



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Число A имеет вид $\overline{aaaa}$, где a — цифра

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$$

т.к. a — цифра, $A \not\div 11^2$, $\not\div 101^2$

$$\begin{array}{l} A \cdot B \cdot C = n^2 \\ \left. \begin{array}{l} A \div 11, \div 101 \\ A \not\div 11^2, \not\div 101^2 \\ 11, 101 - \text{простые} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A \cdot B \cdot C \div 11, \div 101; \\ \text{хотя бы одно из чисел } B, C \\ \text{кратно } 11, \text{ хотя бы одно} \\ \text{кратно } 101 \end{array} \end{array}$$

$$C - \text{двузн.} \Rightarrow C \not\div 101 \Rightarrow B \div 101$$

Среди двухзначных чисел: 101 цифра 1 в записи есть только у 101 $\Rightarrow B = 101$

$$\text{тогда } B \not\div 11 \Rightarrow C \div 11$$

Среди двухзначных чисел: 11 цифра 5 в записи есть только у 55 $\Rightarrow C = 55$

$$\text{тогда } A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 55 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot a \cdot 5 = n^2 \Rightarrow$$

$$a \cdot 5 = k^2, k \in \mathbb{N}$$

$$a - \text{цифра} \Rightarrow a = 5$$

$$\begin{array}{l} \text{Ответ: } A = 5555 \\ B = 101 \\ C = 55 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy}$$

$$k' = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$k = k' \Rightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+1=0 & \text{— невозможно, т.к. } x, y > 0 \\ xy = (x-3)(y+3) \end{cases}$$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$

$$3x - 3y - 9 = 0$$

$$y = x - 3$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) =$$
$$= x^3 - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 27x = 27$$

Ответ: $M=27$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \frac{1}{2} \cos(\pi x + \pi y) - \frac{1}{2} \cos(\pi x - \pi y) = \\ = \cos^2 \pi x + \frac{1}{2} \cos(\pi x + \pi y) + \frac{1}{2} \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{2\pi x + \pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi x - \pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 2k + 1 \\ x + y = 2k + 1 \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(x; 2k+1-x); (x; 3x-2k-1), k \in \mathbb{Z}$

б) Заметим, что на множестве целых чисел совокупности

$$\begin{cases} 3x - y = 2k + 1 \\ x + y = 2k + 1 \end{cases} \text{ удовлетворяет любая пара чисел разной} \\ \text{четности.}$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi \quad \begin{cases} \frac{x}{4} \in [-1; 1] \Rightarrow x \in [-4; 4] \\ \frac{y}{9} \in [-1; 1] \Rightarrow y \in [-9; 9] \end{cases}$$

$$\arccos x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ или}$$

$$\arccos x \in [0; \frac{\pi}{2}] \text{ или } \forall x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi \\ \arccos \frac{x}{4} - \arccos \frac{y}{9} < 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arccos \frac{x}{4} \neq \pi \\ \arccos \frac{y}{9} \neq \pi \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \cos(\arccos \frac{x}{4}) \neq \cos \pi \\ \cos(\arccos \frac{y}{9}) \neq \cos \pi \end{cases}; \begin{cases} \frac{x}{4} \neq -1 \\ \frac{y}{9} \neq -1 \end{cases}; \begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{cases}$$

Нам нужно:

$$\begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \\ x \in [-4; 4] \\ y \in [-9; 9] \\ x, y \text{ — числа разной четности} \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

~~$x \in [-4; 4]$~~ $\Rightarrow x \in (-4; 4)$
 $\Rightarrow y \in (-9; 9)$
 $x, y \text{ — числа разной четности}$

$\Rightarrow$ при $x = -3; -1; 1; 3;$ ~~$x = -4; 4$~~

y может быть $= -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8$ — всего $4 \cdot 9 = 36$ пар

при $x = -2; 0; 2; 4;$ y может быть $= -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9$ — всего $4 \cdot 9 = 36$ пар

$36 + 36 = 72$

Ответ: 72 пары чисел



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдём вероятность того, что Тётя и Вася вместе
попадут на концерт, если число билетов $= k \in \mathbb{N}$,
количество одноклассников $= n \in \mathbb{N}$

Всего вариантов выбрать k человек, кому достанется
билет, из n — $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Если Тётя и Вася идут на концерт, остается выбрать
еще $k-2$ человека, кому достанется билет, из $n-2$
оставшихся — $C_{n-2}^{k-2} = \frac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot (n-k)!}$

Тогда вероятность того, что Тётя и Вася пойдут на
концерт $= \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{n!}{n(n-1) \cdot (n-2)!} =$
 $= \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$

В начале месяца эта вероятность $= \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{12}{n(n-1)}$

В конце месяца: $\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{12}{n(n-1)} \cdot 3,5 = \frac{42}{n(n-1)}$

$k(k-1) = 42$ k -число билетов в конце месяца

$$k^2 - k - 42 = 0$$

$$(k-7)(k+6) = 0$$

$$k = 7$$

$k = -6$ — не возможно, т.к. $k \in \mathbb{N}$

Ответ: 7 билетов

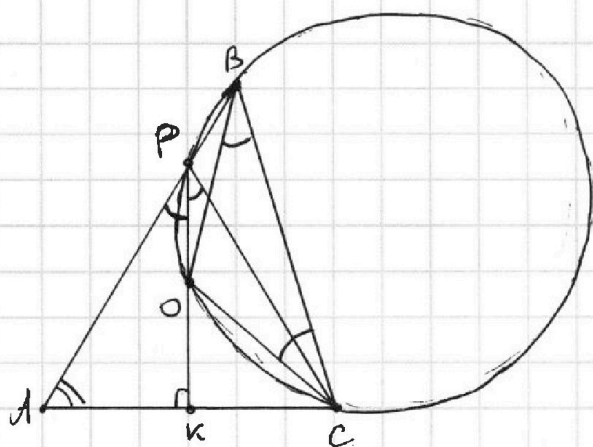


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) O - центр опис. окр. $\triangle ABC \Rightarrow \angle BOC = 2\angle BAC$; $\angle CBO = \angle BCO = \alpha$;

$$\angle CBO = \angle CPO = \alpha \Rightarrow \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$$

2) OPRBC - впис. $\Rightarrow \angle CBO = \angle CPO = \alpha$;

$$\angle OCB = 180^\circ - \angle OPB = \angle APO = \alpha$$

3) Пусть $PO \cap AC = K$. В $\triangle APK$: $\angle AKP = 180^\circ - \angle BAC - \angle APO = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ \Rightarrow PO \perp AC$

4) $PO \perp AC$
 $\angle CPO = \angle APO = \alpha \Rightarrow \triangle APC - \text{прям.}; AK = CK = \frac{1}{2} AC = 2$

5) В прямоуг. $\triangle APK$: $\cos \angle BAC = \frac{AK}{AP} = \frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{5}{8} \Rightarrow \sin \angle BAC = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$

$$6) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{16}{5} + 2\right) \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

$$\text{Ответ: } S_{\triangle ABC} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

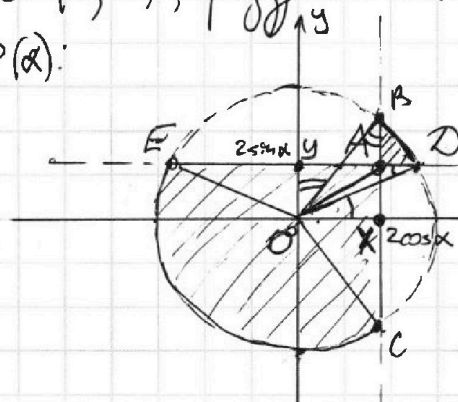
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \geq 9 & (2) \end{cases}$$

(1): 1 и 3 четверти плоскости, ограниченные прямыми $x = 2\cos\alpha$, $y = 2\sin\alpha$
 (2): Часть плоскости внутри окружности с центром в точке $(0; 0)$, радиусом 3.
 тогда $\Phi(\alpha)$:



по т. Пифагора:

$$OA = \sqrt{4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha} = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ точка пересечения
 прямых $x = 2\cos\alpha$ и $y = 2\sin\alpha$ всегда
 лежит внутри окр. $x^2 + y^2 = 9$

Поэтому $BC = 2BX$ и $DE = 2DY$

по т. Пифагора: $BX = \sqrt{OB^2 - OX^2} = \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} = \sqrt{5 + 4\sin^2\alpha}$;

$$DY = \sqrt{OD^2 - OY^2} = \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$$

$$BC = 2\sqrt{5 + 4\sin^2\alpha}; \quad DE = 2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$$

$$\sin \angle XOD = \sin \angle YDO = \frac{2\sin\alpha}{3};$$

$$\sin \angle YOB = \sin \angle XBO = \frac{2\cos\alpha}{3};$$

$$\cos \angle XOC = \frac{2\cos\alpha}{3}$$

$$\cos \angle YOE = \frac{2\sin\alpha}{3}$$

$$\sin \angle XOD = \frac{2\sin\alpha}{3} = \cos \angle YOE \Rightarrow \angle XOD + \angle YOE = 90^\circ \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right\}$$

$$\sin \angle YOB = \frac{2\cos\alpha}{3} = \cos \angle XOC \Rightarrow \angle YOB + \angle XOC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle EOB + \angle DOC = 180^\circ \Rightarrow \angle BOD + \angle EOC = 180^\circ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle BOD + \angle EOC = 180^\circ \Rightarrow \angle BOD + \angle EOC = \frac{1}{2} \text{ длины окр.} = \\ = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = 3\pi \text{ - не зависит от } \alpha.$$

Найдём $M = \angle BOD + \angle EOC + BC + ED = 3\pi + BC + ED$

Найдём максимум $BC + ED = 2\sqrt{5+4\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha}$

Пусть $\sin^2\alpha = a$

$$f(a) = 2\sqrt{5+4a} + 2\sqrt{9-4a} \rightarrow \max$$

$$f'(a) = \frac{2 \cdot 4}{2\sqrt{5+4a}} + \frac{2 \cdot (-4)}{2\sqrt{9-4a}} = \frac{4\sqrt{9-4a} - 4\sqrt{5+4a}}{\sqrt{5+4a} \cdot \sqrt{9-4a}} = 0$$

$$\sqrt{9-4a} - \sqrt{5+4a} = 0$$

$$\sqrt{9-4a} = \sqrt{5+4a}$$

$$9-4a = 5+4a$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{5+2} + 2\sqrt{9-2} = 4\sqrt{7}$$

тогда максимальное $M = 3\pi + 4\sqrt{7}$

Достиг. при $\sin^2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $M_{\max} = 3\pi + 4\sqrt{7}$

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В прямоуго. ΔAPK

$$\cos \angle PAK = \frac{AK}{AP} = \frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{5}{8}$$

$$\sin \angle PAK = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

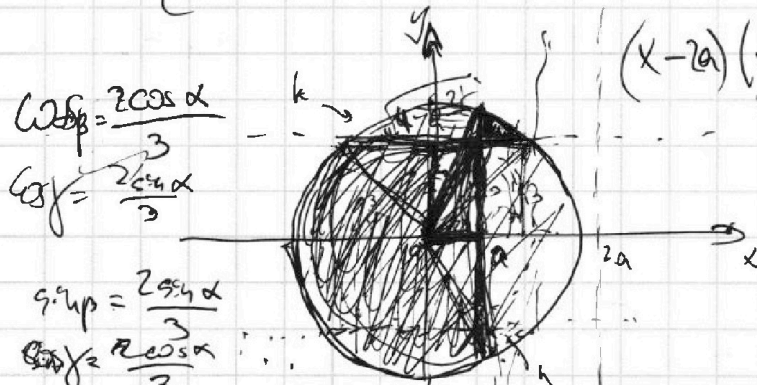
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{16}{5} + 2 \right) \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{5} \cdot \sqrt{39} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 2\cos\alpha \\ y &= 2\sin\alpha \end{aligned} \quad \begin{aligned} \sin\alpha &= a \\ \cos\alpha &= \sqrt{1-a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$$



$$(x-2a)(y-2\sqrt{1-a^2}) \geq 0$$

$$l = 2\sqrt{1-a^2}$$



$$k = 2 \cdot \sqrt{9 - 4 + a^2} = 2 \cdot \sqrt{5 + a^2}$$

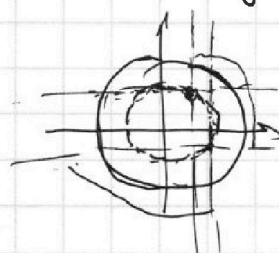
$$h = 2 \cdot \sqrt{9 - a^2} \quad a = 2\cos\alpha$$

$\Rightarrow x = 2\cos\alpha$ и $y = 2\sin\alpha$ не могут одновременно пересекать окружн.

$$\arcsin\left(\frac{2\sin\alpha}{3}\right)$$

$$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{16}{9}\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{16}{9}\cos^2\alpha - 1$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{(n-k)! \cdot (n-k+1)(n-k+2) \dots (n-1)n}{(k-2)! \cdot (k-1)k}$$

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{n!}{k \cdot (k-1)(k-2)! \cdot (n-k)!}$$

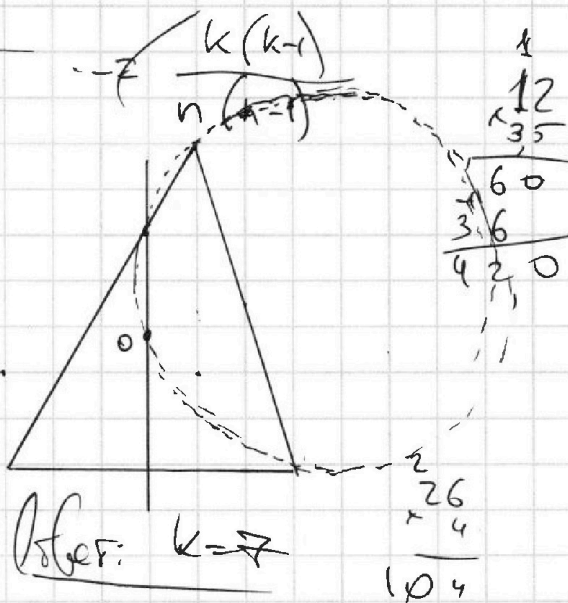
$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{42}{h(h-1)}$$

$$k(k-1) = 42$$

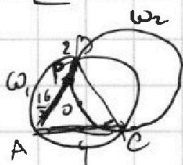
$$k^2 - k - 42 = 0$$

$$(k-7)(k+6) = 0$$

$$\begin{cases} k=7 \\ k=-6 \end{cases} \text{ --- не по } x.$$



25



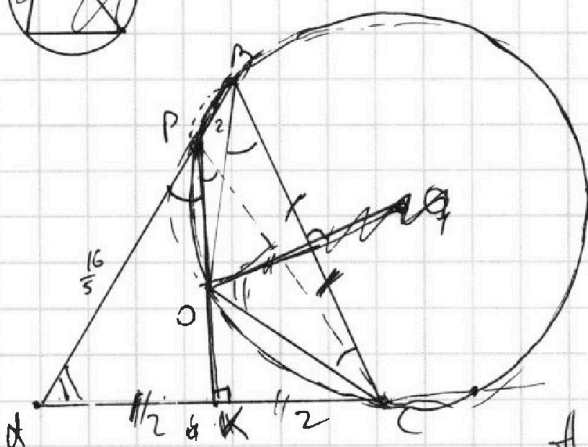
$$\frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5}$$

$$\frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5} = 4 \cdot \frac{4 \cdot 26}{25}$$

$$\frac{4 \cdot 26}{25} - 4 = \frac{4}{25}$$



6



$$\angle A = \frac{1}{2} \angle BOC = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle OBE = \angle OCB = \alpha$$

$$\angle OBC = \angle OPO = \alpha$$

$$\angle OAB = 180^\circ - \angle OPB = \angle APO = \alpha$$

$$\angle APO = \angle CPO = \alpha$$

поэтому PO го перес. с AC

$$\angle APO = 180^\circ - \angle BAC - \angle APO = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ \Rightarrow PO \perp AC = K$$

$$\triangle BPC: PO, \text{ --- медиана, } PO \perp AC \Rightarrow \triangle APC - \text{прям.} \Rightarrow AK = CK = \frac{AC}{2} = 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cdot \sin \beta &= \\ &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)) \end{aligned}$$

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \right) \cdot \sin \pi x = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-y}{2} \right) \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \right) \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-y}{2} \right) \cdot \sin \pi x - \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-y}{2} \right) \cdot \cos \pi x \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \right) = 0$$

$$2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + k$$

$$x+y = 2k+1$$

$$-2 \sin \alpha \cdot \sin \beta =$$

$$= \cos \varphi - \cos \psi$$

$$\alpha = \frac{\varphi + \psi}{2} \quad 2\alpha + 2\beta = 2\varphi$$

$$\beta = \frac{\varphi - \psi}{2} \quad 2\alpha - 2\beta = 2\psi$$

$$x = 2k+1 - y$$

$$N3 a) \quad x+y = 2k+1$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \frac{\pi}{2} x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi x + \frac{1}{2} (\cos(\pi x + \pi y) - \cos(\pi x - \pi y)) = \cos^2 \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{2} (\cos(\pi x + \pi y) + \frac{1}{2} (\cos(\pi x - \pi y)))$$

$$(\sin^2 \frac{\pi}{2} x)$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{2} x - \sin^2 \frac{\pi}{2} x + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$2 \cos \left(\frac{2\pi x + \pi x - \pi y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi x - \pi x + \pi y}{2} \right) = 0$$

$$2 \cos \left(\frac{3\pi x - \pi y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi x + \pi y}{2} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} x/1 \quad 3x - y &= 2k+1 \\ y/2 \quad x + y &= 2k+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3\pi x - \pi y}{2} &= \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \left| \cdot \frac{2}{\pi} \right| \quad 3x - y = 2k+1 \\ \frac{\pi x + \pi y}{2} &= \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \left| \cdot \frac{2}{\pi} \right| \quad x + y = 2k+1 \end{aligned}$$

$$x = 2k+1 - y$$

$$\begin{aligned} 3x - 2k - 1 &= 2k+1 - y \\ x &= 2k+1 - y \end{aligned}$$

(a)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$= (-2 \sin \alpha \sin(-\beta)) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$= -2 \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos \pi y = \cos(2\pi k + \pi - \pi x) = -\cos \pi x$$

$$y; 3x - 2k - 1$$

$$\sin \pi x - \sin(2\pi k + \pi - \pi x)$$

$$\sin \pi y = \sin(3\pi x - 2\pi k - \pi) = -\sin 3\pi x$$

$$\sin \pi x - \sin \pi x - \sin \pi x = \cos \pi x - \cos \pi y = \cos \pi x - \cos 3\pi x$$

$$(\sin \pi x + \sin 3\pi x) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos 3\pi x) \cdot \cos \pi x$$

$$2 \sin 2\pi x \cdot \cos \pi x \cdot \sin \pi x = 2 \sin 2\pi x \cdot \sin \pi x \cdot \cos \pi x$$

$$b) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{5} < 2\pi$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{5}$$

$$x=2$$

$$\arccos \frac{x}{4}$$

н ординатикамек.

$$\pi + \beta: \frac{n}{4}, \frac{3}{4}$$

$$\pi + \beta: \frac{n}{4} \text{ не подходит: } \frac{n-4}{4}$$

$$\beta \text{ не подходит: } \frac{n-4}{4}$$

$$\text{оба не подходят } n-4$$

$$n-4 \text{ не подходит из } n-2 \text{ человек}$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2) \cdot (n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{12}{n(n-1)}$$

$$k \text{ человек: } \frac{C_{n-k+2}^k}{C_n^k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{12}{n(n-1)}$$

$$\frac{12}{25} + \frac{10}{25} = \frac{22}{25}$$

$$\frac{4}{25} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{12}{5 \cdot 4} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{n-4}{5} \cdot \frac{4}{5}$$

$$\frac{n-4}{5} \cdot \frac{n-4}{5}$$

Сб
Сб
Сб



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+y-3)(x^2+3x+9)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$x+y-3=0$$

$$x=3-y$$

$$(x,y < 3)$$

$$y=3-x$$

$$x^3 + y^3 - 9xy = x^3 - (3-x)^3 - 9x(3-x) =$$

$$= x^3 - (27 - 27x + 9x^2 - x^3) - 27x + 9x^2 =$$

$$= x^3 - 27 + 27x - 9x^2 + x^3 - 27x + 9x^2 =$$

$$= 2x^3 - 27$$

$$(x \neq 3)$$

$$\sqrt{2} \quad \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{xy}$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$x+y+1=0$$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$

$$x-1$$

$$3x-3y-9=0$$

$$x-y-3=0$$

$$y=x-3$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) =$$

$$= x^3 - (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) - 9x^2 + 27x =$$

$$= x^3 - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 27x = 27$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} A &= \overline{aaaa} \\ B &= \overline{xy1} \text{ или } \overline{x1y} \\ C &= \overline{cs} \text{ или } \overline{sc} \end{aligned}$$

$$A \cdot B \cdot C = h^2$$

$$1111 : a$$

$$11 \cdot 101 \cdot a$$

$$xy2 \quad B: 101$$

$$C: 101 \rightarrow B: 101$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 202 \\ 303 \\ 404 \\ 505 \\ 606 \\ 707 \end{array}$$

Резу. фазм. 2 : 101 группа 1
есть только у 101

$$B = 101$$

$$C: 11 \Rightarrow C = 55 \Rightarrow$$

$$ABC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot 11 \cdot 5 = h^2 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot a \cdot 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 5$$

$$\begin{aligned} A &= 5555 \\ B &= 101 \\ C &= 55 \end{aligned}$$

$$n^2 \quad x, y \geq 0$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = ?$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$$

$$xy - 3x - 3y + 9$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{xy-3x-3y+9}$$

$$xy = xy - 3x - 3y + 9$$

$$\begin{aligned} 3x + 3y - 9 &= 0 \\ x + y - 3 &= 0 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~XXXXXXXXXX~~

$$\arccos x \leq \pi$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi \quad \text{для } \forall x, y, \quad -4 \leq x \leq 4, -9 \leq y \leq 9$$

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{4} \neq \pi \\ \arccos \frac{y}{9} \neq \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cos(\arccos \frac{x}{4}) &\neq \cos \pi \\ \cos(\arccos \frac{y}{9}) &\neq \cos \pi \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{4} \neq -1 \\ \frac{y}{9} \neq -1 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\textcircled{x \neq -4} \\ &\textcircled{y \neq -9} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x \in (-4; 4] \\ y \in (-9; 9] \\ \begin{cases} x+y=2k+1 \\ 3x-y=2k+1 \end{cases} \end{cases}$$

$$x = -3$$

$$y = -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8$$

$$x = -2$$

$$y = -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9$$

$$x = -1$$

$$y = 9 \text{ вар-тов}$$

$$x = 0$$

$$y = 9 \text{ вар-тов}$$

$$x = 1$$

$$\vdots$$

$$x = 4$$

$$\text{Всего: } 8 \cdot 9 = 72 \text{ пар}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

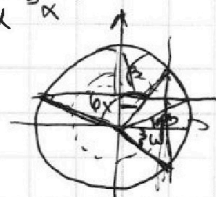
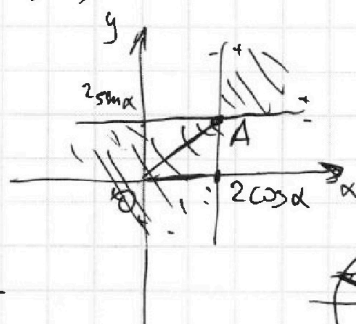
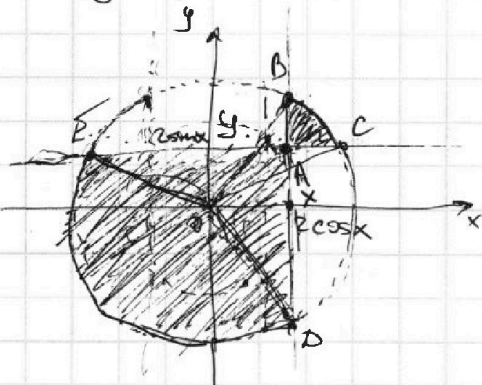
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 \leq 9 - \text{круг с центром } (0; 0), r = 3$$

$$(x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0$$

Решение

$$OA = \sqrt{4 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha} = 2$$



$$BD = 2 \cdot BX = 2 \cdot \sqrt{OB^2 - OX^2} = 2 \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} = 2 \sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha}$$

$$2 \sqrt{5 + 4a} + 2 \sqrt{9 - 4a} \rightarrow m$$

$$f'(a) = \frac{4}{\sqrt{5+4a}} - \frac{4}{\sqrt{9-4a}}$$

$$\sqrt{9-4a} - \sqrt{5+4a} = 0$$

$$9-4a = 5+4a \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$4a = 4 \quad a = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2a \cos \alpha = \frac{2a \cdot r}{2} = \frac{2a \cdot 3}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \sqrt{5+2} + 2 \sqrt{9-2} = 4\sqrt{7}$$

$$CE = 2 \cdot CY = 2 \sqrt{OC^2 - OY^2} = 2 \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$

$$4 + 4 \sin^2 \alpha \quad 5 + 4a^2 =$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \sin \alpha}{3} \quad \sin \alpha = \frac{2 \cos \alpha}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{2 \cos \alpha}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{2 \sin \alpha}{3}$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$