



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = 2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -8$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a-b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$.
6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 4$, $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$, $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$, $CN = 2\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓1

$$f(b) = b^2 + pb + q;$$

$$f(b) = 16^2; \quad f^2 + pb + q = 16^2$$

$$b^2 - pb - q = 0 \quad - \text{ имеет единственное решение } (2) \\ D = 0 \Rightarrow$$

$$p^2 + 4q = 0$$

$$f(b) = -8 \quad - \text{ не имеет единственного решения } (1) \quad D = 0 \Rightarrow$$

$$b^2 + pb + q = -8$$

$$b^2 + pb + q + 8 = 0 \quad - \text{ имеет единственное решение } (1) \quad D = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p^2 + 4q = 0 \\ p^2 - 4(2+8) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 = -4q \\ p^2 = 4(2+8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(2+8) = -4q \\ p^2 = -4q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = -9 \\ p^2 = -4(-9) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = -9 \\ p = \pm 6 \end{cases}$$

Сумма корней уравнения $f(b) = 0$, т.е. $f(b) = b^2 + pb + q$ равна

- p, т.е. сумма корней равна ± 6

Ответ: ± 6



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

v_2

$$n = 2^{401} \cdot 3^{500}$$

$$\{b, y\} \subset \mathbb{N}$$

$$n = by; \quad y \neq x$$

$$y = kb \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$n = \cancel{x}^2 \cdot k$$

$$1) \quad \cancel{x^2 = 2^{401}} \quad X = 2^a \cdot 3^b, \text{ где } \{a, b\} \subset \mathbb{N}; a \in [0; 400];$$

$$b \in [0; 500]$$

$$\text{т.е. 401-й член; 500-й член, т.е. } k = 2^{2a-1} \cdot 3^{2b}, \text{ где}$$

$$k \in \mathbb{N}; b \in \mathbb{N}_{200}; a \in [1; 200]; b \in [0; 250], \text{ тогда}$$

$$\text{вариантов для } k: 200 \cdot 251 = 50200, \text{ где каждый } k$$

$$\text{в задаче задается однозначно; а значит а и у}$$

$$\text{всего есть } 50200 \text{ способов}$$

$$\text{Ответ: } 50200 \text{ способов}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

24

$$\begin{cases} 4 \min(a; b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \text{ н.д.}(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq b \\ 4b = 3(a-b)^2 \\ 3a = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < b \\ 4a = 3(a-b)^2 \\ 3b = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} a \geq b \\ 4b = 3(a-b)^2 \\ 3a = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

$$3a = \text{НОК}(a; b) \Rightarrow 3a : b$$

$$3a = \text{НОК}(a; b) \\ 3a = \frac{ab}{\text{НОД}(a; b)} \quad | : a \cdot 0(a \in \mathbb{N})$$

$$b = 3 \text{НОД}(a; b) \Rightarrow b : 3 : b = 3g$$

$$4a = 3 \quad 4 \cdot 81 = 3(a-b)^2 \quad S \in \mathbb{N} \\ 3S = (a-b)^2 \Rightarrow S = b^2; b = 3k^2$$

$$2k = a - 3b^2$$

$$a = 3b^2 + 2k; \quad 3a : 3k^2; \quad 3a = 3b^2 \cdot e$$

$$3k^2 + 2k = 3b^2 \cdot e$$

$$3k^2 + 2k : k \Rightarrow 2 : k \Rightarrow k = 1; b = 2$$

$$b = 3 \text{ или } b = 12$$

$$\begin{cases} 3(a-b)^2 = 4 \cdot 3 \\ 3(a-12)^2 = 4 \cdot 12 \end{cases} \quad \begin{cases} a-3=2 & (a \geq b \Rightarrow a-b = a-b) \\ a-12=4 \end{cases} \quad \begin{cases} a=5 \\ a=16 \end{cases}$$

Получаем в ответе пары (5; 3) и (16; 12) для вопроса 24



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для второго случая разность будет симметрична

~~Олег: (5; 3) ; (16; 12) ; 3~~

$$\begin{cases} a < b \\ 4b = 3(b-a)^2 \\ 3a = \text{НОЧ}(b; a) \end{cases} \quad \text{если } a \text{ и } b \text{ имеют общий делитель}$$

первую строку можно было бы записать так

симметрично

Олег: (5; 3) ; (16; 12) ; (3; 5) ; (12; 16).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

Реш.

А МС

$90^\circ < \angle B < 180^\circ$

$\text{опр}(O_1; R)$

$\text{опр}(O_2; r)$

O_1 - середина
поперечной на
на дуге на

В А и В С известны

$E \in \text{опр}(O_1; R)$

$F \in \text{опр}(O_2; r)$

$BE \perp AC$

$BF \perp CE$
 BF - диаметр $\text{опр}(O_2; r)$

$\text{опр}(O_1; R) \cap \text{опр}(O_2; r)$

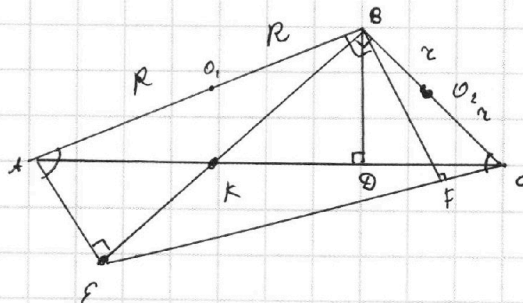
$= \{B, D\}$

$\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$

Найти:

$\frac{BF}{BD}$ - ?

Решение:



1) ~~Реш~~ O_1 и O_2 - середины BA и BC - очевидно

2) Пусть $BE \perp AC$; $\angle EAC$; $\angle EBF = 90^\circ$, OK опущена на AB и $L \in \text{опр}(O_1; R)$; аналогично $L \in \text{опр}(O_2; r) \Rightarrow$

L и D - совпадают

3) ~~Пусть $BF \perp CE$, то $\angle BFC = 90^\circ$ - отсюда на BC и~~

3) Пусть $BF \perp EC = S$, ~~Пусть~~ $BF \perp EC$; $BF \perp EC = S$, то $\angle BDC = 90^\circ$.
Отсюда на $BC \Rightarrow S \in \text{опр}(O_1; R) \Rightarrow R$ и S - совпадают
 $\Rightarrow KBF \cap EC = F$

4) ~~Пусть~~ BF - диаметр $\text{опр}(O_2; r)$, то $BF \perp AB$

5) $BF \perp AB$; $BF \perp CE \Rightarrow AB \parallel CE$

6) $BE \perp BC$; $BE \perp AC$, (то $\angle AEB = 90^\circ$, BE - диаметр $\text{опр}(O_1; R)$) и
 $AE \parallel BC$

7) $AE \parallel BC$; $AB \parallel CE \Rightarrow EABC$ - параллелограмм по определению $\Rightarrow$

$\angle EAB = \angle BCE = \alpha$; $AE = EC$; $EB = AB$, то $K = AC \cap BE$; $AE = BC = 2r$

8) ~~В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle BFC = 90^\circ$); $BF = BC \sin \alpha = AC \sin \alpha$~~

$= 2r \sin \alpha$ 8) $\cos \alpha = \cos \angle BCE = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$9) \triangle ABC (\angle BAC = 90^\circ) \quad BF = AC \sin \alpha = \frac{22 \cdot 4}{5} = \frac{88}{5}$$

$$10) \triangle KBC - \text{треугольник} (\angle KBC = 90^\circ) \text{ где } EB \perp BC; \quad AD - \text{высота и медиана} \rightarrow BD = \frac{BK \cdot BC}{KC}; \quad BC = 22; \quad KC = AK; \quad KB = \frac{BE}{2};$$

$$11) \triangle BEA - \text{треугольник} (\angle BEA = 90^\circ); \quad \angle BAE = \alpha \Rightarrow BE = AB \sin \alpha = \frac{22 \cdot 4}{5} = \frac{88}{5};$$

$$\cos \alpha = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{22}{22} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{BE}{22} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

$$12) \quad AE = 22; \quad EK = BK = \frac{BE}{2} = \frac{44}{5} \neq \frac{4 \cdot 52}{5 \cdot 3} = \frac{4}{3} \cdot 22 \Rightarrow \text{так не г. Проверим!}$$

$$AK = \sqrt{AE^2 + EK^2} = \sqrt{22^2 + \left(\frac{44}{5}\right)^2} = 2 \frac{\sqrt{52}}{3} = \frac{22\sqrt{13}}{3}$$

$$13) \quad BD = \frac{22 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2}{22 \sqrt{13} \cdot 3} = \frac{42}{\sqrt{13}}$$

$$14) \quad \frac{BF}{BD} = \frac{\frac{88}{5} \cdot 3}{42 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{13}}{10} \quad \text{или} \quad \frac{BF}{BD} = \frac{2\sqrt{13}}{10}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(b^2 - 3by + 4y^2)(y + b - 1) = 0 \\ y = (a+1)b - x^2 + 1 \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = b^2 + b + 1 \\ x^2 + 3by + 4y^2 \geq 0 \\ y = -x + 1 \\ y = (a+1)b - x^2 + 1 \end{cases}$$

$$b^2 - 3by + 4y^2 \geq 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} b \geq 0 \\ y \geq 0 \\ b^2 - 3by + 4y^2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b \geq 0 \\ y \geq 0 \\ (b/y)^2 - 3(b/y) + 4 \geq 0 \end{cases}$$

относительно y уравнение
квадратное и не имеет корней, так

$$D = 9 - 4 \cdot 4 < 0 \Rightarrow$$

$$b^2 - 3by + 4y^2 \geq 0 \quad (2) \\ \begin{cases} b \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Получаем совокупность в виде неравенств by —

и объединение неравенств $y \leq b^2 + b + 1$; равно $y \leq -b + 1$ или $(0; 0)$;

$y = (a+1)b - x^2 + 1$ — чужая, которая, о которой даже можно равно
две обе части с объединением.

Вспомогательная линия в виде неравенств (xy) :



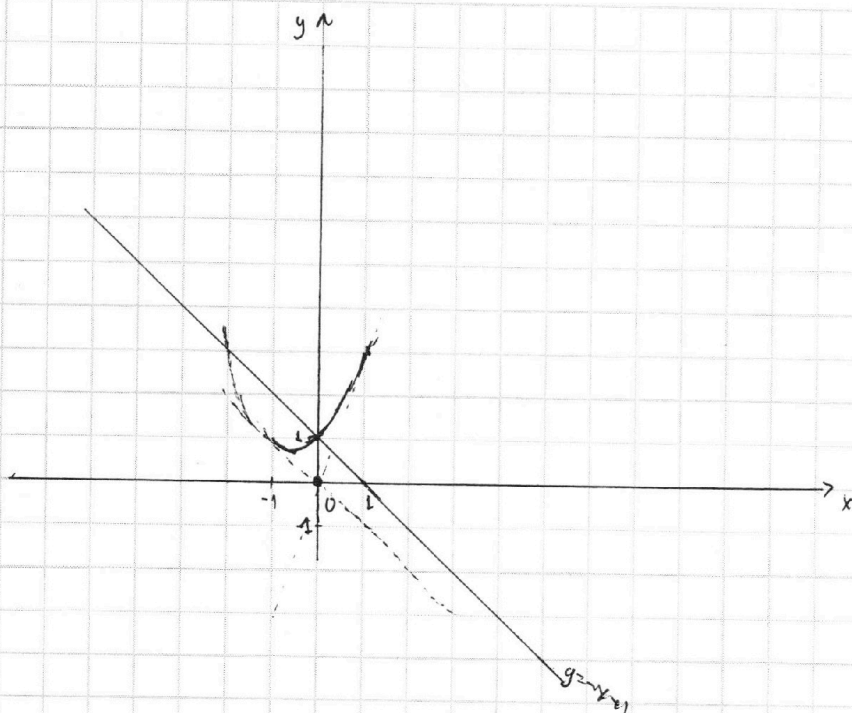
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



4 случая, когда прямая (1) проходит через начало координат, тогда $a^2 + 1 = 0$

$$a = \pm 1$$

или $a = 1$ $y = 3x$; или $a = -1$ $y = -x$, в обоих случаях

прямая (1) имеет две точки пересечения с окружностью. В этом случае прямая (1) имеет две точки пересечения с окружностью. Тогда $a = -1$

$$y = -x \text{ касательна } y = -b + 1; \text{ и касается } y = b^2 + b + 1, \text{ в } (-1, 1)$$

$$\text{касательна и параллельна } y = -b; \quad \begin{aligned} -1 - 1 &= -2x + 1 \\ -1 &= -1 \end{aligned} \quad (2x + 1 = (b^2 + b + 1))$$

$a = -1$ возможен, и это единственное значение параметра, при котором прямая (1) параллельна $y = -b + 1$.

Теперь рассмотрим случаи, когда $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, в этом случае прямая (1) не параллельна касательной $y = -b + 1$ и не проходит через $(0, 0) \Rightarrow$ две пересечения будут, когда



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐
☐
☐
☐
☐
☒
☐

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

уравнения $y = (a+1)b - a^2 + 1$ будет иметь ровно одну точку
с пересечением (одна точка, где уравнения $y = (2a+1)b - a^2 + 1$ и $y = -b + 1$
пересекаются)

$$\begin{cases} (a+1)b - a^2 + 1 = b^2 + b + 1 \\ (2a+1)b - a^2 + 1 = b^2 + b + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = x \\ a = x \end{cases}$$

$$(a+1)b - a^2 + 1 = (b^2 + b + 1) \quad \text{уравнение касательная}$$

$$\begin{cases} 2b^2 + 1 - b^2 + 1 = x^2 + x + 1 \\ a = x \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 = x^2 \\ a = x \end{cases} \quad \text{с) } a \in \mathbb{R}$$

Система имеет ровно два решения, когда $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Обратная система имеет ровно два решения
при $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

Решение:

сфера $(T; R)$

вписана в

ΔABC с вершинами A, B, C

и с центром O

- центр вписанной сферы

$[AQ] \perp [BC]$ (т.к. $AO \perp BC$)
 $= [P; Q]$

$[CN] \perp [AB]$ (т.к. $CO \perp AB$)
 $= [P; Q]$

$\Delta AOC \sim \Delta AOB$

$AO = 1; BO = 2$

$CO = 4$

$AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$AQ = \frac{2\sqrt{5}}{3}$

$CK = \frac{10\sqrt{5}}{3}$

$CM = 2\sqrt{5}$
 $\frac{CM}{AO} = \frac{2\sqrt{5}}{1} = 2$

Косинус

$\angle AOC = 120^\circ$

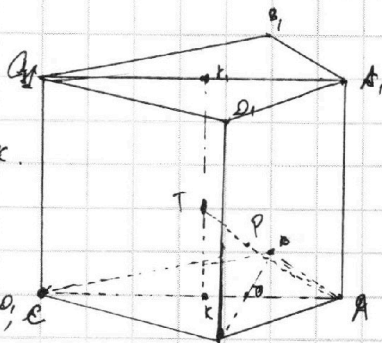
$\angle AOC = 120^\circ$

Решение:

1) Пусть сфера касается
 ΔABC (т.к. $AO \perp BC$)

2) Пусть сфера вписана в
 ΔABC с вершинами A, B, C

и она касается AB в точке P , BC в точке Q
 $AP = 1$, $BQ = 2$
 $CO = 4$
 $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$
 $AQ = \frac{2\sqrt{5}}{3}$
 $CK = \frac{10\sqrt{5}}{3}$
 $CM = 2\sqrt{5}$
 $\frac{CM}{AO} = \frac{2\sqrt{5}}{1} = 2$

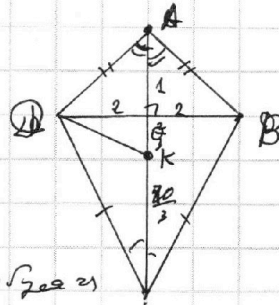


3) По формуле касательных к отрезкам секущих:
 $AK = \sqrt{AP \cdot AQ} = \frac{5}{3}$; $CK = \sqrt{CM \cdot CN} = \frac{20}{3}$

1) $AK + KC = \frac{5}{3} + \frac{10}{3} = 5$; $AC = AO + OC = 1 + 4 = 5$
 $AK + KC = AC$ т.е. AC , т.е. A, O, C лежат на одной прямой.
 $AO = 1$; $OK = AK - AO = \frac{2}{3}$; $KC = \frac{10}{3}$

2) K - точка пересечения биссектрис

т.к. $\angle OAB = \angle OBA$; $\angle OBC = \angle OCB$; $K \in AC$
 $\angle OAC = \angle OCA$; $\angle OBC = \angle OCB$ т.е. AC - биссектриса
 $\Delta AOC = \Delta AOB$ т.е. $AO = BO$ т.е. O - центр описанной окружности



O и B симметричны относительно AC т.е. $OB \perp AC$

6) Пусть $K \in AC$; $KF \perp AD$; $K \in AD$, т.е. K - точка пересечения AD и BC . $KF = R$

2) $KF \cdot AD = OD \cdot AK$ (по формуле секущих в ΔAOK); $OA = \sqrt{OD^2 + OK^2}$
 $= \sqrt{5}$; $OD = 2$; $AK = \frac{5}{3}$ т.е. $R = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8) V_{\text{инсид}, \text{инсид}, P_1} = S_{\text{фиг. } CD} \cdot H = \frac{R \cdot P_{\text{инсид}}}{2} \cdot 2R = R^2 \cdot P_{\text{инсид}} =$$

$$= R^2 (20D + 20C); DQ = \sqrt{OD^2 + OC^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5};$$

$$V_{\text{инсид}, A, B, C, D} = \frac{4 \cdot 5}{9} \cdot (2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}) = \frac{20 \cdot 6 \cdot \sqrt{5}}{9} = \frac{40\sqrt{5}}{3}$$

9) ~~то же~~

9) ℓ (тор) по формуле средней точки.

$$AT^2 - R^2 = AK^2$$

$$AT^2 = \frac{20}{9} + \frac{15}{9}$$

$$AT^2 = 5 \quad \text{т.к. } AK > 0, \text{ то}$$

$$AT = \sqrt{5}$$

$$10) \Delta ATP; AP = \frac{\sqrt{5}}{3}; TP = R = \frac{2\sqrt{5}}{3}; AT = \sqrt{5} \Rightarrow AP + PT = AT \Rightarrow$$

$$\overline{P; Q} \subset AT$$

$$11) \text{т.к. } \Gamma \in AP, \text{ то } \Gamma \in (APC) \Rightarrow \varphi(\Gamma; (APC)) = 0; \varphi = 0$$

$$\text{Оконч. } V_{\text{инсид}, A, B, C, D} = \frac{40\sqrt{5}}{3}; \varphi = 0$$

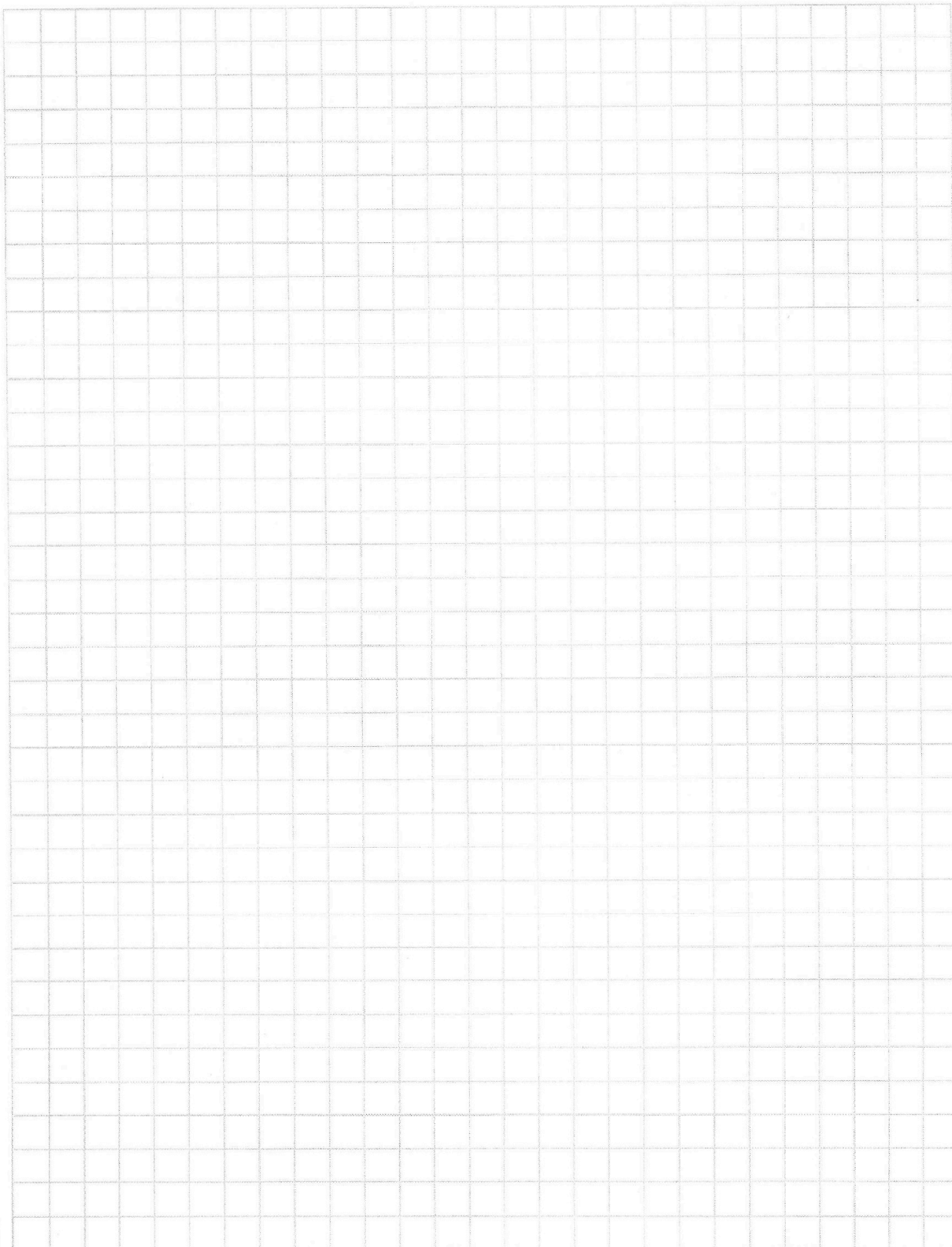


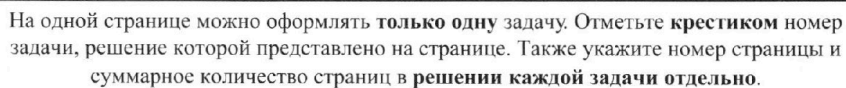
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



7
□

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = a - b$$

$$a = b + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{b}$$

$$4\theta = 3(a - \theta)^2$$

$$3a = \mu_{24}(a; b)$$

$$4a = 3(a - b)^2$$

3B - кон (0; 0)

3a: 6

30 = 30k

$$4b = 2a^2 + 2b^2 - 4ab$$

$a \geq b$

$$4b = 3(a-b)^2$$

$$3a = KOh(a, b)$$

$$3a = (a-b)k$$

$$a-b = \frac{13}{4}$$

$$r_l = \frac{dq}{dr}$$

$$9a^2 = 4b^2c^2$$

$$\frac{1}{\log_2 b} + \frac{9}{\log_2 y} + \frac{46}{\log_2 y} = 0$$

$$\frac{1}{a} + \frac{3}{8} = \frac{10}{a+8}$$

$$\frac{1}{\log_{10}} \cdot \frac{2}{\log_2} = \frac{26}{\log_2 + \log_{10}}$$

$$b^2 + a + a^2 + b = 10ab$$

$$4b \geq 3(a+b)^2$$

Звезда В. Знобюв



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(b) = x^2 + px + q$$

$$x^2 + px + q = 2b^2$$

$$x^2 - px - q = 0$$

$$x^2 + px + q = -8$$

$$p^2 - 4(q+8) = 0$$

$$-4q = 4(q+8)$$

$$-q = q+8$$

$$y = v^2 + v + 1$$

$$v_0 = \frac{-1}{1 \cdot 1} = -\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1-2+4}{4} = \frac{3}{4}$$

$$p^2 + 4q = 0$$

$$-4q = 4q + 32$$

$$\begin{cases} p^2 + 4q = 0 \\ p^2 - 4q - 32 = 0 \end{cases}$$

$$8q = -32$$

$$q = -4$$

$$p^2 = 16; p = \pm 4$$

$$y = -x$$

$$y^2 = 2v + 1$$

$$h = 2^{401} \cdot 3^{500}$$

$$h = b^y; g: y_1; y = 60$$

$$-1 = -2 + 1$$

$$h = b^2 k$$

$$\begin{cases} \log_2 2 + 3 \log_2 8 + 4 \log_2 \frac{1}{16} = 0 \\ \frac{b-1}{b+1} > \frac{3y-3}{y+7} \\ b \geq 31 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\log_2 2} + \frac{3}{\log_2 8} + \frac{4}{\log_2 \frac{1}{16}} = 0$$

$$a \geq b$$

$$\begin{cases} 4b = 3(a-b)^2 \\ 3a = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

$$4b = 3(p^2 + b^2 - 2pb)$$

$$3a : b$$

$$4b = 3a^2 + 3b^2 - 6ab$$

$$3a = \frac{ab}{\text{НОК}(a; b)} \quad b = j \cdot \text{НОК}(a; b)$$

$$4b$$

$$a : b$$

$$3a : b$$

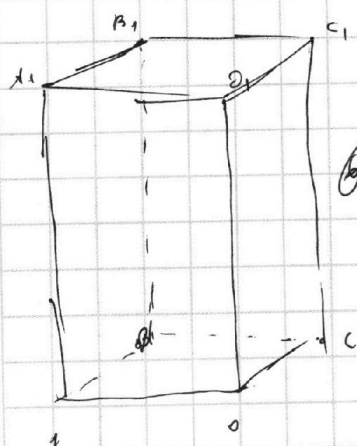


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

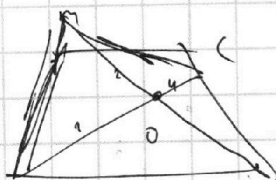
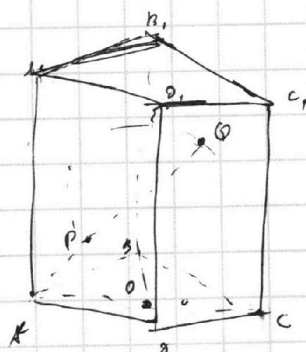
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\theta = 3k^2$$

$$3k = a - 3c^2$$

$$k(3k+1) = a$$



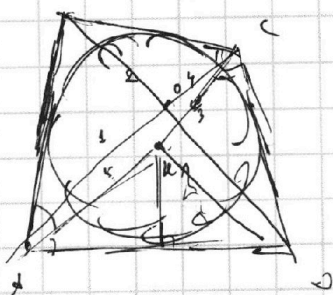
$$\begin{aligned} 3k(3k+1) &= 3k^2 + 3k \\ 3k+1 &= k \\ 2 &= k \end{aligned}$$

$$4a-3b = (a-b)$$

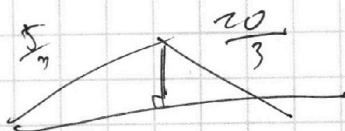
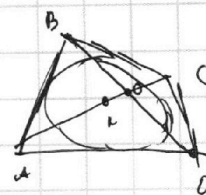
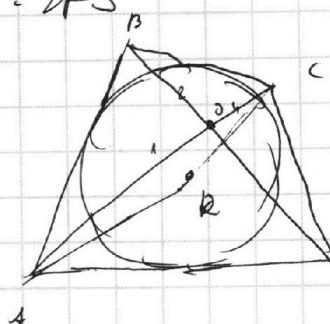
$$\frac{10}{5}$$

$$\frac{5 \cdot 5 a - 3b}{9} = \frac{20 \cdot 5}{9}$$

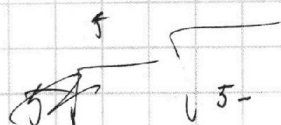
$$a + 3a = 2$$



$$\sqrt{2} KS = 2PS$$



$$4 \cdot \frac{15}{5} + \frac{10}{3} = \frac{15+15+10}{3} = 10 \quad \frac{p}{2} = 5$$



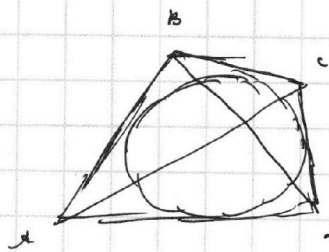
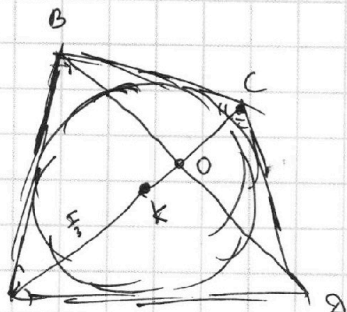


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

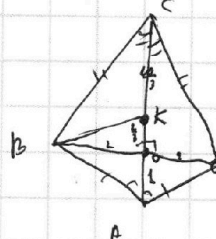
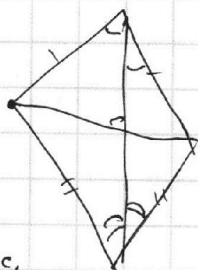
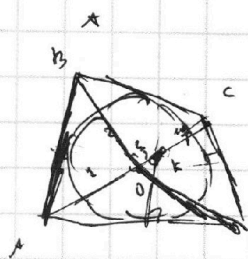
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

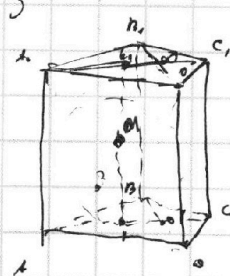
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



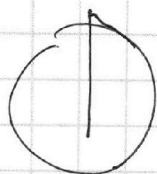
$$2 \cdot \frac{r}{3} = \frac{\sqrt{5} \cdot d}{3} \\ d = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$



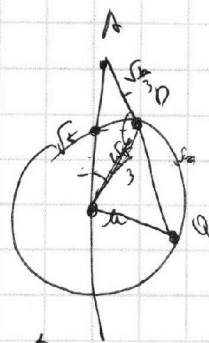
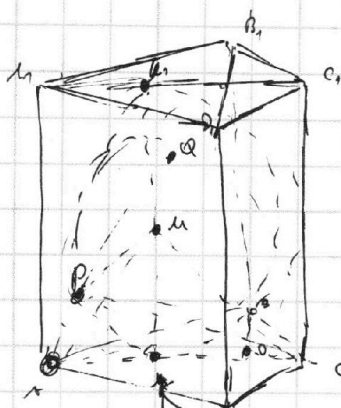
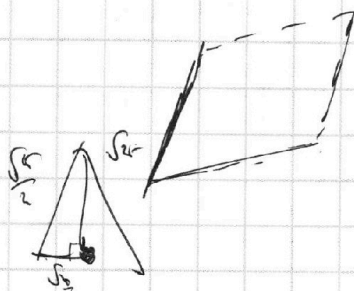
$$2 \cdot \frac{r}{3} = \sqrt{5} \cdot d$$



$$d = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$



$$d = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

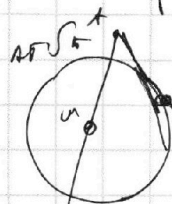


$$\frac{25}{9} = R^2 - 4u^2$$

$$4u^2 = \frac{25}{9} + \frac{16}{9} = 5$$

$$\frac{25}{9} = \frac{20}{9} - 4u^2$$

$$4u^2 = \frac{5}{9} \quad \frac{\sqrt{5}}{3}$$



$$4u^2 - R^2 = 4k^2$$

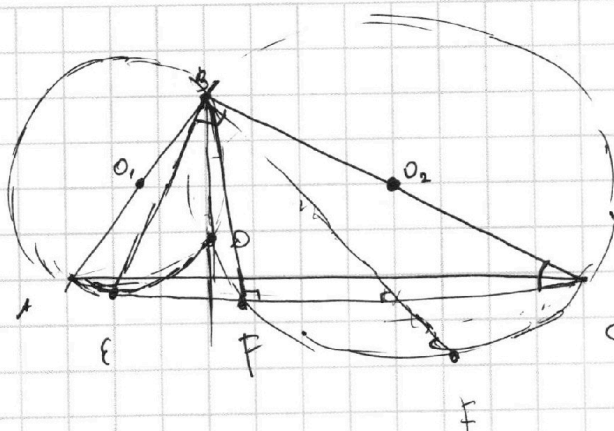


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

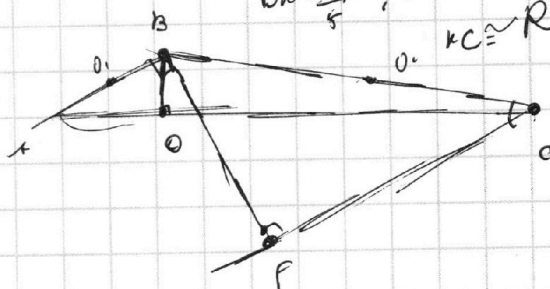
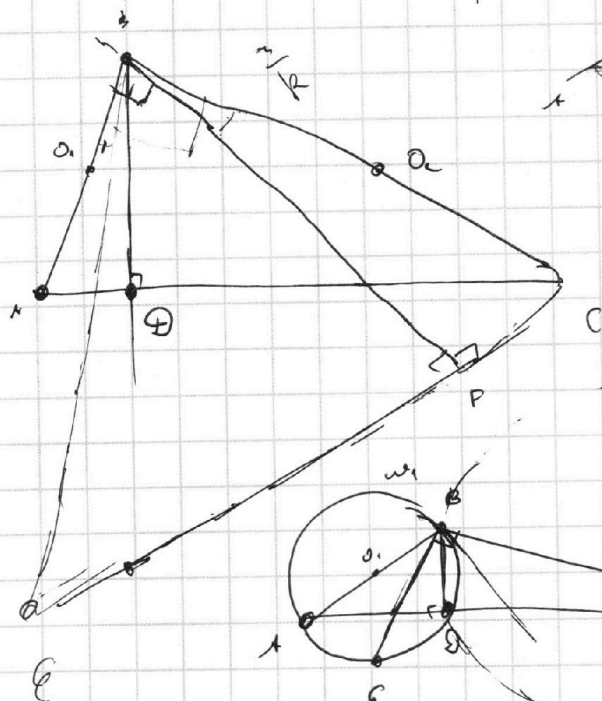
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



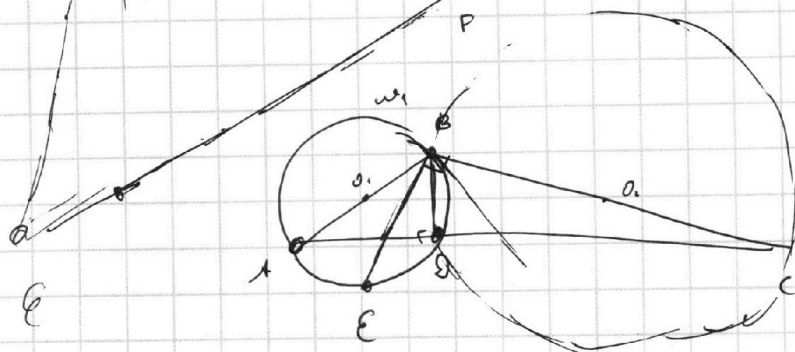
$$h_D = \frac{BK \cdot KC}{KC}$$

$$OK = \frac{8R}{5}; KC = 2R$$

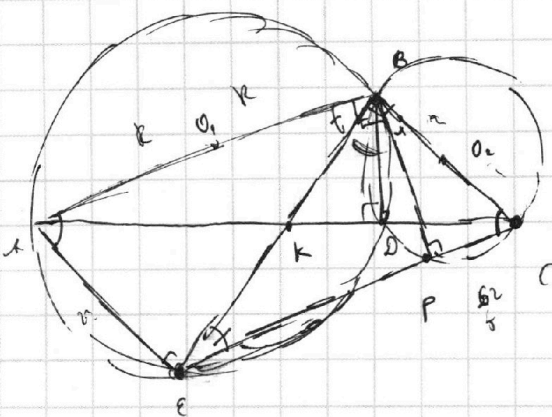
$$KC \approx R$$



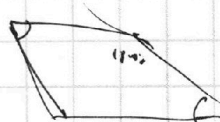
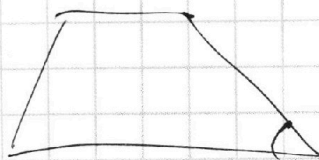
$$\frac{8R}{5}$$



$$\frac{8R}{5} \cdot 2R = OD \cdot AC$$



$$\frac{4}{3}$$



$$\frac{4}{3} \cdot \frac{8R}{5} = 2R - \frac{6R}{5}$$

$$32R = 30R - 18R$$

$$30R = 50R$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (y - v^2 - v - 1)(v^2 - 3vy + 4y^2)(y - v - 1) = 0 \\ y = (2a+1)v - a^2 + 1 \end{cases}$$

$$y = v^2 + v + 1; \begin{cases} v=0 \\ y=0 \end{cases}; y = -v + 1 \quad \begin{aligned} &9y^2 - 16y^2 \\ &\left(\frac{v}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{v}{y}\right) + 4 = 0 \\ &t^2 - 3t + 4 \end{aligned}$$

$$\frac{-1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

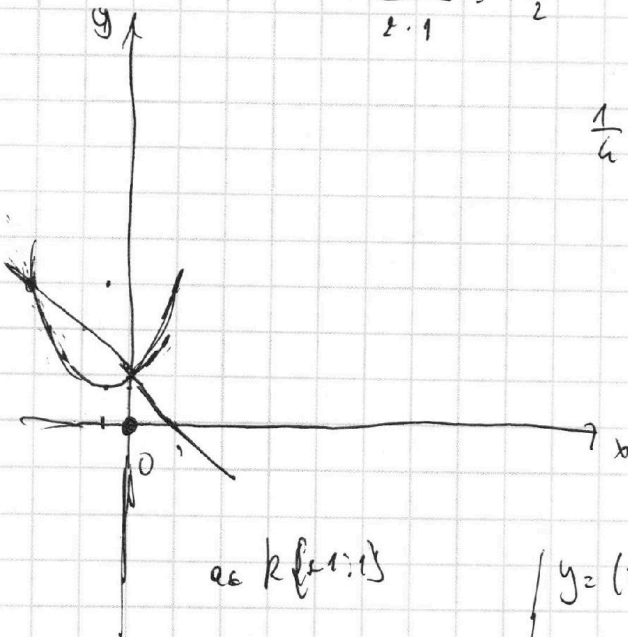
$$9 - 4b = -9$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

$$a = \pm 1$$

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{5, -1, 1\}$$

$$a = -1$$



$$a \in \mathbb{R} \setminus \{5, -1, 1\}$$

$$a \geq 0$$

$$4b = 8(a-b)^2$$

$$3a = 16b(a-b)$$

$$\begin{cases} y = (2a+1)v - a^2 + 1 \\ y = -v + 1 \end{cases}$$

$$(3a+4b) : (a-b)$$

$$7b : (a-b)$$