



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = 2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -8$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a - b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$.
6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 4$, $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$, $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$, $CN = 2\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓1

Пусть $f(x) = x^2 + ax + b$

$$x^2 + ax + b = 2x^2 \Rightarrow x^2 - ax - b = 0 \quad D = a^2 + 4b$$

$$\text{или 1 корень, то } D = 0 \Rightarrow a^2 + 4b = 0$$

$$x^2 + ax + b = -p \Rightarrow x^2 + ax + b + p = 0; \quad D = a^2 - 4b - 32$$

$$\text{или один корень, то } D = 0 \Rightarrow a^2 - 4b - 32 = 0$$

$$\begin{cases} a^2 + 4b = 0 \Rightarrow a^2 = -4b \\ a^2 - 4b - 32 = 0 \end{cases}$$

$$-4b - 4b - 32 = 0 \Rightarrow -8b = 32 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow a^2 = 16$$

$$a = \pm 4$$

$$\text{при } a = 4: f(x) = x^2 + 4x - 4$$

сумма корней по теореме Виета: $x_1 + x_2 = -a = -4$ (для приведенного трёхчлена)

$$\text{при } a = -4; f(x) = x^2 - 4x - 4, \text{ тогда } x_1 + x_2 = -(-4) = 4$$

Ответ, $-4; 4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

Пусть $x = 2^a \cdot 3^b$; $y = 2^c \cdot 3^d$ (x, y - натуральные, a, b, c, d могут быть 0)

x и y кратны двум, кратны только простым числам 2 и 3, следовательно

простые числа x и y не кратны, т.к. $n: x, y$; n кратно только 2 и 3

$$y: x \Rightarrow 2^c \cdot 3^d : 2^a \cdot 3^b \Rightarrow c \geq a, d \geq b$$

$$\text{или } n = x - y \Rightarrow 2^{a+c} \cdot 3^{b+d} = 2^{401} \cdot 3^{500} \Rightarrow \begin{cases} a+c=401 \\ b+d=500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=401-c \\ b=500-d \end{cases}$$

$$\begin{cases} c \geq 401-c \\ d \geq 500-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c \geq 401 \\ 2d \geq 500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c \geq 200,5 \\ d \geq 250 \end{cases} \text{, т.к. } x, y \text{ - целые, то } c, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} c \geq 201 \\ d \geq 250 \end{cases}$$

или $c \leq 401$ и $d \leq 500$, т.к. иначе x - не целое (а член будет < 0)

$\Rightarrow c \in [201; 401]$ - 201 вариант, различных c ;

$d \in [250; 500]$ - 251 вариант, $\Rightarrow$ всего $201 \cdot 251$ вариантов

Для каждого y есть только одно $x \Rightarrow$ можно * всего $201 \cdot 251 = 50451$

вариантов представлено n

Ответ: 50451



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0 & (1) \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7} & (2) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0; x \neq 1$
 $y > 0; y \neq 1$
 $xy > 0; xy \neq 1$
 $x+1 \neq 0$
 ~~$x-1 \neq 0$~~
 $7y+7 \neq 0$

$$(1) \log_x 2 + 3 \log_y 2 - 16 \log_{xy} 2 = 0$$

$$\frac{\ln 2}{\ln x} + \frac{3 \ln 2}{\ln y} - \frac{16 \ln 2}{\ln(xy)} = 0$$

$$\frac{1}{\ln x} + \frac{3}{\ln y} - \frac{16}{\ln x + \ln y} = 0$$

$$\frac{3(\ln x + \ln y)}{\ln x \cdot \ln y} - \frac{16}{\ln x + \ln y} = 0$$

$$3(\ln^2 x + \ln x \ln y + \ln x \ln y + \ln^2 y) - 16(\ln x + \ln y) = 0$$

$$3(\ln^2 x - 6 \ln y \ln x + \ln^2 y) = 0$$

$$3(\ln x - \ln y)^2 = 0 \Rightarrow 3(\ln x - \ln y) = 0$$

$$\ln x^3 = \ln y; \text{ } f(x) = \ln x \uparrow \text{ на всей области определения } \Rightarrow$$

$$x^3 = y$$

$$(2) \frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{x^3-1}{x^3+1}$$

$$7 \frac{x-1}{x+1} > 3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^3+x+1)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{7(x-1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} - \frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} > 0$$

$$\frac{(x-1)(7x^2-7x+7-3x^2-3x-3)}{x^3-1(x+1)(x^2-x+1)} > 0$$

$$\frac{(x-1)(4x^2-10x+4)}{x+1} > 0 \quad (x^2-x+1 > 0 \text{ при } \forall x, \text{ т.к. } \Delta = 1-4 < 0)$$

$$4x^2-10x+4=0 \Rightarrow \Delta = 100-64=36 \Rightarrow x = \frac{10 \pm 6}{8} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-\frac{1}{2})}{x+1} \cdot 4 > 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \quad - \quad + \\ -1 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 2 \end{array} \quad x \in (-\infty; -1) \cup (\frac{1}{2}; 1) \cup (2; +\infty)$$

т.к. x и y — целые (также ищем), а на интервале $(\frac{1}{2}; 1)$ нет целых чисел,
то $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

$$x \leq 31 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (2; 31]$$

~~$xy > 0; x \neq 1; x^3 > 0; x \neq 1$~~ По ~~$xy > 0$~~ $\begin{cases} x > 0; y > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^3 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^3 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \neq 1; 1 \notin (-\infty; -1) \cup (2; 31]$$

$$xy > 0, \text{ т.к. } x > 0 \Rightarrow x^4 > 0, \text{ т.к. } x > 0, \text{ то } x^4 > 0$$

$$xy \neq 1, \text{ т.к. } y = x^3 \Rightarrow x^4 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1; \pm 1 \notin (-\infty; -1) \cup (2; 31]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ 7y+7 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 \neq -1 \end{cases} \Rightarrow x \neq -1; -1 \notin (-\infty; -1) \cup (2; 31]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (2; 31] \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (2; 31] \Rightarrow x \in [3; 31] \quad (x - \text{целое})$$

$$y = x^3, \text{ при } x \in \mathbb{Z} \quad x^3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \mathbb{Z}$$

Для каждого x есть одно значение $x^3 \Rightarrow$ есть одно значение y ,

$$\text{с тем } y_1 = y_2; x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0 \text{ при } \forall x_1, x_2 \text{ как полный квадрат})$$

$$\Rightarrow \text{или } y_1 = y_2, \text{ то } x_1 = x_2 \Rightarrow$$

при различных x пар (x, y) столько, сколько различных x

$$x \in [3; 31] \Rightarrow \text{если } 31 - 3 + 1 = 29 \text{ различных целых } x$$

Ответ: 29



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14

Пусть $a \geq b$; $a = a_1 \cdot d$; $b = b_1 \cdot d$, где

$d = \text{НОД}(a, b)$; $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a_1, b_1)$, т. a_1 взаимно просто с b_1

* $\text{НОД}(a, b) = a_1 \cdot b_1 \cdot d$ (доказательство на стр. 2)

$\min(a, b) = b$ ($a \geq b$); $\max(a, b) = a$

$$4 \cdot b = 3(a-b)^2$$

$$3a = a_1 \cdot b_1 \cdot d \Rightarrow 3a = a \cdot b_1 \Rightarrow b_1 = 3 \Rightarrow b = 3d$$

$$12d = 3 \cdot (a_1 d - 3d)^2$$

$$4d = a_1^2 d^2 + 9d^2 - 6a_1 d^2$$

$$a_1^2 d - 6a_1 d + 9d - 4 = 0$$

$$d \cdot (36d^2 - 4(9d - 4)d) = 36d^2 - 4(9d^2 - 4d) = 16d$$

$$a_1 = \frac{6d \pm 4\sqrt{d}}{2d} = 3 \pm \frac{2}{\sqrt{d}}, \text{ так } a_1 \in \mathbb{Z}, \text{ то } 3 \pm \frac{2}{\sqrt{d}} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{\sqrt{d}} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{d} \text{ делитель } 2 \text{ и } \sqrt{d} > 0 \Rightarrow \sqrt{d} = 1 \text{ или } 2$$

$$\sqrt{d} = 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow a_1 = 5 \Rightarrow a = 5, b = 3$$

$$\sqrt{d} = 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 1 < 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\sqrt{d} = 2 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad 8 < 12 \Rightarrow \begin{cases} a = 16 \\ b = 12 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) это 4 варианта $(a; b); (5; 3); (3; 5); (12; 16) / (16; 12)$

Проверим: $(3; 5); 4 \cdot 3 = 3 \cdot 2^2$ - верно; $3 \cdot 5 = 15$ - верно $\Rightarrow$ подходит
 $(5; 3)$

$(12; 16); 12 \cdot 4 = 3 \cdot 4^2 \Rightarrow 48 = 48$ - верно; $16 \cdot 3 = 48$ - верно.
 $(16; 12)$

~~Заметим~~ * $a = a_1 d; b = b_1 d; d = \text{НОД}(a; b)$

d - наибольший общий делитель a и $b \Rightarrow a_1$ взаимнопросто с b_1
Заметим, что $\text{НОД}(a; b) = a_1 \cdot b_1 \cdot d$

Пусть покажем $k \cdot a$, где k - натуральное:

$$ak = k \cdot a_1 d; ka_1 d : b \Rightarrow ka_1 d = m \cdot b \Rightarrow ka_1 d = m \cdot b_1 \cdot d \Rightarrow$$

$$ka_1 = m \cdot b_1 \Rightarrow ka_1 : b_1, \text{ но } a_1 \text{ и } b_1 - \text{взаимнопросты (иначе был бы делитель}$$

$$p, \text{ что } a_1 : p; b_1 : p \text{ и тогда } \text{НОД}(a; b) = d \cdot p, \text{ но } \text{НОД}(a; b) = d \Rightarrow p = 1$$

$\Rightarrow a_1$ и b_1 взаимнопросты)

$$\Rightarrow k : b_1 \Rightarrow k - \text{минимум } b_1 \text{ (при } b_1 = 1 \text{ } \text{НОД}(a; b) = a;$$

$$a_1 \cdot d \cdot b_1 = a \cdot 1 = a \Rightarrow \text{так как } b_1 \geq 1 \text{ тоже верно)}$$

Ответ: $(3; 5); (5; 3); (12; 16); (16; 12)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Реш: $\angle ADE$ — тупой

AB — диаметр ω_1 ;

BC — диаметр ω_2

$\omega_1 \cap \omega_2 = B; D$

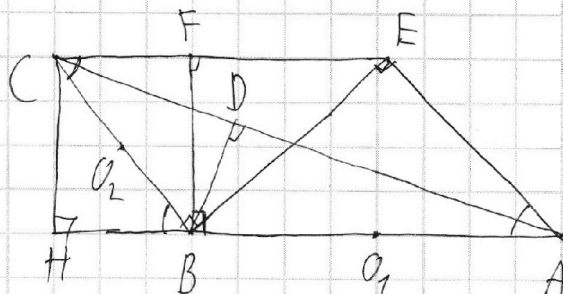
$E \in \omega_1$; $BE \perp BC$

$BF \perp CE$; $F \in \omega_2$

BF — касательная к ω_1

$\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$

$\frac{BF}{BD} = ?$



Решение:

Пусть O_1 — центр ω_1 ; O_2 — центр ω_2

O_1 — середина AB ; O_2 — середина BC

Пусть $BD' \perp AC$ (BD' — высота)

$\triangle BD'A$ — прямоугольный $\Rightarrow O_1 D' = \frac{AB}{2} = AO_1$

$\Rightarrow D' \in \omega_1$ ($D'O_1$ — медиана $\triangle ABD'$)

Аналогично $O_2 D' = \frac{BC}{2}$; т.к. $\triangle BCD'$ — прямоугольный

$\Rightarrow D' \in \omega_2 \Rightarrow D' = \omega_1 \cap \omega_2 \Rightarrow D' = D$

Пусть $BE \cap CF = F'$; $\angle BF'C = 90^\circ$ ($CE \perp BE$)

$\Rightarrow \triangle BCF'$ — прямоугольный $O_2 F' = \frac{BC}{2}$ (медиана к гипотенузе $O_2 F'$)

$\Rightarrow O_2 F' = O_2 B \Rightarrow F' \in \omega_2$; $F \in \omega_2 \Rightarrow F = F' \Rightarrow F \in CE$

BF — касательная к ω_1 ; $O_1 B$ — радиус в точку касания $\Rightarrow$

$O_1 B \perp BF \Rightarrow AB \perp BF$

$BF \perp AB$; $BF \perp CE \Rightarrow AB \parallel CE$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Введем $\triangle ABC$ в систему координат, так, что $B(0;0)$

$OX \uparrow \vec{BA}$; $OY \uparrow \vec{BE}$ ($OE \perp AC$)

Пусть $A(a;0)$ ($A \in AB$); $C(c;b)$; $D(x_0; y_0)$ ($c < 0$ так как A — между) $(a > 0; b > 0)$
 $F(0; y_F)$; $E(x_E; y_E)$

O_1 — середина $AB \Rightarrow O_1(\frac{a}{2}; 0) \Rightarrow$ тк радиус $\omega_1 = BO_1 = \frac{a}{2}$, то

$$\omega_1: (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2 \Rightarrow x^2 - ax + y^2 = 0$$

O_2 — середина $BC \Rightarrow O_2(\frac{c}{2}; \frac{b}{2})$; радиус ω_2 равен BO_2

$$BO_2 = \sqrt{(\frac{c}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2} \Rightarrow \omega_2: (x - \frac{c}{2})^2 + (y - \frac{b}{2})^2 = (\frac{c}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - cx - by = 0$$

$CE \parallel AB$; $AB \uparrow \parallel OX \Rightarrow CE \parallel OX \Rightarrow$

$$y_C = y_E = y_F; \text{ так } y_C = b \Rightarrow F(0; b); E(x_E; b)$$

$$BF = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = b$$

$\angle ECB = \angle CBH$ так как накрест лежащие для $EC \parallel AB$, сек BC

(EH — высота на AB)

$$CH \perp AB \Rightarrow CH \parallel OY \Rightarrow \text{тк } CH \Rightarrow H(c; 0)$$

$$\sin \angle HBC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle HBC} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan \angle HBC = \frac{4}{3}$$

$$\text{тк } \triangle BHC: \tan \angle HBC = \frac{CH}{HB} = \frac{4}{3} \cdot \frac{b}{14} \quad (CH = \sqrt{c^2 + (b-0)^2} = b)$$

$$\Rightarrow \frac{b}{14} = \frac{4}{3} \Rightarrow 14 = \frac{3}{4}b \Rightarrow c = -\frac{3}{4}b \quad (c < 0)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle CBA = 120^\circ = \angle HBC = 180^\circ - \angle BCE$$

$$CB \perp DE \Rightarrow \angle EBA = \angle CBA - 90^\circ = 120^\circ - \angle BCE - 90^\circ = 90^\circ - \angle BCE$$

$$E \in \omega_1 \Rightarrow AD - \text{диаметр } \omega_1 \Rightarrow \angle BEA = 90^\circ$$

$$\angle BAE = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ + \angle BCE = \angle BCE$$

$$\Rightarrow BE = AB \cdot \sin \angle BAE = AB \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}a \quad (AB = a)$$

$$E \in \omega_1 \Rightarrow \left(\frac{x_E - a}{2} \right)^2 + y_E^2 - a x_E = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_E^2 + b^2 - a x_E = 0$$

$$BE = \sqrt{b^2 + x_E^2} \Rightarrow x_E^2 + b^2 = \frac{16}{25}a^2 \Rightarrow x_E^2 = \frac{16}{25}a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow \frac{16}{25}a^2 - b^2 + b^2 - a x_E = 0 \Rightarrow \frac{16}{25}a = x_E$$

$$\frac{16}{25}a^2 = b^2 + x_E^2 \Rightarrow \frac{16}{25}a^2 = b^2 + \frac{16^2}{25^2}a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{16}{25}a^2 \left(1 - \frac{16}{25} \right) \Rightarrow b^2 = \frac{16}{25}a^2 \frac{9}{25} \Rightarrow b = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}a = \frac{12}{25}a$$

$$\Rightarrow a = \frac{25}{12}b$$

$$D \in \omega_1, \omega_2 \Rightarrow \begin{cases} x_D^2 + y_D^2 - a x_D = 0 \\ x_D^2 + y_D^2 - c x_D - b y_D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D^2 + y_D^2 = a x_D \\ x_D^2 + y_D^2 = c x_D + b y_D \end{cases}$$

$$a x_D - c x_D - b y_D = 0 \Rightarrow y_D = \frac{a-c}{b} x_D$$

$$\text{Для прямой } AC: \text{ пусть } y = kx + l$$

$$\begin{cases} a = kx + l \\ b = kx + l \end{cases} \Rightarrow b = k(c-a) \Rightarrow k = \frac{b}{c-a}; \quad l = -ka = \frac{-ab}{c-a}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow A(\cdot); y = \frac{b}{c-a}x - \frac{ab}{c-a}$$

$$B \in AC \Rightarrow y_B = \frac{b}{c-a}x_B - \frac{ab}{c-a}; \quad y_B = \frac{a-c}{b}x_B \Rightarrow$$

$$\frac{b}{c-a}x_B - \frac{ab}{c-a} = \frac{a-c}{b}x_B$$

$$x_B \left(\frac{b^2 + (a-c)^2}{b(c-a)} \right) = \frac{ab}{c-a} \Rightarrow x_B \frac{b^2 + (a-c)^2}{b} = ab \Rightarrow x_B = \frac{ab^2}{b^2 + (a-c)^2}$$

$$y_B = \frac{a-c}{b}x_B = \frac{(a-c)ab}{b^2 + (a-c)^2}$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{x_B^2 + y_B^2} = \sqrt{\frac{a^2b^4}{(b^2 + (a-c)^2)^2} + \frac{(a-c)^2a^2b^2}{(b^2 + (a-c)^2)^2}} = \frac{ab\sqrt{b^2 + (a-c)^2}}{b^2 + (a-c)^2} =$$

$$= \frac{ab}{\sqrt{b^2 + (a-c)^2}}$$

$$\frac{BD}{AD} = \frac{b}{\frac{ab}{\sqrt{b^2 + (a-c)^2}}} = \frac{\sqrt{b^2 + (a-c)^2}}{a} = \frac{\sqrt{b^2 + \left(\frac{25}{12}b + \frac{3}{4}b\right)^2}}{\frac{25}{12}b} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{25+9}{12}\right)^2}}{\frac{25}{12}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \frac{34^2}{12^2}}}{\frac{25}{12}} = \frac{\sqrt{36 + 289}}{6 \cdot \frac{25}{12}} = \frac{2\sqrt{325}}{25} = \frac{2\sqrt{13}}{5}$$

$$\text{Answer: } \frac{2\sqrt{13}}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$(y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0 \quad \text{имеет 2 решения}$$

$$\begin{cases} y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

$$(y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1 & ① \\ x^2 - 3xy + 4y^2 = 0 & ② \\ y + x = 1 & ③ \end{cases}$$

$$① \quad (2a+1)x - a^2 + 1 = x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x - 2ax - x + a^2 = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0 \Rightarrow (x-a)^2 = 0 \quad \text{всегда есть корень } a$$

$$x=a \Rightarrow y = a^2 + a + 1 \Rightarrow \text{всегда есть решение при } \forall a \text{ есть } (a; a^2 + a + 1)$$

$$② \quad x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow 4y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{или } x = 3y \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{или } x = 3y \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y = 0 \quad x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 0 = (2a+1) \cdot 0 - a^2 + 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\Rightarrow \text{при } a = \pm 1 \text{ есть решение } (0; 0)$$

$$③ \quad (2a+1)x - a^2 + 1 + x = 1$$

$$(2a+2)x = a^2$$

$$(a+1)x = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{при } a = -1; \quad 0 = \frac{1}{2} \cdot \text{неверно} \Rightarrow \text{при } a = -1 \text{ нет решений.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $a \neq -1$;

$$x = \frac{a^2}{2(a+1)} \Rightarrow y = \frac{a^2}{2(a+1)} \cdot (2a+1) - a^2 + 1 = \frac{2a^3 + a^2 - 2a^3 - 2a^2}{2(a+1)} + 1 =$$

$$= -\frac{a^2}{2(a+1)} + 1 \Rightarrow \text{при } a \neq -1 \text{ решение } \left(\frac{a^2}{2(a+1)}; -\frac{a^2}{2(a+1)} + 1 \right)$$

$\Rightarrow$ при $\forall a$ $(a; a^2 + a + 1)$

при $a = \pm 1$ $(0; 0)$

при $a \neq -1$ $\left(\frac{a^2}{2(a+1)}; -\frac{a^2}{2(a+1)} + 1 \right)$

при $a = 1$;

решения: $(1; 3); (0; 0); \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right)$ - 3 решения не подходят

при $a = -1$;

решения: $(-1; 1); (0; 0)$ - 2 решения, подходят

при $a \neq -1; 1$

$(a; a^2 + a + 1)$ и $\left(\frac{a^2}{2(a+1)}; -\frac{a^2}{2(a+1)} + 1 \right)$ - всегда 2 решения

они равны, если $a = \frac{a^2}{2(a+1)}; a^2 + a + 1 = -\frac{a^2}{2(a+1)} + 1$

$$\begin{cases} 2a^2 + 2a = a^2 \\ (a^2 + a) \cdot 2(a+1) = -a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 2a = 0 \\ 2a^3 + 2a^2 + 2a^2 + 2a + a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(a+2) = 0 \Rightarrow a = 0; -2 \\ a(2a^2 + 5a + 2) = 0 \end{cases}$$

$$a(2a^2 + 5a + 2) = 0$$

при $a = 0$; $a(2a^2 + 5a + 2) = 0$, ~~т.е.~~ $2a$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $a = -2$;

$$a(2a^2 + 5a + 2) = -2(8 - 10 + 2) = 0$$

⇒ при $a = 0$; -2 — 1 решение

при других a — 2 решения

⇒ при ~~$a \in \{-2; -1; 0\}$~~ при $a \in \{-2; 0; 1\}$ — 4 решения

$$\Rightarrow a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

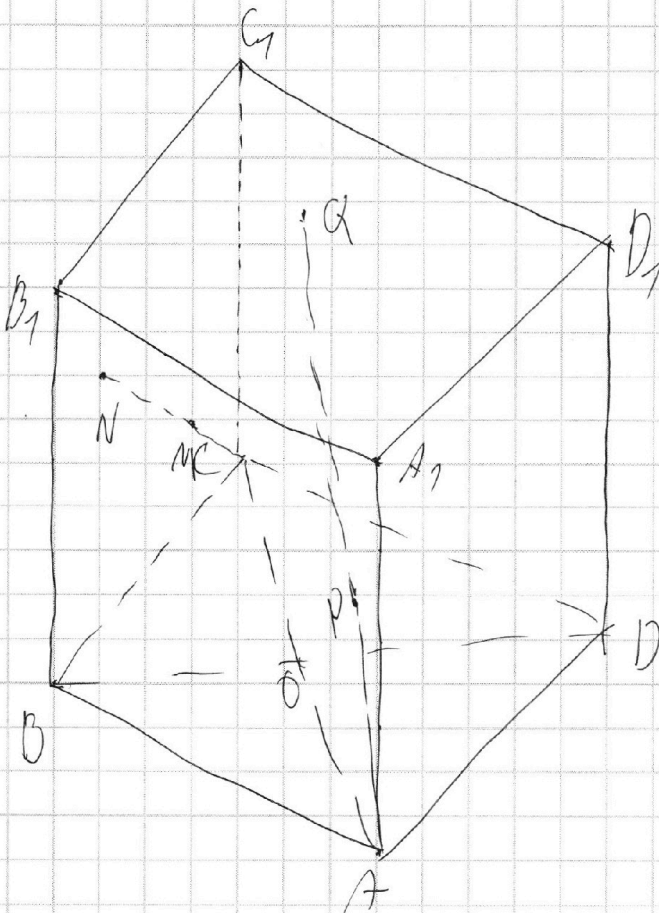
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: сфера вписана в куб
иногда прямая

$$AC \cap BD = O$$

$$AO = 1; BO = 2; CO = 4$$

$$AP = \frac{\sqrt{5}}{3}; AQ = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$$CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}; CN = 2\sqrt{5}$$

$$V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = ?$$

$$p(k; A \cap (PAC)) = ?$$

K-сфера сферы

Решение:

сфера точки A относительно сферы равна $AP \cdot AQ = \frac{5 \cdot 5}{9} = \frac{25}{9}$

сфера точки C: $CM \cdot CN = \frac{10 \cdot 2 \cdot 5}{9} = \frac{100}{9}$

Порядок O'-точка касания с ω и (ABC)

AO и OC-касательные

$$AO = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}; CO = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$$

$$AO + OC = \frac{5}{3} + \frac{10}{3} = 5, AO + OC = AC = AO + OC = 5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AO' + CO' = AC \Rightarrow O' \in AC \neq AB$$

$$O' \in AC \Rightarrow AC -$$

т.к. прямая прямая, то ω' -прямая ω на (AO)

будет вписана в $\triangle OCB$

$$\text{центр } \omega' = O'$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \angle BAO' < \angle BAO < \angle BCO$$

$$\Rightarrow \angle BAC = \angle CAD; \angle ACB = \angle ACD; AC = AC$$

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ADC \Rightarrow ABCD - \text{параллелограмм}$$

$$OD = BO = 2$$

$$S_{ACBD} = AC \cdot BD \cdot \sin 90^\circ = 5 \cdot 4 = 20 \quad (\sin 90^\circ - \text{синус угла между}$$

диагоналями)

~~при проведении секущей через точку A и K
сечение точки A ; $(AK-R)(AK+R)$, где K -центр ω ; R -
ее радиус $\Rightarrow AK \perp R^2$~~

Радиус R радиус ω ; $ABCDAB_1C_1D_1$ -призма

$$p(A; ABC) = 2R \Rightarrow V_{ABCDAB_1C_1D_1} = S_{ACBD} \cdot 2R = 40R$$

радиус ω равен радиусу ω' ; $R = 5$

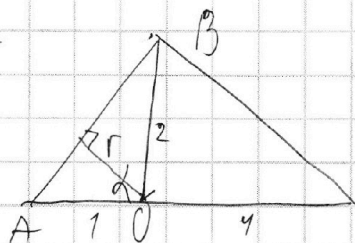


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle AOB = x$

~~Из $\triangle AOB$~~

CB - биссектриса $\angle ABC$

$\Rightarrow AO:OC = AB:BC = 1:4$

$\Rightarrow BC = 4AB$

Из $\triangle AOB$; $AB^2 = 1 + 4 - 4 \cos d$

Из $\triangle OBC$; $16AB^2 = 16 + 4 - 16 \cos(180 - d) \Rightarrow AB^2 = \frac{5}{4} + \cos d$

$5 - 4 \cos d = \frac{5}{4} + \cos d \Rightarrow \cos d = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sin d = \frac{\sqrt{16-9}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4}$; $AB^2 = 5 - 3 = 2 \Rightarrow AB = \sqrt{2}$

$S_{AOB} = \frac{1}{2} \sin d \cdot AO \cdot OB = r \cdot AB \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot 1 \cdot 2 = r \cdot \sqrt{2}$

$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = R$

$\Rightarrow V_{ABCA_1B_1C_1O_1} = 40 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{14}$

Ответ: $10\sqrt{14}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~yx~~

$$y = -3x - 5$$

$$-3x - 1 + x - 1 \leq 0$$

$$-2x - 2 \leq 0$$

$$-2x - 4 \leq 0$$

$$x \geq -2$$

$$6x - 7x - 8$$

$$x \geq 0$$

$$9x^2 + 1 = 13$$

$$(2a+1)x - a^2 + 1 \leq \frac{3}{4}$$

$$a^2 - 2ax - x - 1 \leq 0$$

$$x \geq 4a^2$$

$$(2a+1)x - a^2 + \frac{3}{4} \leq 0$$

$$2a^2 + a - a^2 + 1 = a^2 + a + 1 \geq 0$$

$$2a - x + x - a^2 + x - x^2 - x - 1 = 0$$

$$-(a-x)^2 \leq 0$$

$$a = x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sigma - \varphi a = \frac{5}{4} + a$
 $ba = 5 - \frac{5}{4}$
 $a = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$AG = \frac{5\sqrt{5}}{3}$
 $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$M = \frac{10\sqrt{5}}{9}$
 $LN = 2\sqrt{5}$

диаметр AA_1 :
 $\frac{5}{3} \sqrt{5} \cdot \frac{5}{3} =$
 $\frac{5 \cdot 5}{9} = \frac{25}{9}$
 $C: \frac{100}{9}$

$(AG-R)(AO+R) = AO^2 - R^2 = \frac{25}{9}$

$l_1 = \frac{5}{3}; l_2 = \frac{10}{3}$

диаметр касания

$1,5 = 5R$

$x^2 = 5 - 4 \cos \alpha$
 $x^2 = \frac{5}{4} + \cos \alpha$

$x^2 = 1 + 4 - 4 \cos \alpha$
 $16R^2 = 4 + 16 + 16 \cos \alpha$

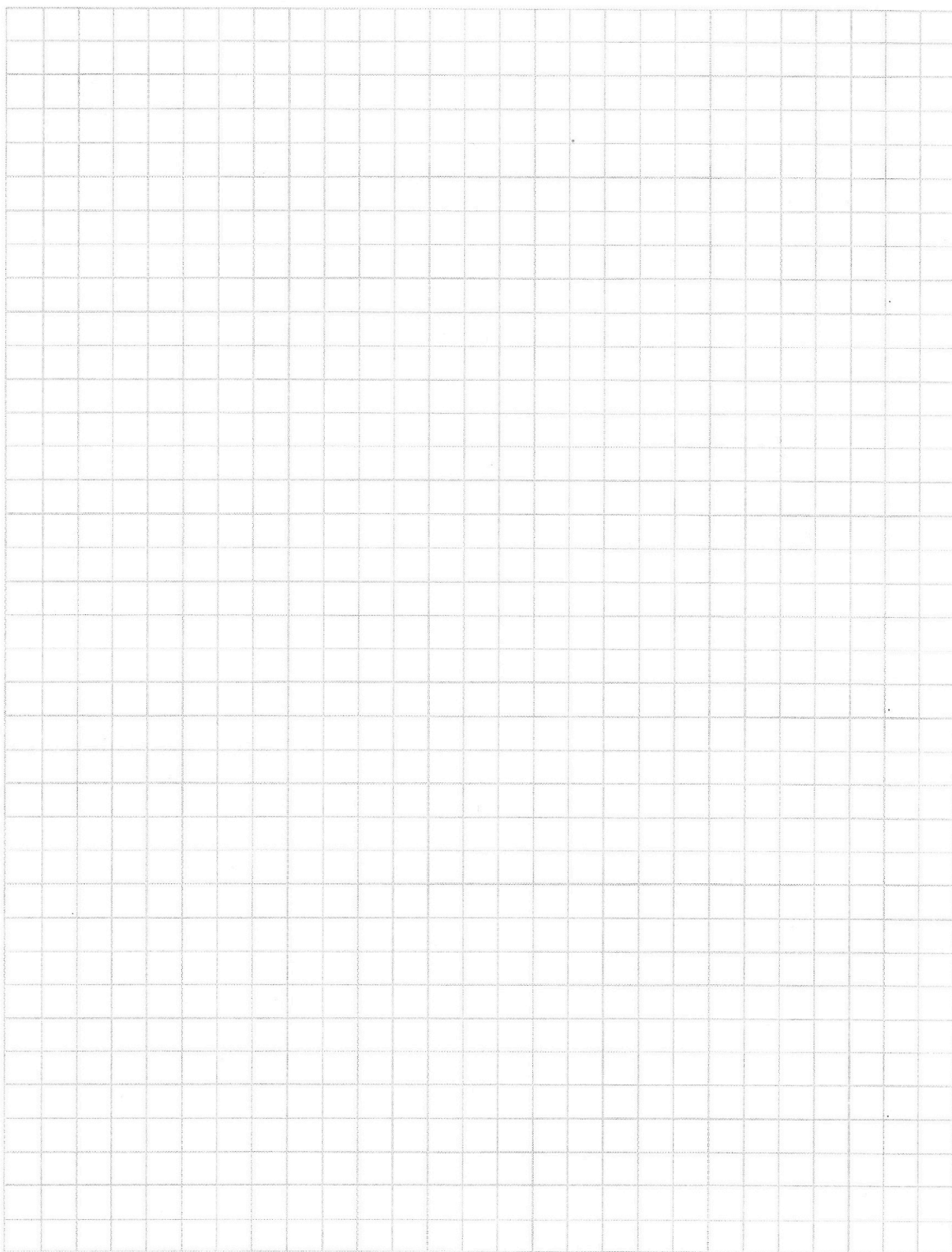


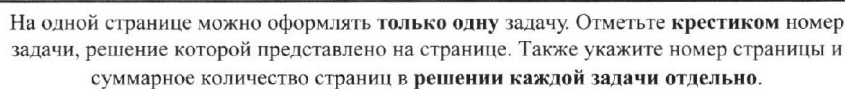
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l}
 \text{1. } y = x^2 + x + 1 \quad \text{2. } y = x^2 + x + 1 \\
 x + y = 1 \quad \text{3. } x + y = 1 \\
 x^2 + y^2 = 3xy \quad \text{4. } x^2 + y^2 = 3xy \\
 y = (2a+1)x - a^2 + 1 \quad \text{5. } y = (2a+1)x - a^2 + 1 \\
 (2a+1)x - a^2 + 1 = x^2 + x + 1 \quad \text{6. } (2a+1)x - a^2 + 1 = x^2 + x + 1 \\
 x^2 + x(1+a) - x(2a+1) = 0 \quad \text{7. } x^2 + x(1+a) - x(2a+1) = 0 \\
 x^2 - x(2a+1+1) + 1 = 0 \quad \text{8. } x^2 - x(2a+1+1) + 1 = 0 \\
 x^2 - 2ax + 1 = 0 \quad \text{9. } x^2 - 2ax + 1 = 0 \\
 (1-a)^2 = 0 \quad \text{10. } (1-a)^2 = 0 \\
 x = a \quad \text{11. } x = a \\
 x^2 + y^2 = 3xy \quad \text{12. } x^2 + y^2 = 3xy \\
 a = 0 \quad \text{13. } a = 0 \\
 y = x + 1 \quad \text{14. } y = x + 1 \\
 x + 1 + x + 1 = 1 \quad \text{15. } x + 1 + x + 1 = 1 \\
 x = 0 \quad \text{16. } x = 0 \\
 x + 1 - x - 1 = x - x = 0 \quad \text{17. } x + 1 - x - 1 = x - x = 0 \\
 x = 0 \quad \text{18. } x = 0 \\
 x = a \quad \text{19. } x = a \\
 x = \frac{a^2}{2(a+1)} \quad \text{20. } x = \frac{a^2}{2(a+1)} \\
 x = 0, y = 0 \quad \text{21. } x = 0, y = 0 \\
 (a^2, a^2 + a + 1) \quad \text{22. } (a^2, a^2 + a + 1) \\
 \frac{a^2}{2(a+1)}, \frac{a^2}{2(a+1)} \quad \text{23. } \frac{a^2}{2(a+1)}, \frac{a^2}{2(a+1)} \\
 \frac{a^2}{2(a+1)}, \frac{a^2}{2(a+1)} \quad \text{24. } \frac{a^2}{2(a+1)}, \frac{a^2}{2(a+1)} \\
 (0, 0) \quad \text{25. } (0, 0) \\
 a = \pm 1 \quad \text{26. } a = \pm 1 \\
 y = x^2 + x + 1 \quad \text{27. } y = x^2 + x + 1 \\
 a^2 + a + 1 \quad \text{28. } a^2 + a + 1 \\
 \frac{a^2}{2a+2} \cdot (2a+1) - a^2 + 1 \quad \text{29. } \frac{a^2}{2a+2} \cdot (2a+1) - a^2 + 1 \\
 2a^3 + a^2 - 2a^3 - 2a^2 + 2a + 2 \quad \text{30. } 2a^3 + a^2 - 2a^3 - 2a^2 + 2a + 2 \\
 -\frac{a^2 + 2a + 2}{2a+2} \quad \text{31. } -\frac{a^2 + 2a + 2}{2a+2} \\
 y = x + 1 \quad \text{32. } y = x + 1 \\
 y = x \quad \text{33. } y = x \\
 x^2 + x + 1 \quad \text{34. } x^2 + x + 1 \\
 -x \quad \text{35. } -x
 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a; a^2 + a + 1)$$

$$\left(\frac{a^2}{2(a+1)}; \frac{-a^2}{2(a+1)} + 1 \right)$$

$$(0; 0) \text{ при } a = \pm 1$$

$$a = 1; \quad a = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a \neq \frac{a^2}{2(a+1)}$$

$$a = \frac{a^2}{2(a+1)} \rightarrow 2(a+1)a = a^2$$

$$2a^2 + 2a = a^2$$

$$a^2 + 2a = 0$$

$$a(a+2) = 0$$

$$a = 0; a = -2$$

$$a = 2;$$

$$y = 5x - 3$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(a; 0)$$

$$\left(\frac{c}{2}; \frac{d}{2} \right)$$

$$B(0; 0)$$

$$\left(\frac{a}{2}; 0 \right)$$

$$A(a; 0)$$

$$AC; a = ka + 1; d = ke + 1 \quad \text{if } k(c-a) = 0$$

$$k = \frac{d}{c-a}$$

$$\frac{(2a+1)a^2}{2(a+1)} - a^2$$

$$2a^3 + a^2 - 2a^3 - a^2$$

$$\frac{1}{2 \cdot 2}$$

$$\frac{-1}{4} + 1 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$4 + 1 - 2$$

$$2 + 1 - 1 = 1$$

$$2a + 1$$

$$a = -1$$

$$a = 0;$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a = -2 \quad \beta$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$a \neq 0; 1; -2$$

$$a(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$$

$$l = -ka$$

$$l = \frac{-da}{c-a}$$

$$AC; \frac{d}{c-a}x - \frac{da}{c-a} = y$$

$$5x - 3 - x^2 - x - 1 = 0$$

$$-x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$-(x-2)^2 = 0$$

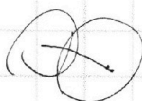
$$5x - 3 + x - 1 = 0$$

$$6x - 4 = 0$$

$$5x = 2$$

$$\frac{10}{5}; \frac{4}{5}$$

$$BD;$$

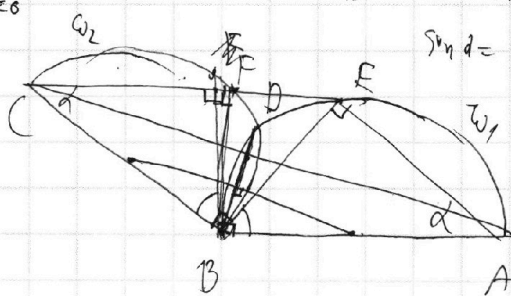


$$x^2 + xq + y^2 = 0$$

$$\omega_1; \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

$$\omega_2; \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$x^2 - xc + y^2 - yd = 0$$



$$\frac{BE}{BD} = \frac{1}{2} \quad \cos \angle BDE = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\ln 2}{\ln x} + 9 \cdot \frac{\ln 2}{\ln y}$$

$$\frac{1}{16} = 16^{-1} \quad 16 = 2^4 \Rightarrow \frac{1}{16} = 2^{-4}$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$\frac{\ln 2}{\ln x} + \frac{9 \ln 2}{\ln y} - \frac{16 \ln 2}{\ln x + \ln y} = 0$$

$$-16 \ln 2 = -16$$

$$y = x^3$$

$$\frac{1}{\ln x} + \frac{9}{\ln y} - \frac{16}{\ln x + \ln y} = 0$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3 \cdot \frac{3}{7}}{7x^2+1} =$$

$$\frac{\ln y + 9 \ln x}{\ln x \ln y} - \frac{16}{\ln x + \ln y} = 0$$

$$\frac{(x-1)}{(x+1)} (2x^2 - 5x + 2) > 0$$

$$\ln x \ln y + \ln^2 x + \ln^2 y + 9 \ln x \ln y - 16 \ln x \ln y = 0$$

$$9 \ln^2 x + \ln^2 y - 6 \ln x \ln y = 0$$

$$x = 15 - 4.22 = 9$$

$$(3 \ln x - \ln y)^2 = 0$$

$$x =$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$3 \ln x = \ln y$$

$$\ln x^3 = \ln y$$

$$x =$$

$$\frac{7(x-1)}{x+1} > \frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$\frac{(x-1)}{(x+1)} (2x-1)(x+2) > 0$$

$$\frac{7(x-1)(x^2-x+1) - 3(x-1)(x^2+x+1)}{x^3+1} > 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \quad - \quad + \\ -1 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

$$\frac{(x-1)(7x^3-7x+7-3x^3-3x-3)}{x^3+1} > 0$$

$$\frac{(x-1)(4x^2-10x+4)}{(x+1)} > 0$$

$$x(-2, -1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

$$a^2 + 4b = 0$$

$$x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$2x^2 = 2x^2 + ax + b$$

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$4 - 4 - 4 = -4$$

$$x^2 - ax - b = 0$$

$$b = a^2 - 4b - 4 \cdot 4 = 0$$

$$1 - 4 - 4 = -7$$

$$b = a^2 + 4b = 0$$

$$a^2 - 4b - 32 = 0$$

$$a^2 - (-4) - 4 = 16$$

$$a^2 = -4b$$

$$a \neq 4$$

$$-4b - 4b - 32 = 0$$

$$-8b - 32 = 0$$

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$8b = -32$$

$$b = -4$$

$$\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -a$$

$$\frac{-4 \pm 4}{2}$$

$$2^{401} \cdot 3^{500} = x \cdot y$$

$$q : x$$

$$y = 2^a \cdot 3^b$$

$$x = 2^c \cdot 3^d$$

$$a \geq c$$

$$b \geq d$$

$$a + c = 401$$

$$b + d = 500$$

$$c = 401 - a$$

$$a \geq 401 - a$$

$$2a \geq 401$$

$$b \geq 500 - b$$

$$2b \geq 500$$

$$a \geq 200.5$$

$$b \geq 250$$

$$a \geq 201$$

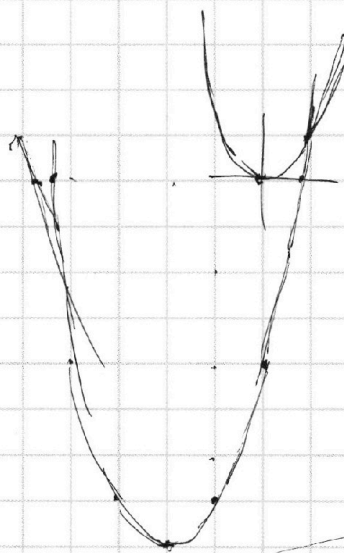
$$b \geq 250$$

$$251$$

$$\begin{array}{r} 251 \\ + 201 \\ \hline 251 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 502 \\ 50451 \end{array}$$

$$50451$$



$$a = 201; 202; 203; \dots 401$$

$$b = 250; 251; 252; \dots 500$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4 \cdot n \quad a \geq 6$$

$$a = a_1 d \quad b = 3d$$

$$4b = 3(a-b)^2$$

$$b = b_1 d \quad a = a_1 d$$

$$3a = a_1 b_1 d$$

$$12d = 3(a_1 d - 3d)^2$$

9.1

$$a_1 d \cdot 3d \cdot 2 + 3$$

$$3a_1 d = 9a_1 b_1$$

$$9 \cdot 2 = 18$$

$$\underline{b_1 = 3}$$

$$12d = 3a_1^2 d^2 - 12a_1 d^2$$

$$12 = 3a_1^2 d + 12d - 12a_1 d$$

$$4 = a_1^2 d + d - 6a_1 d$$

$$a_1 = 3 \pm 2$$

$$a_1^2 d - a_1 \cdot 6d + d - 4 = 0$$

$$3 \pm 1$$

$$D = 36d^2 - 4d(9d - 4) = 36d^2 - 36d^2 + 16d = 16d$$

$$a_1 = 5; 1; 2; 4$$

$$a_1 = \frac{6d \pm 4\sqrt{d}}{2d} = \frac{3d \pm 2\sqrt{d}}{d}$$

$$a = 5; 1;$$

$$(5; 3)(1; 3)(8; 12)(16; 12)$$

$$a \approx 3d \pm 2\sqrt{d}$$

d - квадрат

$$\begin{matrix} (5; 3) & (1; 3) & (8; 12) & (16; 12) \\ \checkmark & \times & \times & \checkmark \end{matrix}$$

$$a_1 = 3 \pm \frac{2}{\sqrt{d}}$$

a₁ и d взаимно простые

$$1 \cdot 3 = 3 \cdot 1$$

$$\frac{2}{\sqrt{d}} \notin \mathbb{Z}$$

$$d \notin \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{d} = 1; 2$$

$$d = 1; 4$$

$$3 \cdot 5 = 15$$

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$16 \cdot 12 = 4$$

$$4 \cdot 8 = 3 \cdot 4$$

$$4 \cdot 12 = 3 \cdot 16$$

$$4 \cdot 4; 3 \cdot 4$$

$$4 \cdot 3 \cdot 4 = 16 \cdot 3 = 48$$

$$16 \cdot 3 = 48$$

