



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = 2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -8$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a - b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$.
6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 4$, $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$, $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$, $CN = 2\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + bx + c; \quad f(x) \pm 2x^2 - \text{единств. решение}; \quad \text{Ищем: } x_1 + x_2 = ?$$
$$F(x) = -8 - \text{единств. решение.}$$

Решение:

$$x^2 + bx + c \geq 2x^2 \Rightarrow x^2 - bx - c \geq 0, \quad D = b^2 + 4c \geq 0, \quad \text{г.ч. единств. решение.}$$

$$\underline{\underline{b^2 - 4c}}$$

$$x^2 + bx + c \leq -8 \Rightarrow x^2 + bx + c + 8 \leq 0, \quad D = b^2 - 4c - 32 \leq 0$$

$$-4c - 4c - 32 \leq 0 \Rightarrow 8c = -32$$

$$c = -4$$

$$F(x) \leq 0 \Rightarrow x^2 + bx + c \leq 0. \quad \text{По г. Виета: } x_1 + x_2 + c = -4$$

Ответ: $x_1 + x_2 = -4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 2^{401} \cdot 3^{500}, \quad n = xy, \quad y : x. \quad \text{Найти: к-во способов.}$$

Решение

Раз $y : x$, то число $yx = kx^2$, где $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$.

$$n = 2 \cdot 2^{400} \cdot 3^{500} = 2 \cdot (2^{200} \cdot 3^{250})^2 = yx = kx^2$$

Тогда x может принимать значения: $x = 2^{0 \dots 200} \cdot 3^{0 \dots 250}$, и при этом

yx будет больше n . Число k будет при этом всегда больше 1 и всегда

натуральным. Тогда к-во способов $= 201 \cdot 251 = 50451$

Ответ: 50451 способов.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} \geq 0$$

Ограничения:

$$x \neq 1, y \neq 1, x > 0, y > 0$$

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$

$$x \geq 2, y \geq 2$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}$$

$$x \leq 31$$

$$\log_x 2 + 9 \log_y 2 - 16 \log_{xy} 2 \geq 0$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 xy} \geq 0 \Rightarrow \frac{\log_2 xy \cdot \log_2 y + 9 \log_2 x \cdot \log_2 xy - 16 \log_2 x \cdot \log_2 y}{\log_2 x \cdot \log_2 y \cdot \log_2 xy} \geq 0$$

$$\frac{-16 \log_2 x \cdot \log_2 y}{\log_2 x \cdot \log_2 y \cdot \log_2 xy} \geq 0. \quad \text{Пос-во логарифма ч.т.ч. } x > 0, y > 0:$$

$$\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y$$

$$\frac{\log_2^2 y + \log_2 x \cdot \log_2 y + 9 \log_2^2 x + 9 \log_2 x \cdot \log_2 y - 16 \log_2 x \cdot \log_2 y}{\log_2 x \cdot \log_2 y \cdot \log_2 xy} \geq 0$$

$$\text{т.к. } x, y \neq 1, \text{ то } xy \neq 1 \Rightarrow \log_2 x \cdot \log_2 y \cdot \log_2 xy \neq 0$$

$$\log_2^2 y - 6 \log_2 x \cdot \log_2 y + 9 \log_2^2 x = (\log_2 y - 3 \log_2 x)^2 \geq 0$$

$$\log_2 y = 3 \log_2 x \Rightarrow \underline{y = x^3}$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{x^3-1}{x^3+1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\frac{y-1}{x+1} \cdot \left(1 - \frac{3}{7} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) > 0. \quad \text{т.ч. } x \geq 2, \text{ то } \frac{x-1}{x+1} > 0 \text{ всегда, значит,}$$

$$1 - \frac{3}{7} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{7x^2-7x+7-3x^2+3x-3}{7(x^2-x+1)} > 0; \quad x^2-x+1 = 0$$

$$D = 1 - 4 < 0$$

$\Downarrow$

$$x^2-x+1 > 0$$

или любыми x .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$7x^2 - 7x + 7 - 3x^2 - 3x - 3 > 0$$

$$4x^2 - 10x + 4 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 > 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 = 9$$

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{5-3}{4} = 0,5$$



$$x \in (0; 0,5) \cup (2; +\infty). \text{ Т.к. } x \geq 2 \text{ и } x \leq 31, \text{ то}$$

$$x \in (2; 31], x \in \mathbb{Z}, x = \{3, 4, 5, \dots, 31\} \rightarrow \text{всего } \underline{29 \text{ числ.}}, \text{ где}$$

всего возможно 29 пар.

Ответ: 29 пар.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4 \min(a; b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}; \quad a, b \in \mathbb{N}$$

Найти все такие пары a, b .

Решение:

Пусть $a > b$. Тогда:

$$\begin{cases} 4b = 3(a-b)^2 \\ 3a = \text{НОК}(a; b) \end{cases} \Rightarrow \text{из этого уравнения видно, что степени всех}$$

простых чисел в числе b меньше или равны степени в числе a , кроме 3;

если $a = 3^{k_0} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$, то $b = 3^{k_0+t} \cdot p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \dots \cdot p_n^{t_n}$,

где $t_1 \leq k_1, t_2 \leq k_2, \dots, t_n \leq k_n$. Тогда можно предположить

a или $a = \frac{m \cdot b}{3}$, где $m \in \mathbb{N}; m > 3$, так $a > b$

$$4b = 3 \left(\frac{mb}{3} - b \right)^2 = 3 \cdot \frac{(mb-3b)^2}{9} = \frac{b^2}{3} \cdot (m-3)^2 \quad / : b, \text{ так } b \neq 0$$

$$4 \cdot 3 = b(m-3)^2 \Rightarrow b = \frac{12}{(m-3)^2} \Rightarrow 12 : (m-3)^2, \text{ так } m-3 \in \mathbb{N}$$

$$m-3 \geq 1 \Rightarrow m \geq 4$$

$$m-3 \geq 2 \Rightarrow m \geq 5$$

или $m = 4$:

$$4b = 3 \left(\frac{4}{3}b - b \right)^2 = \frac{3b^2}{9} = \frac{b^2}{3}$$

$$b \geq 12; a = \frac{4}{3} \cdot 12 = 16$$

или $m = 5$:

$$4b = 3 \left(\frac{5}{3}b - b \right)^2 = 3 \cdot \frac{b^2}{9} = \frac{b^2}{3} \Rightarrow b = 3, a = 5.$$

или $b > a$, так $(a-b)^2 = (b-a)^2$ получим норму $a = 12, b = 16, a = 3, b = 5$.

Ответ: $(12; 16), (3; 5), (16; 12), (5; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0 \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x^2 - x - 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 3xy + 4y^2 = 0 & (2) \\ y + x - 1 = 0 & (3) \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

Для (1):

$$2ax + x - a^2 + 1 - x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$(x-a)^2 = 0 \Rightarrow x = a$$

$$y = (2a+1)a - a^2 + 1 = a^2 + a + 1$$

Для (3): $\rightarrow 2ax + x - a^2 + 1 + x - 1 = 0 \rightarrow 2x(a+1) = a^2$

$$x = \frac{a^2}{2(a+1)}, \text{ при } a \neq -1$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{2a^3}{2(a+1)} + \frac{a^2}{2(a+1)} - a^2 + 1 = \\ &= \frac{2a^3 + a^2 - 2a^2 - 2a + 2}{2(a+1)} = \\ &= \frac{-a^2 + 2a + 2}{2(a+1)}; \quad a \neq -1 \end{aligned}$$

~~Для (2):~~

Для (2):

пусть $y = kx + b$, где $k = 2a+1$
 $b = -a^2 + 1$

$$x^2 - 3x(kx+b) + 4(kx+b)^2 = 0$$

$$x^2 - 3kx^2 - 3bx + 4k^2x^2 + 8kxb + 4b^2 = 0$$

$$x^2(1 - 3k + 4k^2) + x(-3b + 8kb) + 4b^2 = 0$$

$$D = (-3b + 8kb)^2 - 16b^2(1 - 3k + 4k^2) = b^2(64k^2 - 48kb + 9 - 64k^2 + 48k - 16) = -5b^2 \leq 0$$

, не имеет корней при $b \neq 0$, при $b = 0$:

$-a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$ имеет корни: $x = \frac{8kb - 6b}{2(4k^2 - 3k + 1)}$; $k = 2a+1$
 $b = -a^2 + 1$

$x = \frac{b(8k-3)}{2(4k^2-3k+1)} = 0$, так $b = 0$. При $a \neq -1$, $a \neq 1$ корней от

(3) и (1) не получается совпадения, значит 1 решение.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим, при каких a выполняется пара (1) и (3):

$$a = \frac{a^2}{2a+2} \Rightarrow \frac{2a^2+a-a^2}{2a+2} = \frac{a^2+2a}{2a+2} = 0; \quad 2a+2 \neq 0$$

$$a^2+2a=0$$

$$a(a+2)=0$$

$$a=0; a=-2$$

Тогда, $2a \neq 0$ $2a \neq -2$

$$\text{Т.е. } y = (2a+1)x - a^2+1$$

$$\text{то есть } x_1 = x_2, \text{ и } y_1 = y_2$$

и мы получаем не решение a .

$$a^2+a+1 = \frac{a^2+2a+2}{2(a+1)}$$

Тогда $a \neq 0, a \neq -2$.

Рассмотрим, что получится при $a = -1$ и $a = 1$:

$$a = -1:$$

$$y = 2x + x - 1 + 1 = 3x, \text{ тогда уравнение (3) имеет бесконечно$$

$$\text{решений } y + x - 1 = -x + x - 1 = 0$$

$$(3): -x + x - 1 = -1 \in \text{нет решений.}$$

$$(2): x = 0 - \text{решение}$$

При $a = -1$ два решения: $(0; 0)$

$$(-1; +1)$$

$$(1): -x - x^2 - x - 1 = 0$$

$$-x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1 - \text{решение.}$$

$$a = 1:$$

$$y = 2x + x - 1 + 1 = 3x$$

$$(1): 3x - x^2 - 1 + 1 = -x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$(2): x = 0$$

$$(3): 3x + x - 1 = 0 \Rightarrow 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{существует 3 решения,}$$

$$a \neq 1, \text{ то рассмотрим: } \sqrt{\text{Ответ: } a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

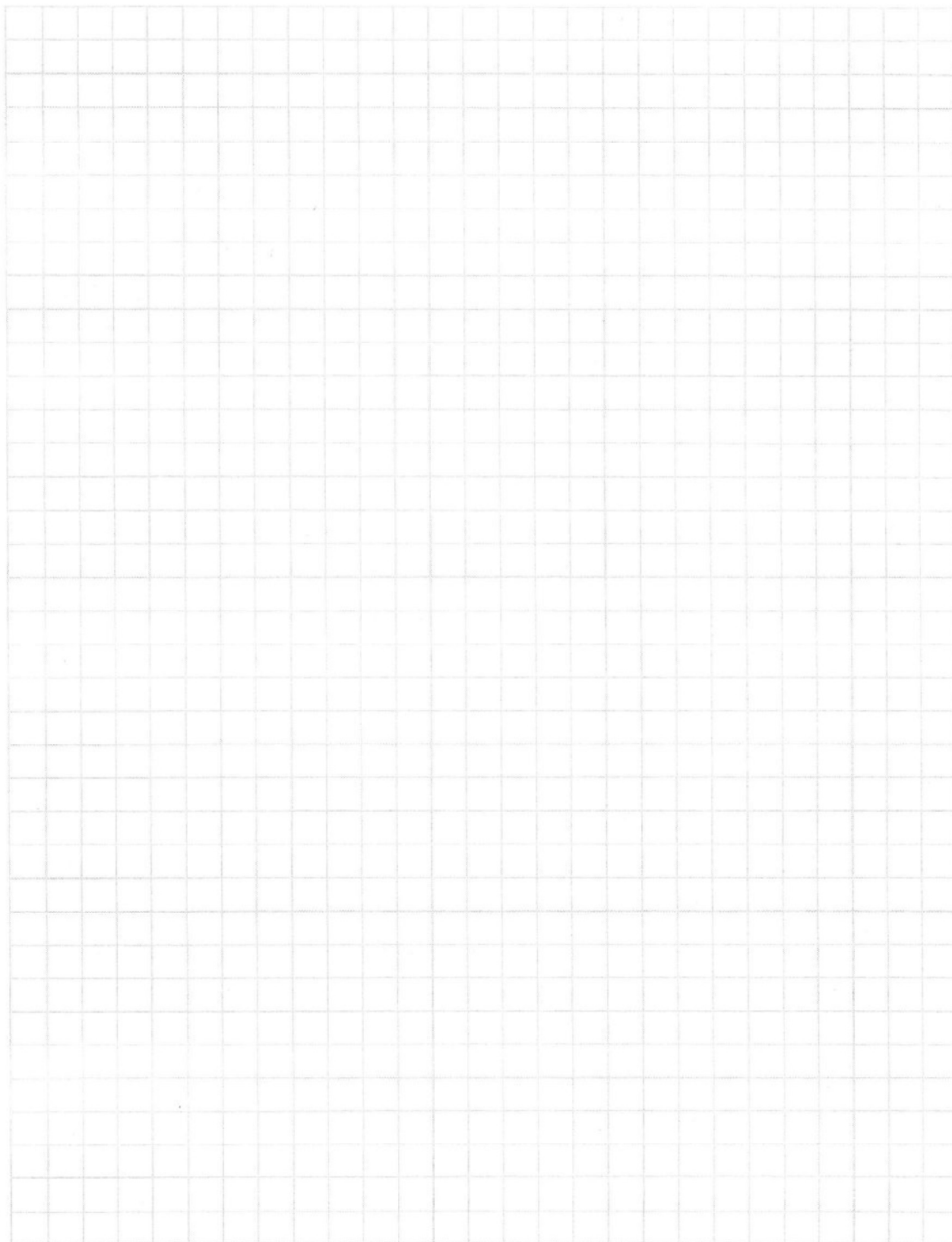
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = x! \quad \text{Если } a=0, \text{ то } \underline{k=1, b=1}$$

$$x^2 + 3x^2 + 4x^2 = \cancel{8x^2} \quad \boxed{x=0}$$

$$y = kx + b$$

$$x^2 + 3kx^2 + 3bx + 4(k^2x^2 + 2kbx + b^2) =$$

$$= x^2(1 - 3k + 4k^2) + x(-3b + 8kb) + 4b^2 = 0$$

$$D = (-3b + 8kb)^2 - 4(1 - 3k + 4k^2) \cdot 4b^2 =$$

$$= b^2(8k - 3)^2 - 16b^2(4k^2 - 3k + 1) = 0$$

$$b^2(64k^2 - 48k + 9 - 64k^2 + 48k - 16) = 0 \Rightarrow$$

$$\cancel{b^2(8k^2 - 15k + 1)} \Rightarrow D = -5b^2$$

$$a=0: \quad \text{✗}$$

$$y = x + 1$$

$$(x+1)(x^2-x-1)(x^2) \cdot \cancel{(x+1)} = 0 \quad \boxed{x=0 \rightarrow \text{не подходит}}$$

$$a=-1: \quad \text{не подходит}$$

$$y = -2x + x - 1 + y = -x$$

$$(-x^2 - 2x - 1)(x^2 + 3x^2 + 4x^2)(-x + x - 1) = 0$$

$$(x+1)^2 \cdot 8x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=-1 \quad y=1 \quad x=0 \Rightarrow y=0}$$

$$k = 2a + 1$$

$$b = -a^2 + 1$$

$$b=0 \quad -a^2 + 1 = 0$$

$$a^2 = 1$$

$$\boxed{a = \pm 1}$$

$$(1) \quad x = a \quad \text{if } a \neq 0$$

$$(3) \quad x = \frac{a^2}{2a+2}$$

$$a = \frac{a^2}{2a+2} \Rightarrow \frac{2a^2+2a-a^2}{2a+2} = 0$$

$$\frac{a(a+2)}{2a+2} = 0$$

$$a=0; a=-2$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 3 \\ \hline 48 \\ -16 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 2 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 2 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$y + x - 1 = 0$$

$$a=-2:$$

$$y = -4x + x - 1 + 1 = -3x - 3$$

$$\cancel{(x-3)(x^2-x-1)(-3x-3+x-1)}$$

$$D = b^2(8k^2 - 15k + 1)$$

$$x^2 + 3x(x+1) + 4(x+b)^2 =$$

$$= x^2 + 3x^2 + 3x + 4x^2 + 8x + 4 =$$

$$= 8x^2 + 11x + 4 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$$

$$D = 9y^2 - 16y^2 = -7y^2 \leq 0 \quad ; \quad \text{нм } y = 0;$$

не имеет решений нм $y \neq 0$

$$\text{нм } y = 0: 2ax + x - a^2 + 1 = 0$$

$$x(2a+1) = a^2 - 1$$

$$x = \frac{a^2 - 1}{2a+1} \quad ; \quad a \neq -\frac{1}{2} \quad ; \quad x \neq \frac{a^2 - 1}{2a+1} \quad ;$$

$$\text{нм } y = 0:$$

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = 0 & \text{нет решений} \\ x^2 = 0 & \rightarrow x = 0 \\ x - 1 = 0 & \rightarrow x = 1 \\ x = \frac{a^2 - 1}{2a+1} & = \frac{(a-1)(a+1)}{2a+1} \end{cases}$$

не бывает так, чтобы

$$(0; x_1) \neq (0; x_2) \quad , \quad \text{где } x_1 \neq x_2$$

Если $y = 0$, то 1 решение

$$\frac{(a-1)(a+1)}{2a+1} = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$a = 1$$

$$\text{мб } (0; 1), \text{ мб } (0; 0)$$

//

$$\boxed{y = 0}$$

$\Rightarrow x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$ не имеет решений.

$$\text{Есть решение } x = a \text{ и } x = \frac{a^2}{2a+1} \quad ; \quad a \neq 0, a \neq -1, a \neq -\frac{1}{2}$$

$$y = 2ax + x - a^2 + 1 \quad \text{нм } x = a:$$

$$y = 2a^2 + a - a^2 + 1 = a^2 + a + 1$$

$$\text{нм } x = \frac{a^2}{2a+1}:$$

$$y = \frac{2a^3}{2a+1} + \frac{a^2}{2a+1} - a^2 + 1 = \frac{2a^3 + a^2 - 2a^3 - a^2 + 2a + 1}{2a+1} = \frac{2a+1}{2a+1} = 1$$

$$\left(\frac{a^2}{2a+1}, (a; a^2 + a + 1) \right)$$

$$a^2 + a + 1 \neq 1$$

$$\text{нм } a = \frac{1}{2}:$$

$$y = 2 \cdot \frac{1}{2} x + x - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$$

$$\text{нм } a = -1: -2x + x - (-1)^2 + 1 = -x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y - x^2 - x - 1 = 0 \\ x^2 - 3xy + 4y^2 = 0 \\ y + x - 1 = 0 \\ y = 2ax + x - a^2 + 1 \end{cases}$$

$$2ax + x - a^2 - 1 - x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$(x - a)^2 = 0 \Rightarrow x = a \leftarrow \text{3-ое уравнение}$$

$$2ax + x - a^2 - 1 + x - 1 = 0$$

$$2ax + 2x - a^2 = 0$$

$$2x(a+1) = a^2$$

$$x = \frac{a^2}{2a+2}, \text{ т.к. } 2a+2 \neq 0$$

$$a \neq -1$$

$$(x - 4ax - 2x + 2a^2 + 2)^2 + 2ax^2 + x^2 - a^2x + x = 0$$

$$x^2 - 3(2ax^2 + x^2 - a^2x + x) + 4$$

$$\begin{aligned} x^2 - 6ax^2 + 3x^2 + 3a^2x - 3x + 16a^2x^2 + 16ax^2 - 16a^3x + 16ax - 8a^2x - 8a^2 + \\ + 8x + 4x^2 + 4a^4 + 4 = x^2(-6a - 3 + 16a^2 + 16a + 4) + x(3a^2 - 3 + 16a - \\ - 8a^2 + 8) + (-8a^2 + 4a^4 + 4) = x^2(16a^2 + 10a + 1) + x(8a^2 - 16a^3 - 5a^2 + \\ + 16a + 8) + 4(-2a^2 + a + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{b(8a-3)}{2(16a^2+16a+4-6a-3+1)^2} = \frac{b(16a+8-3)}{2(16a^2+16a+4-6a-3+1)^2} = \\ = \frac{b(16a+5)}{2(16a^2+10a)} \end{aligned}$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + xy = 0$$

$$(x - 2y)^2 + xy = 0$$

$$\begin{aligned} y^2(2ax + x - a^2 + 1)^2 - 4xy^2 + 2ax^2 - 2a^2x + \\ + 2ax + 2ax^2 + x^2 - a^2x + x - 2a^2x - a^2x + \\ + a^4 - a^2 + 2ax + x - a^2 + 1 \end{aligned}$$

$$a = \frac{a^2}{2a+1} = 0$$

$$\frac{2a^2 + a - a^2}{2a+1} = 0 \Rightarrow \frac{a^2 + a}{2a+1} = 0$$

$$a = -\frac{1}{2}; \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y^2(4a^2x^2 + 4ax^2 - 4a^3x + 4ax - \\ - 2a^2x - 2a^2 + 2x + x^2 + a^4 + 1 \end{aligned}$$

$$a = -1;$$

$$y = -2x + x - 1 + 1 = -x$$

$$k^2 = 4a^2 + 4a + 1$$

$$k = (2a+1)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4 \min(a; b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases} ; a, b \in \mathbb{N}$$

пусть $a > b$:

$$4b = 3(a-b)^2$$

$$3a = \text{НОК}(a; b) \Rightarrow b : 3^{n+1}, a : 3^n \quad n \geq 0, \dots, \infty$$

$b = 3k$

$$3a : a \\ 3a : b$$

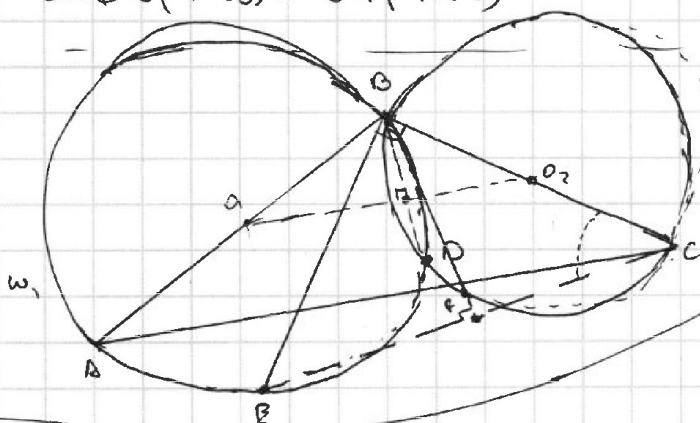
$$\begin{aligned} 1+x &= 2b \\ 3(2ax+x-a^2+x) &= 3x \\ 2ax+2x-a^2 &= x \\ 2ax &= a^2 - x \\ x &= \frac{a^2}{2a+2} \end{aligned}$$

$$3a = kb ; \quad 3a \leq ab$$

$b = 3m$

$$4b = 3a^2 - 6ab + 3b^2$$

$$b(4-3b) = 3a(a-2b)$$



$$\frac{BF}{BO}; \quad \cos \angle EBF = \frac{3}{5}$$

полно 2 решения

$$\begin{cases} (y-x^2-x-1)(x^2-3xy+4y^2)/(y+x-1) = 0 \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 = 2ax + x - a^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2ax+x-a^2+1-x^2-x-1)(x^2-3x(2ax+x-a^2+1)+4(2ax+x-a^2+1)^2)/(2ax+x-a^2+1) = 0 \\ x^2-3xy+4y^2 = 0 \\ y+x-1 = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4b = 3 \left(\frac{4b}{3} - b \right)^2 \Rightarrow 3b^2 \frac{(k-3)^2}{9} = \frac{(k-3)^2}{3} \cdot b^2$$

$$b = \frac{12}{(k-3)^2}$$

$$12 : (k-3)^2 = 1 \Rightarrow (k-3)^2 = 12$$

$$(k-3)^2 = 1 \Rightarrow k = 4$$

$$(k-3)^2 = 4 \Rightarrow k = 5$$

$$(k-3)^2 = 9 \Rightarrow k = 6$$

$$(k-3)^2 = 16 \Rightarrow k = 7$$

$$(k-3)^2 = 25 \Rightarrow k = 8$$

$$(k-3)^2 = 36 \Rightarrow k = 9$$

$$(k-3)^2 = 49 \Rightarrow k = 10$$

$$(k-3)^2 = 64 \Rightarrow k = 11$$

$$(k-3)^2 = 81 \Rightarrow k = 12$$

$$(k-3)^2 = 100 \Rightarrow k = 13$$

$$(k-3)^2 = 121 \Rightarrow k = 14$$

$$(k-3)^2 = 144 \Rightarrow k = 15$$

$$(k-3)^2 = 169 \Rightarrow k = 16$$

$$(k-3)^2 = 196 \Rightarrow k = 17$$

$$(k-3)^2 = 225 \Rightarrow k = 18$$

$$(k-3)^2 = 256 \Rightarrow k = 19$$

$$(k-3)^2 = 289 \Rightarrow k = 20$$

$$(k-3)^2 = 324 \Rightarrow k = 21$$

$$(k-3)^2 = 361 \Rightarrow k = 22$$

$$(k-3)^2 = 400 \Rightarrow k = 23$$

$$(k-3)^2 = 441 \Rightarrow k = 24$$

$$(k-3)^2 = 484 \Rightarrow k = 25$$

$$(k-3)^2 = 529 \Rightarrow k = 26$$

$$(k-3)^2 = 576 \Rightarrow k = 27$$

$$(k-3)^2 = 625 \Rightarrow k = 28$$

$$(k-3)^2 = 676 \Rightarrow k = 29$$

$$(k-3)^2 = 729 \Rightarrow k = 30$$

$$(k-3)^2 = 784 \Rightarrow k = 31$$

$$(k-3)^2 = 841 \Rightarrow k = 32$$

$$(k-3)^2 = 900 \Rightarrow k = 33$$

$$(k-3)^2 = 961 \Rightarrow k = 34$$

$$(k-3)^2 = 1024 \Rightarrow k = 35$$

$$(k-3)^2 = 1089 \Rightarrow k = 36$$

$$(k-3)^2 = 1156 \Rightarrow k = 37$$

$$(k-3)^2 = 1225 \Rightarrow k = 38$$

$$(k-3)^2 = 1296 \Rightarrow k = 39$$

$$(k-3)^2 = 1369 \Rightarrow k = 40$$

$$(k-3)^2 = 1444 \Rightarrow k = 41$$

$$(k-3)^2 = 1521 \Rightarrow k = 42$$

$$(k-3)^2 = 1600 \Rightarrow k = 43$$

$$(k-3)^2 = 1681 \Rightarrow k = 44$$

$$(k-3)^2 = 1764 \Rightarrow k = 45$$

$$(k-3)^2 = 1849 \Rightarrow k = 46$$

$$(k-3)^2 = 1936 \Rightarrow k = 47$$

$$(k-3)^2 = 2025 \Rightarrow k = 48$$

$$(k-3)^2 = 2116 \Rightarrow k = 49$$

$$(k-3)^2 = 2209 \Rightarrow k = 50$$

$$(k-3)^2 = 2304 \Rightarrow k = 51$$

$$(k-3)^2 = 2401 \Rightarrow k = 52$$

$$(k-3)^2 = 2500 \Rightarrow k = 53$$

$$(k-3)^2 = 2601 \Rightarrow k = 54$$

$$(k-3)^2 = 2704 \Rightarrow k = 55$$

$$(k-3)^2 = 2809 \Rightarrow k = 56$$

$$(k-3)^2 = 2916 \Rightarrow k = 57$$

$$(k-3)^2 = 3025 \Rightarrow k = 58$$

$$(k-3)^2 = 3136 \Rightarrow k = 59$$

$$(k-3)^2 = 3249 \Rightarrow k = 60$$

$$(k-3)^2 = 3364 \Rightarrow k = 61$$

$$(k-3)^2 = 3481 \Rightarrow k = 62$$

$$(k-3)^2 = 3600 \Rightarrow k = 63$$

$$(k-3)^2 = 3721 \Rightarrow k = 64$$

$$(k-3)^2 = 3844 \Rightarrow k = 65$$

$$(k-3)^2 = 3969 \Rightarrow k = 66$$

$$(k-3)^2 = 4096 \Rightarrow k = 67$$

$$(k-3)^2 = 4225 \Rightarrow k = 68$$

$$(k-3)^2 = 4356 \Rightarrow k = 69$$

$$(k-3)^2 = 4489 \Rightarrow k = 70$$

$$(k-3)^2 = 4624 \Rightarrow k = 71$$

$$(k-3)^2 = 4761 \Rightarrow k = 72$$

$$(k-3)^2 = 4900 \Rightarrow k = 73$$

$$(k-3)^2 = 5041 \Rightarrow k = 74$$

$$(k-3)^2 = 5184 \Rightarrow k = 75$$

$$(k-3)^2 = 5329 \Rightarrow k = 76$$

$$(k-3)^2 = 5476 \Rightarrow k = 77$$

$$(k-3)^2 = 5625 \Rightarrow k = 78$$

$$(k-3)^2 = 5776 \Rightarrow k = 79$$

$$(k-3)^2 = 5929 \Rightarrow k = 80$$

$$(k-3)^2 = 6084 \Rightarrow k = 81$$

$$(k-3)^2 = 6241 \Rightarrow k = 82$$

$$(k-3)^2 = 6400 \Rightarrow k = 83$$

$$(k-3)^2 = 6561 \Rightarrow k = 84$$

$$(k-3)^2 = 6724 \Rightarrow k = 85$$

$$(k-3)^2 = 6889 \Rightarrow k = 86$$

$$(k-3)^2 = 7056 \Rightarrow k = 87$$

$$(k-3)^2 = 7225 \Rightarrow k = 88$$

$$(k-3)^2 = 7396 \Rightarrow k = 89$$

$$(k-3)^2 = 7569 \Rightarrow k = 90$$

$$(k-3)^2 = 7744 \Rightarrow k = 91$$

$$(k-3)^2 = 7921 \Rightarrow k = 92$$

$$(k-3)^2 = 8100 \Rightarrow k = 93$$

$$(k-3)^2 = 8281 \Rightarrow k = 94$$

$$(k-3)^2 = 8464 \Rightarrow k = 95$$

$$(k-3)^2 = 8649 \Rightarrow k = 96$$

$$(k-3)^2 = 8836 \Rightarrow k = 97$$

$$(k-3)^2 = 9025 \Rightarrow k = 98$$

$$(k-3)^2 = 9216 \Rightarrow k = 99$$

$$(k-3)^2 = 9409 \Rightarrow k = 100$$

$$a = \frac{4}{3}b$$

$$a = \frac{5}{3}b$$

$$b : 3$$

$$b = 3$$

$$a = \frac{4 \cdot 3}{3} = 4$$

$$b = 3$$

$$a = 4$$

$$b = 3k$$

$$a = 4k$$

$$a - b = k$$

$$4k - 3k = k$$

$$4k = k$$

$$\text{НОК: } 4 \cdot 3 = 12$$

$$\text{НОК: } 4 \cdot 3 = 12$$

$$a = \frac{4b}{3}, a = \frac{5b}{3}$$

$$4b = 3 \left(\frac{4b}{3} - b \right)^2$$

$$4b = 3 \left(\frac{b}{3} \right)^2 = \frac{b^2}{3} \Rightarrow b = 12, a = 16$$

$$4b = 3 \left(\frac{4b}{3} - b \right)^2 = 3 \cdot \frac{4b^2}{9} = \frac{4b^2}{3}$$

$$4b = 3 \left(\frac{2b}{3} - b \right)^2 = \frac{3 \cdot b^2}{9} = \frac{b^2}{3} \Rightarrow b = 6, a = 8$$

$$b = 3, a = 5$$

$$m = 3$$

$$m = 2, m = 5$$

$$m = 3$$

$$m = 1, m = 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порука QR-кода недопустима!

н4) ~~а58~~

$$\begin{cases} 4 \min(a; b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

мысл. $a > b$; $4b = 3 \frac{(a-b)^2}{b}$

$$(a-b) \cdot 4$$

$$3 \neq \text{НОК}(a; b)$$

$$; \quad \cancel{НОА(a; b) = \frac{b}{3}}$$

$$\cancel{НОА(a; b) \cdot \text{НОК}(a; b) = ab = b^2}$$

$$3 \left(\frac{kb}{3} - b \right)^2 = 3 \left(\frac{kb-3b}{3} \right)^2 = (3kb-9b)^2 = 4b$$

$$b^2(3k-9)^2 = 4b \Rightarrow$$

$$b(b(3k-9)^2 - 4) = 0; \quad b \neq 0$$

$$4b = 3 \left(\frac{kb}{3} - b \right)^2 = 3b^2 \left(\frac{k}{3} - 1 \right)^2$$

$$b = \frac{4}{(3k-9)^2}$$

$$b=3, \quad a>b$$

$$12 = 3(a-3)^2$$

$$3a = \text{НОК}(a; b)$$

$$4b = 3 \left(\frac{5b}{3} - b \right)^2 = 3 \left(\frac{5}{3} - 1 \right)^2 \cdot b^2$$

$$\left(\frac{5}{3} - 1 \right)^2 \cdot 3 = \frac{(5-3)^2}{3} = 3 = \frac{(5-3)^2}{3}$$

$$4 = (a-3)^2$$

$$a-3 = 2$$

$$a=5$$

$$b \left(\frac{(5 \cdot 3 - 9)^2}{3} \cdot b - 4 \right) = 0$$

$$\boxed{b=3, a=5}$$

$$b = \frac{4 \cdot 3}{(5-3)^2} = \frac{4 \cdot 3}{4}$$

$$a = \frac{5b}{3}$$

$$5 \cdot 3 - 9 = 6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 xy} = 0;$$

$$\frac{16}{-16} = \frac{16}{6}$$

$$\frac{\log_2 xy + \log_2 y + \frac{9 \log_2 x \cdot \log_2 xy - 16 \log_2 x \cdot \log_2 y}{\log_2 xy \cdot \log_2 x \cdot \log_2 y}}{x \neq 0} = 0$$

$$\log_2 x + \log_2 y$$

$$\log_2 x \cdot \log_2 y + \log_2^2 y + 9 \log_2^2 x + 9 \log_2 x \log_2 y - 16 \log_2 x \log_2 y =$$

$$= \log_2^2 y + 6 \log_2 x \log_2 y + 9 \log_2^2 x = (\log_2 y - 3 \log_2 x)^2 = 0$$

$$\log_2 y = 3 \log_2 x \Rightarrow \boxed{y = x^3}$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{x^3-1}{x^3+1}$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

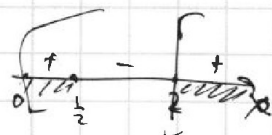
$$\frac{(x-1)}{(x+1)} \cdot \left(1 - \frac{3}{7} \frac{(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)}\right) > 0$$

$$x > 0; x \neq 1 \quad x \in \{2, \dots, 31\}$$

30 нар.

$$x^2 - x + 1$$

$$D = 1 - 4 < 0$$



$$(x^3-1) = (x-1)(x^2+x+1) =$$

$$= x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1$$

$$(x^3+1) = (x+1)(x^2-x+1) =$$

$$= x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \underline{x > 1} \\ 1 - \frac{3}{7} \frac{(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)} > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x \geq 2}$$

$$\frac{7x^2 - 7x + 7 - 3x^2 + 3x - 3}{7(x^2 - x + 1)} > 0$$

$$\frac{4x^2 - 10x + 4}{7(x^2 - x + 1)} > 0$$

no берся

$$2(2x^2 - 5x + 2) > 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

22) $f(x) = x^2 + bx + c$

$f(x) = 2x^2$ — эквивал. решение, $f(x) = -8$ — эквивал. решение.

$f(x) = 0 \mid x_1, x_2 = ?$

$x^2 + bx + c = 2x^2 \Rightarrow x^2 + bx - c = 0$

$D = b^2 + 4c = 0$

$x^2 + bx + c = -8 \Rightarrow x^2 + bx + c + 8 = 0$

$D = b^2 - 4c - 32 = 0$

$x_1 + x_2 = c = -4$

$-4c - 4c = 32 \Rightarrow c = -\frac{32}{8} = -4$

$\log_x 2 + 3 \log_{x^3} 8 + 4 \log_{x^4} \frac{1}{16} = 0$
 $= \log_x 2 + 3 \log_x 2 - 4 \log_x 2 = 0$

23) $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$; $n = xy$, $y \mid x$

$n = kx^2$

$2^{401} \cdot 3^{500} = 2 \cdot (2^{200})^2 \cdot (3^{250})^2$

$x = 2^{0 \dots 200} \cdot 3^{0 \dots 250}$

$y = kx$

$y \mid x \Rightarrow k \mid 1 \Rightarrow k = 1$

$\begin{array}{r} 251 \\ \times 201 \\ \hline 251 \\ + 5020 \\ \hline 50451 \end{array}$

$201 \cdot 251 = 50451$ число.

23) $x, y \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_{x^3} 8 + 4 \log_{x^4} \frac{1}{16} = 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1} \\ x \leq 31 \end{cases}$

$x, y \neq 1, x, y \geq 0$

$\log_x 2 + 9 \log_y 2 + 16 \log_{xy} 2 = 0$

$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} = \frac{16}{\log_2 xy} = 0$

$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} = \frac{16}{\log_2 x + \log_2 y} = 0$

$\log_2 x + \log_2 y$