



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача, что $A = 111 \cdot a$, где a -цифра.

Потом $A = 101 \cdot 11 \cdot a$, при этом 101 и 11- простые числа \Rightarrow т.к. $A \cdot B C$ -квадрат, тогда $A \vdash 11$, $A \vdash 101$.

$$A \cdot B \cdot C : 11 \text{ и } A \cdot B \cdot C : 101, \xrightarrow{\text{следует}} A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot k,$$

где k - некое число такое что k - квадратичное.

Откуда $a \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot k$, т.к. a -цифра, то $a < 11 < 101$, т.к. C -двузначное. $C < 101$.

т.к. B - трехзначное $B < 11 \cdot 101 = 1111$. Задача,

Что только B может делиться на 101.

Потом пусть $B = 101 \cdot b$, где $1 \leq b \leq 10$.

т.к. b в записи числа B присутствует хотя бы 1 единица, то $b = 7$, а иначе т.к. $b < 10$,

то $B = 101 \cdot 7$ и цифра 7 нет. Откуда $B = 7 \cdot 101$.

Причина задания, что B не дел. на 11, но можно $C : 11$. Тогда $C = 11 \cdot c = \overline{cc}$, где c -цифра $1 \leq c \leq 10$

т.к. в записи числа C есть хотя бы 1 единица,

то $c = 1 \Rightarrow C = 11$. Значит $A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 101 \cdot 7 \cdot 11 =$

$$= 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7 \cdot a = 101^2 \cdot 11^2 \cdot k, \text{ т.к. } k \text{-квадрат, то}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

7. 9 - може квадрат, используя ограничение

$1 \leq a \leq 9$, получаем $a = 7$

Значит $A = 7777$, $B = 707$, $C = 11$

Ответ: 7777, 707, 11.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$K_1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}$$

$$K_2 = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

По условию $K_1 = K_2$; тогда $\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$

Значит, что $x \neq 4$, $x \neq 0$; $y \neq 0$; $y \neq -4$.

Тогда $xy = (x-4)(y+4)$ $xy = xy + 4x - 4y - 16$.

$$4y = 4x - 16$$

$$y = x - 4. \quad \text{T.K. } y \neq 0 \text{ и } y \neq -4, \text{ то}$$

$$x \neq 0 \text{ и } x \neq 4.$$

Подставим $y = x - 4$ в M :

$$M = x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4) = x^3 - x^3 + 12x^2 - 48x + 64 - 12x^2 + 48x = \\ = 64.$$

Значит, Три корня x : $x \neq 0 \neq 4$ $M=64$.

Ответ: 64

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y.$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y.$$

$$\cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y + \cos \pi y \cos \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = 0$$

$$\cos 2\pi y + \cos(\pi y - \pi x) = 0.$$

$$\cos 2\pi y = -\cos \pi(y-x)$$

$$\cos 2\pi y = \cos \pi(y-x) + \pi$$

$$2\pi y = \pi(y-x+1) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2y = y - x + 1 + 2k$$

$$y = (2k+1) - x, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}$$

Число $x+y = n$, где n - любое целое нечетное число

Доказательство, что $\arccos \frac{x}{\sqrt{2}} \geq 0$, т.к.

$\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \arccos a \leq \pi$. Так же $\arcsin \frac{y}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi}{2}$, т.к.

$\forall b \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin b \leq \frac{\pi}{2}$.

Очевидно: $\arccos \frac{x}{\sqrt{2}} - \arcsin \frac{y}{\sqrt{2}} \geq -\frac{\pi}{2}$. Т.е., при

$\arccos \frac{x}{\sqrt{2}} \neq 0$ и $\arcsin \frac{y}{\sqrt{2}} \neq \frac{\pi}{2}$ - крепко доказано.

Т.к. $\arccos \frac{x}{\sqrt{2}} \neq 0$, то $\frac{x}{\sqrt{2}} \neq 1 \Rightarrow x \neq \sqrt{2}$.

Т.к. $\arcsin \frac{y}{\sqrt{2}} \neq \frac{\pi}{2}$, то $\frac{y}{\sqrt{2}} \neq 1 \Rightarrow y \neq \sqrt{2}$.

Однако: а) $x+y = 2k+1$, где $k \in \mathbb{Z}$ б) $x+y = 2k+1$ при $x \neq \sqrt{2}$ и $y \neq \sqrt{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4, то вероятность получения балла P или B равно $\frac{4}{x}$, а второго $\frac{3}{x-1}$. Тогда вероятность того, что они оба получат балл равно $p_1 = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{12}{x(x-1)}$.

аналогично для y баллов: для первого $\frac{y}{x}$, для второго $\frac{y-1}{x}$, иначе $p_2 = \frac{y}{x} \cdot \frac{y-1}{x-1} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$

$$\text{То условие } \frac{p_2}{p_1} = 11 \Rightarrow \frac{y(y-1)}{y(y-1)} = 11.$$

$$y^2 - y = 11 \cdot 12.$$

$$\text{То в коренной вида } \begin{cases} y_1 y_2 = 11 \cdot 12 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 12 \\ y = -11 \text{ не подходит, т.к. количество баллов} \geq 0 \\ y \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$y = -11$ не подходит, т.к. количество баллов ≥ 0 .

значит $y = 12$.

Ответ: 82

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$\triangle ABC$.

W_1 - омис. окр. BOC

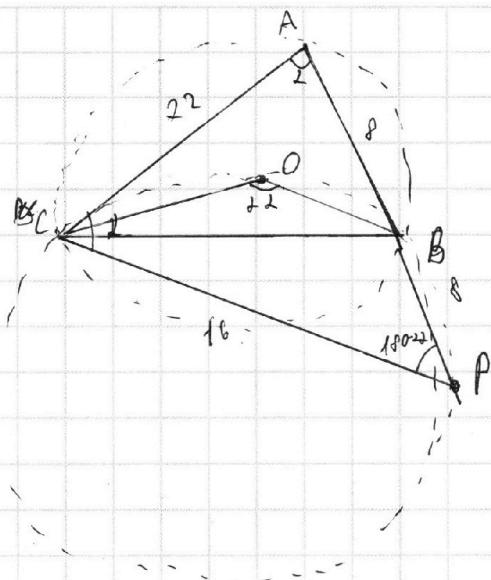
И) O -центр $\triangle I$

$W_2 \cap AB = CP$

$AP = 16, BP = 8$

$AC = 22, W_2$ - омис. BOC

Найти $S_{\triangle ABC}$.



Т.к. $AP = 16$ и $BP = 8$,
то $AB = AP - BP$
 $AB = 8$.

Решение ведет
Пусть $\angle A = 2$.

Т.к. $\angle BOC$ - центральный,
а $\angle BAC$ - внеш., то

$$\angle BOC = 2 \angle BAC = 22$$

$\angle COB = 180^\circ - \angle BOC$

то $\angle COB$ - внеш. Чему равен.

По об. внеш. четырехугольника $\angle BOC + \angle BPC = 180^\circ$

$$\angle BPC = 180^\circ - 22^\circ$$

$\angle ACP = 180^\circ - 22^\circ, \angle A = 2$

По теореме суммы углов треугольника: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

$$\angle ACP = 2.$$

Т.к. $\angle ACP = \angle CAP$, то $\angle ACP = p/2 \Rightarrow PC = AP = 16$.

По Р синусов: $\frac{AC}{\sin 180^\circ - 22^\circ} = \frac{PC}{\sin 2}, \Rightarrow \frac{22}{\sin 158^\circ} = \frac{16}{\sin 2}$.

$$\frac{\sin 2}{\sin 158^\circ} = \frac{22}{16}, \frac{2 \cos 2 \sin 158^\circ}{\sin 158^\circ} = \frac{22}{16}, \cos 2 = \frac{11}{16}.$$

По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 2 + \cos^2 2 = 1$.

$$\sin 2 = \sqrt{1 - \frac{121}{256}} = \sqrt{\frac{135}{256}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \angle = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

То перенесите получили треугольника.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \angle.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 8 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{33\sqrt{15}}{2}$$

Ответ: $\frac{33\sqrt{15}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+4 \sin 2)(y - 4 \cos 2) \leq 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 \leq 36. \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\text{решение}$$

Заметим, что 2-го кв-го ~~ст~~ является круг, центр в Т. (0, 0) и $R=6$.

Рассмотрим 1 кв-го кв-го:

$$(x+4 \sin 2)(y - 4 \cos 2) \leq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq -4 \sin 2 \\ y \geq 4 \cos 2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{если } x \leq -4 \sin 2 \\ \text{то } y \geq 4 \cos 2 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq -4 \sin 2 \\ y \leq 4 \cos 2 \\ x = -4 \sin 2 \\ y = 4 \cos 2 \end{array} \right.$$

П.д. е. если рассматриваем Т. пересеч.

$x = -4 \sin 2$ и $y = 4 \cos 2$, то ~~ст~~ решением яв.

II и ~~III~~ кв-ры, т.е. левой верхней ~~ст~~ и правой нижней

Заметим, что если $x = -4 \sin 2 \wedge y = 4 \cos 2$, то в

макс $(x_1; y_1)$ то $x_1^2 + y_1^2 = 16$, т.к. $16 \sin^2 2 + 16 \cos^2 2 = 16$.

Тогда график решения будет выглядеть

следующими образом:

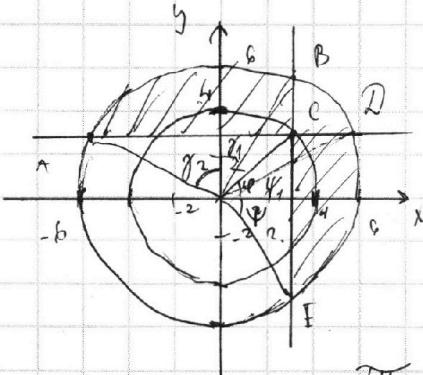
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{тогда } \psi = -2.$$

$$\text{Площадь } P = AC + BC + \sqrt{AB} + CD + CE + \sqrt{DE}$$

$$P = AD + BE + \sqrt{AB} + \sqrt{DE}.$$

Пусть $y \in T$. С коорд. (x_1, y_1) ,

$$\text{точка } A \left(\sqrt{36-y_1^2}, y_1 \right)$$

$$D \left(\sqrt{36-y_1^2}, -y_1 \right) \quad B \left(x_1, \sqrt{36-x_1^2} \right) \quad E \left(x_1, -\sqrt{36-x_1^2} \right)$$

$$AD = 2 \sqrt{36-y_1^2}$$

$$BE = 2 \sqrt{36-x_1^2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma_1 &= \frac{\sqrt{36-x_1^2}}{x_1} \\ \operatorname{tg} \psi_1 &= \frac{\sqrt{36-y_1^2}}{y_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma_2 &= \frac{\sqrt{36-y_1^2}}{y_1} \\ \operatorname{tg} \psi_2 &= \frac{\sqrt{36-x_1^2}}{x_1} \end{aligned}$$

$$\sin \gamma_1 = \frac{x_1}{6} \quad \cos \gamma_1 = \frac{y_1}{6}$$

$$\sin \psi_1 = \frac{y_1}{6} \quad \cos \psi_1 = \frac{x_1}{6}$$

$$VA \cdot VB = 6(\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$VE = 6(\psi_1 + \psi_2)$$

$$\begin{aligned} F &= 2 \left(\sqrt{36-y_1^2} + \sqrt{36-x_1^2} + 6 \left(\arcsin \frac{x_1}{6} + \arccos \frac{x_1}{6} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \arcsin \frac{y_1}{6} + \arccos \frac{y_1}{6} \right) \right) = 2 \left(\sqrt{36-y_1^2} + \sqrt{36-x_1^2} \right) + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\sqrt{36-y_1^2} + \sqrt{36-x_1^2} \right) + 6\pi. \text{ и т.к. } T \text{ лин. на} \end{aligned}$$

окружности с $r=6$, то $x_1^2 + y_1^2 = 16$.

$$x_1^2 = 16 - y_1^2$$

$$P = 2 \left(\sqrt{36-y_1^2} + \sqrt{20+y_1^2} \right) + 6\pi.$$

$$P' = \left(2 \left(\sqrt{36-y_1^2} + \sqrt{20+y_1^2} \right) + 6\pi \right)' = \frac{-2y_1}{\sqrt{36-y_1^2}} + \frac{2y_1}{\sqrt{20+y_1^2}}$$

$$P' = 0 \quad -\frac{2y_1}{\sqrt{36-y_1^2}} + \frac{2y_1}{\sqrt{20+y_1^2}} = 0 \quad \left[\frac{y_1^2}{\sqrt{36-y_1^2}} = \sqrt{20+y_1^2} \right] \quad \left[\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ 2y_1^2 = 16 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_1^2 = 8 \end{array} \right]$$

I-

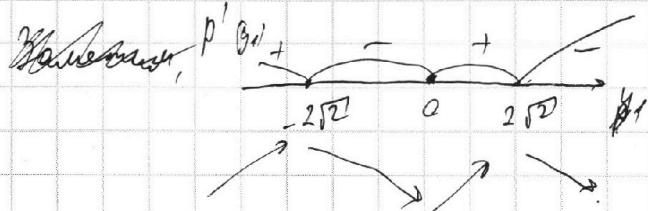


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



P_{\max} максимальна, при $y_1 = 2\sqrt{2}$ или $y_1 = -2\sqrt{2}$.

$$\text{При } y_1^2 = 8 \quad x_1^2 = 18 - y_1^2 = 8.$$

$$\frac{x_1^2}{y_1^2} = \operatorname{ctg}^2 \varphi = \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \omega.$$

$$\operatorname{ctg}^2 \omega = 1.$$

$$\operatorname{ctg} \omega = 1$$

$$\operatorname{ctg} \omega = -1.$$

$$\omega = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$M = P_{\max} = 2 \left(\sqrt{36 - 8} + \sqrt{36 - 8} \right) + 6\pi = 8\sqrt{7} + 6\pi$$

$$\text{Ответ: } M = 8\sqrt{7} + 6\pi \quad \omega = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

Дано:

$A B C D M N P Q$

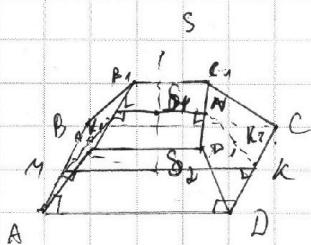
Уч. признаки

окр. - кас. вк

ребер.

окр. в кас.

бес грани



$MK \parallel AD, NS_1 \in MK$

$NS_2 \in NL$

$LN \parallel A, B, C$

Пусть точки S_1 и S_2

- центры оснований прямых

Дан. постр.: $LN \parallel A, D, P$

$LN \parallel A, B, C$

Пусть $MK = 2R$, а $LN = 2r$.

Рассмотрим кас. окр. со: в нем центр:

Будем $S_1 S_2$ - т. касания, $T.S_1$ - т. касания, $(I)K_1 E ML$

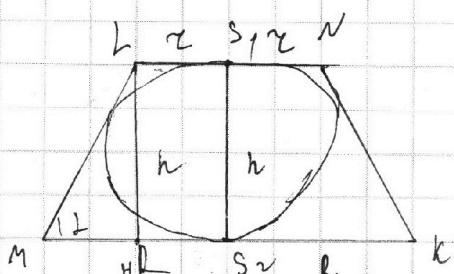
$(II)K_2 E NK$

т. к. в кас. $ML \perp (I)K_1$, $LN \perp (II)K_2$, $NK \perp (I)K_1$

и $MK \perp (I)K_1$, то $MLNK$ - ~~также~~ четырехугольник.

При этом $LN \parallel A, D, \parallel AD \parallel MK \Rightarrow MLNK$ - параллел.

то $\angle KML = L$ - искомой.



Дан. постр. $LH \perp MK$.

$LH \perp S_2 S_1$ - прямой $\Rightarrow S_2 H = r$,

$LH = S_2 S_1$.

$MH = MS_2 - S_2 H = R - r$.

то $\angle L$ - искомый.

$ML + NK = LN + MK$. $\angle ML = NK$ в силу симметрии.

$$2ML = 2R + 2r - MH = R + r. \cos L = \frac{MR}{ML}$$

то $\angle L$ - искомый

$$LH^2 + MH^2 = ML^2$$

$$LH = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

$$\cos L = \frac{R - r}{R + r}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано: четырехугольник $KLMN$. Касание окр. Ω :

В четьи четырехугольни $M, L; K$ - точки касания

В данном случае трапеция $MLNK$ - вписанная.

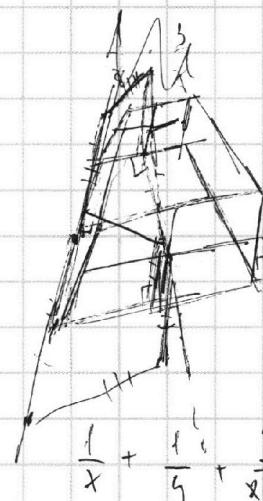


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$= \frac{y + \lambda + 3}{x + y}$$

$$(x-y) = (x-4)(y+4)$$

$$4y = 4x - 4y - 16.$$

$$4y = 4x - 16.$$

$$x^3 - y^3 = x^3 - 4^3.$$

$$x^3 - (x-4)^3 = 12(x-4)$$

$$+ 48x^2 - 12x^2 = 144x^2 - 64 = 12x^2 + 48x =$$

$$= 64.$$

$$\underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots}_{x!}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots$$

X

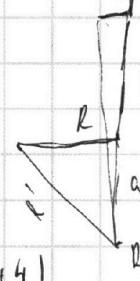
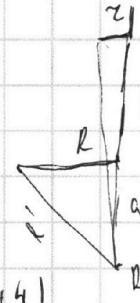
X!

X!

$$\sqrt{a}, \arccos \in [0; \pi] > 0.$$

\sqrt{b} : $\arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = a = \frac{\sqrt{x}}{2} \left(\frac{a}{x} + \frac{a}{R} - 2 \right)$$



$$\frac{y}{x} = \frac{y-1}{x}$$

$$\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta)$$

$$C = f(-\dots)$$

$$-\cos(2\alpha - \beta) - \cos(2\beta) = 0.$$

$$\cos 2\alpha = -\cos 2 - \beta.$$

$$\cos 2\alpha = \cos(k - \beta + \pi)$$

$$2\alpha = 2 - \beta + \pi.$$

$$2y = y - x + \pi.$$

$$y = 1 - x$$

$$y = 1 - x$$

$$16 \cdot 8 = 22 \cdot x$$

$$x = \frac{64}{11}$$

$$R = R + a^2$$

$$R^2 = r^2 + (a^2 + h^2)$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

$$R^2 - r^2 - a^2 = R^2 - h^2$$

