a + 4)x + a^2 - 1 \\ -x^2 + 4x - 1 &= -2x + 9 - 1 \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + a^2 &= 0 \\ (x - a)^2 &= 0 \Rightarrow x = a \\ y &= -a^2 \\ D &= 0 \end{aligned}$$

$$4ab = (a - b)^2 \text{НОД}(a; b) \leq ab$$

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &\neq 4 - \text{не} \\ 5^2(a - b)^2 b &= 5^2 a \text{НОД}(a; b) \end{aligned}$$

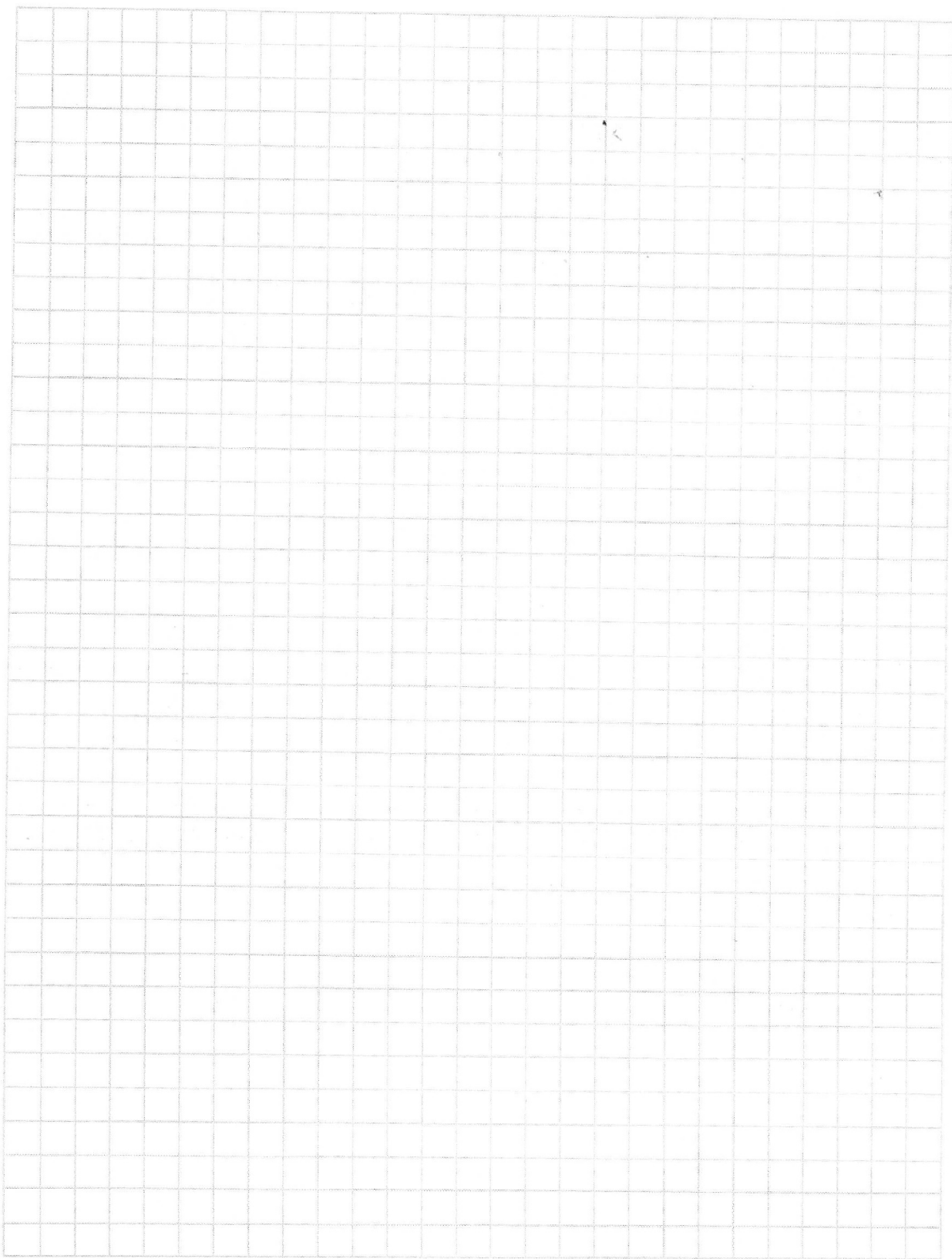


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \begin{cases} x^2 + ax + b = -2x^2 \\ 3x^2 + ax + b = 0 \end{cases} \quad D = a^2 - 12b = 0$$

Заг. 1

$$2) \begin{cases} x^2 + ax + b = -6 \\ x^2 + ax + b + 6 = 0 \end{cases} \quad D = a^2 - 4b - 24 = 0$$

$$\begin{cases} a^2 - 12b = 0 \\ a^2 - 4b - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 12b \\ 8b = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = \pm 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5^{151} \cdot 7^{600} &= x \cdot y \\ x &= 5^L \cdot 7^B \\ y &= 5^{151-L} \cdot 7^{600-B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq L \leq 151 \\ 151 - L &\geq 0 \\ 75 &\geq L \end{aligned}$$

Заг. 2

$$\begin{aligned} 0 &\leq B \leq 600 \\ 600 - B &\geq 0 \\ 300 &\geq B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &\in [0; 75] \\ B &\in [0; 300] \end{aligned}$$

$$76 \cdot 301$$

$$\begin{array}{r} 76 \\ 301 \\ \hline 76 \\ 228 \\ \hline 22876 \end{array}$$

Заг. 3

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0 \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{2x+2}{x-1} \\ y \leq 24 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &> 0 & y &> 0 \\ x &\neq 1 & y &\neq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Пусть } a &= \log_3 x \\ b &= \log_3 y \end{aligned}$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} + \frac{16}{\log_3 xy} = 0$$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} - \frac{16}{a+b} = 0$$

$$\frac{a^2 - 6ab + 9b^2}{ab(a+b)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - 3b = 0 \\ ab \neq 0 \\ a + b \neq 0 \end{cases}$$

$$\log_3 x = \log_3 y^3 \quad (ма ДДЗ)$$

$$x = y^3$$

$$3 \cdot \frac{y+1}{y-1} < 7 \cdot \frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{y^3+1}{y^3-1} = \frac{y+1}{y-1} \cdot \frac{y^2-y+1}{y^2+y+1}$$

$$\frac{y+1}{y-1} \left(\frac{2y^2-7y+7-3y^2-3y-3}{y^2+y+1} \right) > 0 \Rightarrow \frac{y+1}{y-1} \left(\frac{4y^2-10y+4}{y^2+y+1} \right) > 0$$

$$\frac{(y+1)(2y^2-5y+2)}{y^2-1} > 0$$

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4} \quad y = 2 \quad y = 0,5$$

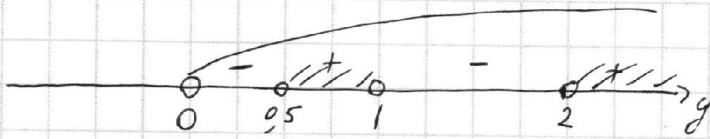


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



80 88
 11.8

$$y \in (0.5; 1) \cup (2; 2.4]$$

3-24

$$3 \log_y 27 + \log_y 3 + 8 \log_y \frac{1}{9} = 0$$

(22)

$$4 \log_3 3 - 4 \log_3 3 = 0$$

0 = 0 - верно

Задача 4

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a, b) = 5(a-b)^2 \\ 5 \cdot \max(a, b) = \text{НОК}(a, b) \end{cases}$$

Н.р. $a \leq b$

$$\begin{cases} 4a = 5(a-b)^2 \\ 5b = \text{НОК}(a, b) \leq ab \end{cases} \Rightarrow a \leq 5$$

$$5a^2 + (-10b-4)a + 5b^2 = 0$$

$$4 = b^2 - 10b + 25$$

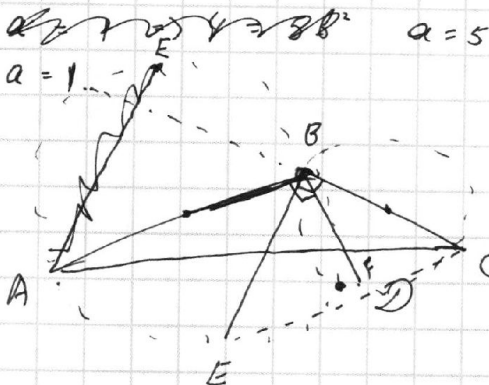
$$25 - 21 = 4$$

$$b = 5 \pm 2$$

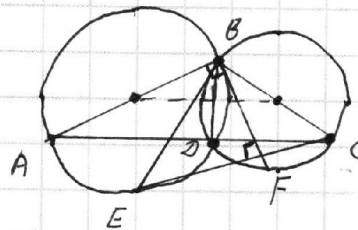
$$(b = 7) \quad b = 3$$

$$(5; 7)$$

$$(7; 5)$$



256
 305



$$\frac{BC}{CE} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{BE}{CE} = \frac{7}{4}$$

$$x = y \pm \sqrt{2y^2}$$

$$y = 0 \quad x = 0$$

$$y = -x^2 + 4x - 1 = -(x-2)^2 + 3$$

$$7y^2 - 7y + 7 - 3y^2 - 3y - 3 = 4y^2 - 10y + 4$$

$$|a-b| : 2$$

$$a \geq 10$$

$$5a^2 + (-10b-4)a + b^2 = 0$$

$$a = \frac{5b+2 \pm \sqrt{25b^2+20b+4-5b^2}}{5}$$

$$a = b + \frac{2 \pm \sqrt{5b^2+5b+1}}{5}$$

$$20 \quad 24$$

$$45 \quad 51$$

$$255 \neq 17.9 \cdot 5$$