



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1/ [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = 2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -8$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.

2/ [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?

3/ [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a-b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$.

6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 4$, $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$, $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$, $CN = 2\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Реша $f(x) = x^2 + px + q$.

1) $f(x) = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 - px - q = 0$! реш

2) $f(x) = -8 \Leftrightarrow x^2 + px + (q+8) = 0$! реш.

①: $x^2 - px - q = 0$ имеет 1 реш

$\Rightarrow D = p^2 + 4q = 0$

② $x^2 + px + q + 8 = 0$ имеет 1 реш

$\Rightarrow D = p^2 - 4q - 32 = 0 \Rightarrow p^2 - 4q = 32$.

$$\begin{cases} p^2 + 4q = 0 \\ p^2 - 4q = 32 \end{cases} \quad | + 2p^2 = 32 \Rightarrow p^2 = 16 \Rightarrow p = \pm 4.$$

$\Rightarrow q = -4$.

Проверяем эти значения удовл. системе $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ и уст. задачи

Ответ: ~~рав~~ сумма корней $f(x) = 0$ по

Т. Виета равна $-p \Rightarrow$ равна ± 4 .

Ответ: ± 4 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 2^{401} \cdot 3^{500} = xy, \text{ где } y : x \Rightarrow y = kx, k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 2^{401} \cdot 3^{500} = kx^2$$

Достаточно подбирать четные степени 2 и 3
для x^2 , k округ. округляем.

Возможн. варианты

$$\text{для } 2: \{0, 2, 4, \dots, 400\} \rightarrow 201$$

$$\text{для } 3: \{0, 2, 4, \dots, 500\} \rightarrow 251$$

Итого 201 · 251 способ

$$\text{Ответ: } 201 \cdot 251 = 50451.$$

Р.з. заметим, что способы не повторяются,

$$\text{для следующего: } \exists k_1 x_1^2 = k_2 x_2^2 \Rightarrow k_1 x_1^2 = k_2 x_2^2 \Rightarrow k_1 x_1^2 = k_2 x_2^2$$

Заметим, что $y \geq x$, т.к. $kx \geq x$ при $k \neq 1$

$$(\text{а } k \neq 1 \text{ т.к. } 2^{401} \cdot 3^{500} \text{ не квадрат } \Rightarrow \neq x^2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ не будет повторов способов $\Rightarrow$ нет повторов

способов $\mathbb{N}$ (т.к. нет пар $x \cdot x$)

$$\text{Ответ: } 50451 = 201 \cdot 251$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0$$

на 023:

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{3}{\log_2 y} = \frac{16}{\log_2 x + \log_2 y}$$

$$\text{Пусть } (a, b) = (\log_2 x, \log_2 y)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{3}{b} = \frac{16}{a+b} \Leftrightarrow b(a+b) + 3a(a+b) - 16ab = 0$$

$$ab + b^2 + 3a^2 + 3ab - 16ab = 0$$

$$3a^2 + 4ab - 6ab + b^2 = 0; (3a - b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a = b \rightarrow 3 \log_2 x = \log_2 y$$

$$\log_2 x^3 = \log_2 y \Leftrightarrow x^3 = y$$

$$\textcircled{2} \frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{x^3-1}{x^3+1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$$

$$\text{Так } x, y > 0, \text{ то } x+1 > 0, x^2-x+1 > 0$$

$$x-1 > \frac{3}{7} \cdot (x-1) \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \quad | \cdot 7(x^2-x+1)$$

$$* 7(x-1)(x^2-x+1) - 3(x-1)(x^2+x+1) > 0$$

$$(x-1)(7x^2 - 7x + 7 - 3x^2 - 3x - 3) > 0$$

$$(x-1)(4x^2 - 10x + 4) > 0; (x-1)(2x^2 - 5x + 2) > 0$$

$$(x-1)(x-\frac{1}{2})(x-2) > 0 \Rightarrow x \in (\frac{1}{2}; 1) \cup (2; +\infty)$$

$$x \in (\frac{1}{2}; 1) \cup (2; +\infty) \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in [3; +\infty)$$

$$\textcircled{023}: x \neq 1$$

$$x > 0$$

$$y \neq 1$$

$$y > 0$$

$$xy \neq 1$$

$$x = -1$$

$$y = -1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③ $x \leq 31 \Rightarrow x \in [3, 31] \Rightarrow 31 - 3 + 1 = 29$ значений
и т.к. $x^3 = y$ биективно, то к каждому $x \Leftrightarrow !y$
итого 29 пар (x, y)
Ответ: 29.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь пусть $a = 4$.

$$4 \cdot 4 = 3 \cdot 16 - 24b + b^2$$

$$b^2 - 24b + 8 \cdot 16 = 0 \Rightarrow b = 8 \text{ или } b = 16.$$

$$1) \cancel{[8, 4] = 4[2, 1]} \Rightarrow 8 \quad [8, 3 \cdot 4] = [8, 12] =$$

$$= 4[2, 3] = 4 \cdot 6 = 24 = 3 \cdot b \quad \text{Ⓢ}$$

$$2) [16, 3 \cdot 4] = [16, 12] = 4[4, 3] = 4 \cdot 12 = 48 = 3 \cdot b \quad \text{Ⓢ}$$

II Второй случай: $b : a \Rightarrow \sqrt[3]{b} \geq \sqrt[3]{a}$

$$\text{Но тогда } \sqrt[3]{4a} = \sqrt[3]{3(a-b)^2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{a} = 1 + 2\sqrt[3]{a-b} \geq 1 + 2\sqrt[3]{a} \Rightarrow \sqrt[3]{a} \leq -1 \Rightarrow !?$$

III Третий случай: $3 : a$, если $a = 1$, то

$$3b = [a, b] = b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow !?$$

или $a = 3$, то это подслучай I-го случая.

Итак подходящие пары $(3, 5); (6, 14), (12, 16)$

$(5, 3), (14, 6), (16, 2)$

Ответ: $(3, 5), (5, 3); (6, 14), (14, 6); (12, 16), (16, 12)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

НУО $a \leq b$. Тогда $\begin{cases} 4a = 3(a-b)^2 \text{ (1)} \\ 3b = [a, b] \text{ (2)} \end{cases}$, где $[a, b] = \text{НОК}(a, b)$

Значит $3b : a$ (ч, (2)). Возможно нем. случаев
II $3b : a, b : a, 3 : a$

Пусть $v_p(x)$ - ст. вх. простого p в x .

$$(1): v_3(4a) = v_3(3(a-b)^2) \Rightarrow v_3(a) = 1 + 2v_3(a-b).$$

Если $b : a, 3b : a$, то $v_3 b < v_3 a$ (на 1)

$$\Rightarrow v_3(a) = 1 + 2v_3(a-b) = 1 + 2v_3 b = 1 + 2(v_3 a - 1)$$

$$\Rightarrow v_3 a = 1 + 2v_3 a - 2 \Rightarrow v_3 a = 1 \Rightarrow v_3 b = 0$$

Пусть тогда $a = 3\alpha, \alpha : 3; b : \alpha$.

$$4\alpha = (3\alpha - b)^2 = 9\alpha^2 - 6\alpha b + b^2$$

Заметим, что левая часть $: \alpha^2 \Rightarrow 4\alpha : \alpha^2$

$$\Rightarrow 4 : \alpha \Rightarrow \alpha \in \{1, 2, 4\}. \text{ Если } \alpha = 1, \text{ то } a = 3$$

$$4 = 9 - 6b + b^2 \Rightarrow b^2 - 6b + 5 = 0 \Rightarrow b = 2 \text{ или } b = 3$$

$$\Rightarrow b = 1 \text{ или } b = 5, b = 1 \text{ не год. (2) } \Rightarrow b = 5 \text{ или } b = 2$$

$$\text{Теперь пусть } \alpha = 2 \Rightarrow 8 = 36 - 12b + b^2$$

$$b^2 - 12b - 28 = 0 \Rightarrow (b = 14) \text{ или } (b = -2 \text{ (X)})$$

$$[14, 6] = 2[7, 3] = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 2 \cdot 7 = 3 \cdot 14 = 3b \text{ (V)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{Покажем } \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 &= \left(\frac{BF}{AD}\right)^2 = \cos^2 \alpha + 1 + 2\cos^2 \alpha = \\ &= 3\cos^2 \alpha + 1 \Rightarrow \frac{BF}{AD} = \sqrt{3\cos^2 \alpha + 1} \end{aligned}$$

$$\frac{BF}{AD} = \sqrt{3 \cdot \frac{9}{25} - 1} = \sqrt{\frac{27}{25}} = \frac{\sqrt{27}}{5} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{5}$.

по т. косинусов в $\triangle CBA$: $CB^2 + BA^2 + 2CB \cdot BA \cos \alpha = AC^2$
 $\Rightarrow \frac{AC^2}{AB^2} = \left(\frac{CB}{AB}\right)^2 + 1 + 2 \left(\frac{CB}{AB}\right) \cdot \cos \alpha$. Значит, также, что
 $CB = AE \Rightarrow \frac{CB}{AB} = \frac{AE}{AB} = \cos \alpha$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + x + 1 \rightarrow C \\ x = 4y \rightarrow l_2 \\ x = -y \rightarrow l_1 \\ y = -x + 1 \rightarrow l_3 \end{cases} \text{ рассмотрим}$$

Заметим, что $|l_1 \cap C| = 1 \Rightarrow \text{касается (в } x = -1)$

Пусть $l_a: (2a+1)x - a^2 + 1$

Заметим, что $|l_a \cap C| = 1$: действительно

$$x^2 + x + 1 = (2a+1)x - a^2 + 1 \Leftrightarrow (x-a)^2 = 0 \Rightarrow x = a.$$

1) $l_a \parallel l_1, l_a \parallel l_2 \Rightarrow 2a+1 = -1 \Rightarrow a = -1$

$\Rightarrow l_a: y = -x = l_1 \rightarrow \text{противоречие (одно решение)}$

2) $l_a \cap l_1 \Rightarrow l_a \parallel l_2 \Leftrightarrow a \neq -1 \Rightarrow \text{уже } \geq 2 \text{ решения}$

если $l_a \cap l_1$ в т. пересечения l_1 и C , то $l_a = l_1$.

если $l_a \cap l_1$ в т. пересечения l_2 и C , то касаясь C ,

то $2a+1 = 1 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow l_a: y = x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ действительно касается, но тут $|l_a \cap l_1| = 1$

$|l_a \cap l_2| = 1$ и $|l_a \cap l_3| = 1 \Rightarrow 3 \text{ решения.}$

Ответ: нет таких a .

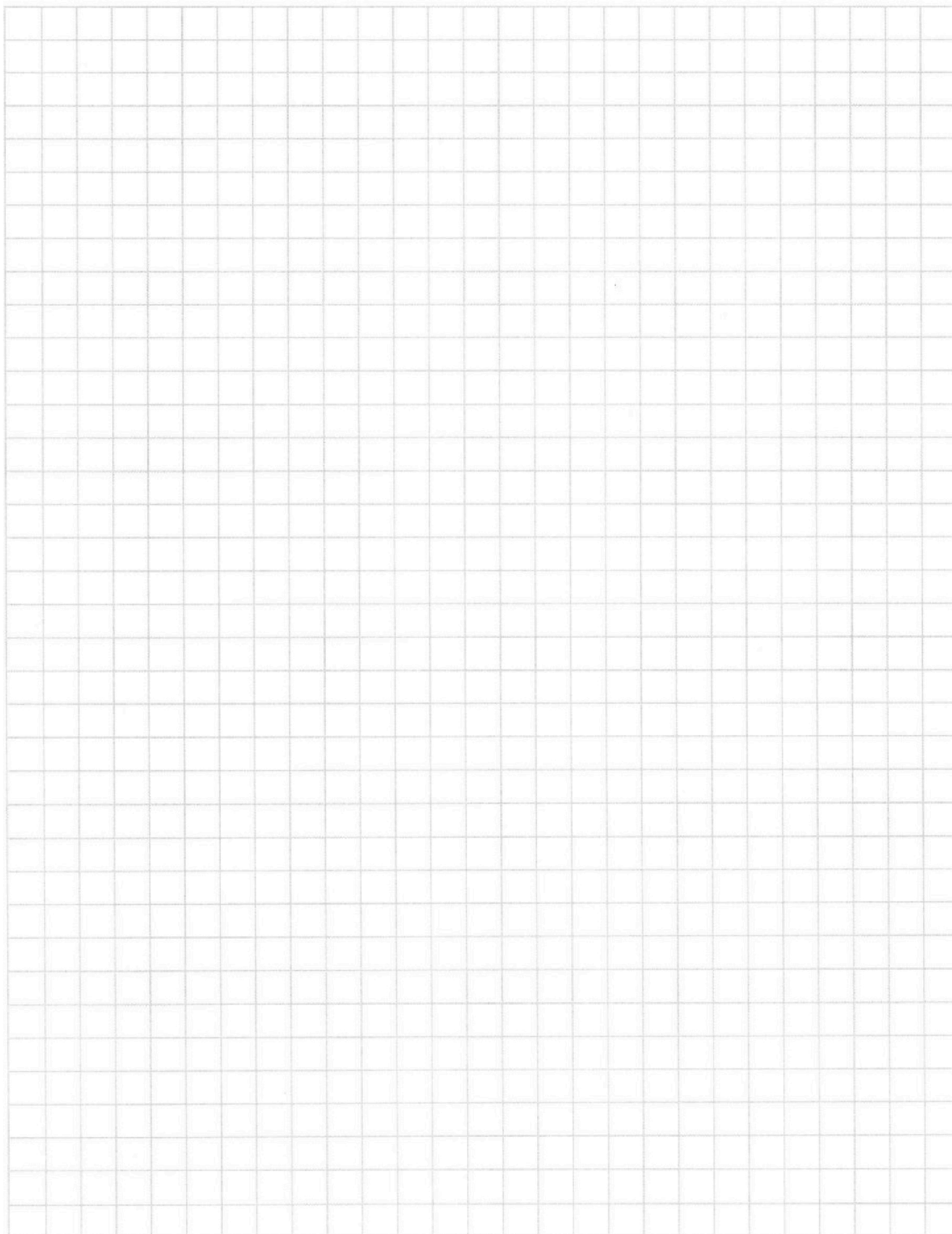


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

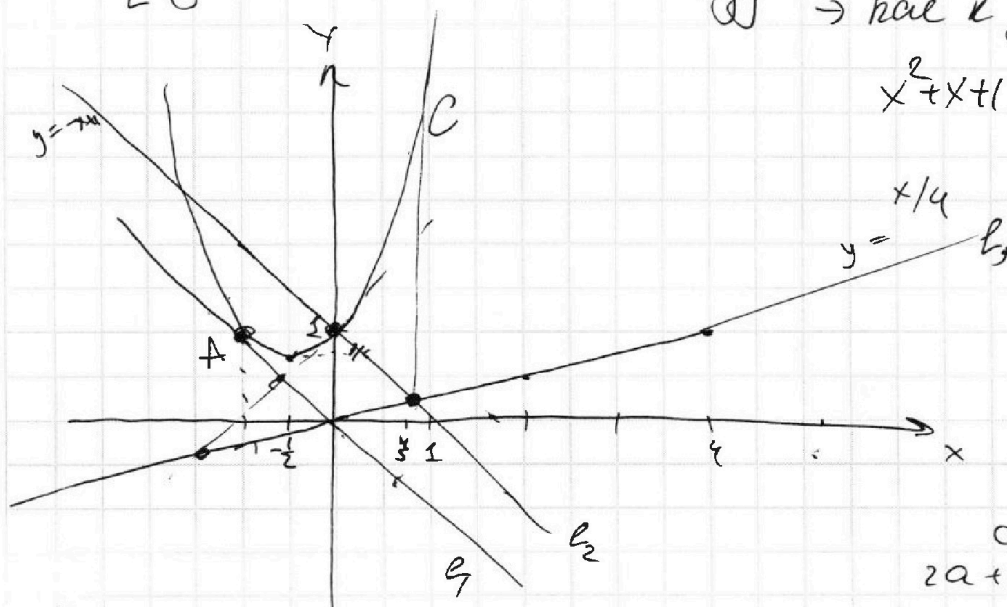
$$1\text{-ое ур-е} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ x^2 - 3xy + 4y^2 = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ (x - y)(x + y) = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ y = x/4 \\ y = -x \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

Построим все это в xOy .

Нетрудно понять, что $y = -x$
→ нас к $y = x^2 + x + 1$

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= -x \\ (x+1)^2 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{4} &= \frac{5}{4} \\ a &= -\frac{1}{2} \quad 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ 2a + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Пусть $y = -x \rightarrow l_1$, $y = -x + 1 = l_2$, $y = x/4 = l_3$
 $y = x^2 + x + 1 \Rightarrow C$; $y = (2a+1)x - a^2 - 1 \rightarrow l_a$ (содержим)
 1) Если $l_a \cap l_1 \Rightarrow l_a \cap l_2$ т.к. $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow$ еще 2 решения
 $\Rightarrow l_a \cap l_3 = \emptyset$, $l_a \cap C = \emptyset$.

Найдем когда $l_a \cap l_1$; достаточно $-1 \neq 2a+1$

$$\Leftrightarrow a \neq -1. \text{ Теперь } l_3 \cap l_a = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+1 = 1/4 \\ a^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} a = -3/8 \\ a \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -3/8$$

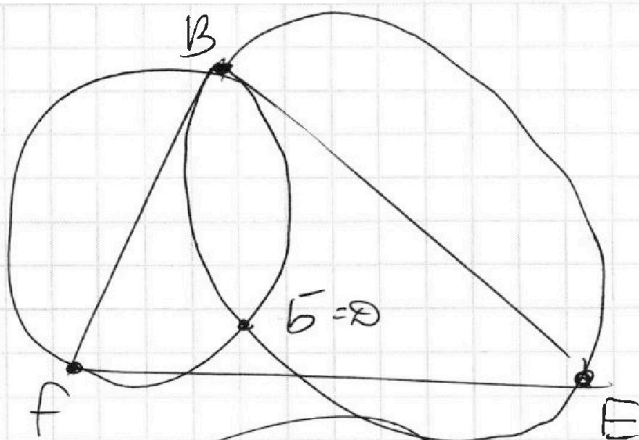


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

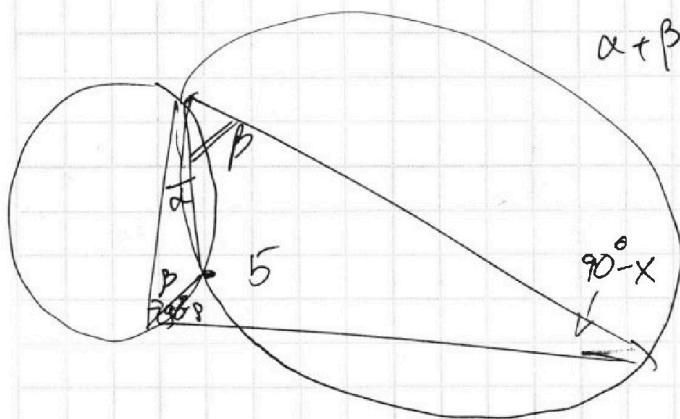
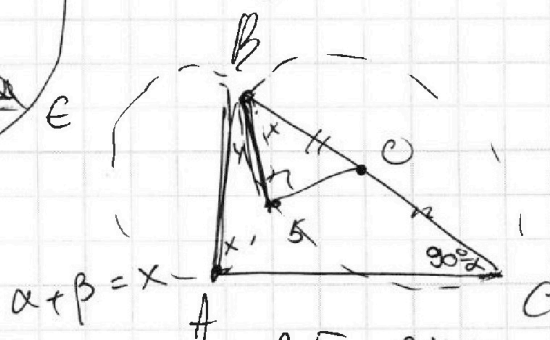
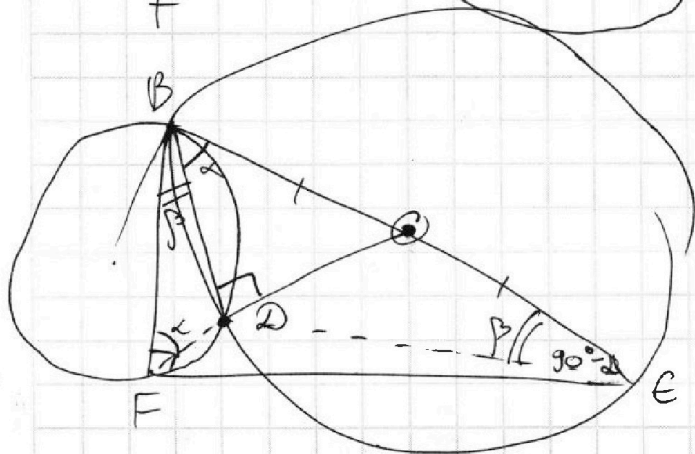


6

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\frac{BD}{BF} = \frac{BD}{BF} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\tan \alpha =$$



$$\frac{BD}{AB} = \frac{\sin x}{\sin \alpha}$$

$$\sin x = \frac{206}{BC}$$

$$\frac{206}{BC \cdot \sin \alpha} = \frac{205}{AC}$$

DM

$$\frac{BD^2}{BF^2} = \frac{CD \cdot DM}{CF \cdot FE}$$

$$BD = \frac{BC \cdot AB}{AC} \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{AB}{AC}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2^{401} \cdot 3^{500} = K_1 X_1^2 = K_2 X_2^2$$

$$2-2$$

$$y \cdot x$$

$$a \cdot b$$

$$y_1 \cdot x_1$$

$$2-2$$

$$y \cdot x$$

$$a \cdot b$$

$$y_2 \cdot x_2$$

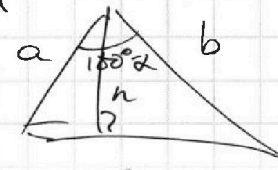
$$x_2 = x_1$$

$$y_1 = y_2$$

$$x_2^2 = \frac{c}{y}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$$

$$h = \frac{ab}{c} \sin \alpha$$



$$\begin{aligned} &= (2a+1)h - a^2 + 1 \\ &= 4(2a+1) - 5a^2 + 5 \\ &= -5a^2 + 17a + 5 \end{aligned}$$

$$x_1 y_1 = x_2 y_2$$

$$\begin{aligned} a &= 2h_2 \\ b &= 2h_1 \end{aligned}$$

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AE}{BD} = \frac{BC}{AD}$$

$$\frac{hc}{2} = \frac{ab \sin \alpha}{2} \quad \frac{AM}{ME} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$hc = ab \sin \alpha$$

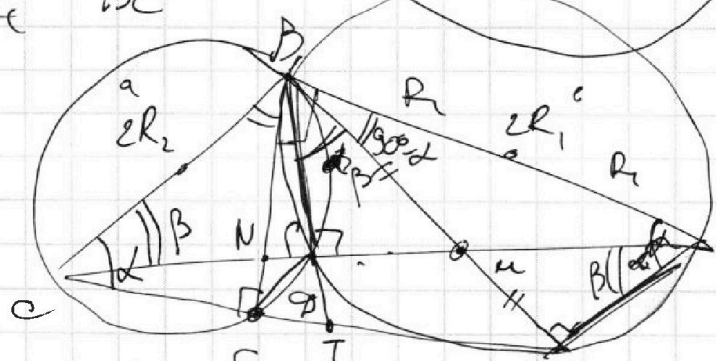
comp.

$$\frac{ME}{AE} = \frac{MD}{BD}$$

$$\angle B = 180^\circ - \alpha$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{BF}{BE}$$

h = m. BF, a = m. O = 3m



$$CM = MA$$

$$BF = x = 2R_2 \sin \alpha$$

$$\frac{R_1}{Ac} = \frac{1}{a^2 + 1 + 2a \cos \alpha}$$

$$\frac{h}{x} = \frac{abF \sin \alpha}{c \cdot 2R_2 \sin \alpha} = \frac{abF}{c \cdot 2R_2} = \left(\frac{b}{c} \right) \sqrt{\frac{b^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 \frac{b^2}{ac} \cos \alpha}$$

$$FB \cdot AB = BE \cdot AC = BE \cdot CB \quad \text{и в } FBE \cdot 7. \text{ больше}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = x^2 + x + 1$$

$$y = (2a+1)x - a^2 + 1$$

$$\begin{cases} X = y \\ X = 4y \end{cases} \quad \text{①}$$

$$y = x^2 + x + 1$$

$$y = -x + 1$$

$$y = (2a+1)x - a^2 + 1$$

$$X = (2a+1)X - a^2 + 1 \quad a \neq 0$$

$$1 + 2ax = a^2 \quad 2ax = a^2 - 1$$

$$2x = a - \frac{1}{a}$$

$$1 \text{ решение}$$

$$\frac{x}{4} = -x + 1 \quad X = -4x + 4$$

$$X = y \quad 5x = 4$$

$$x = \frac{4}{5}$$

$$y = -4x + 4$$

$$y = 16$$

$$y = -4y + 1$$

$$16y^2 + 3y + 1 = 5y = 1 \quad y = 15$$

$$y = 8 \quad 16y^2 + 3y + 1 = 2$$

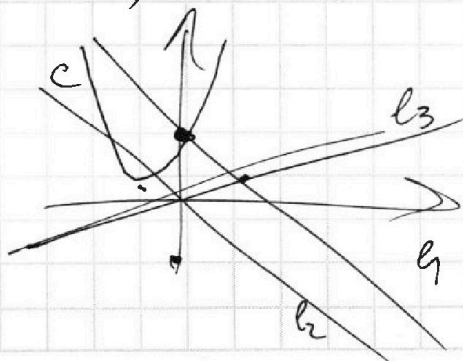
$$x = 4x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow a - \frac{1}{a} = 0 \Rightarrow \frac{a^2 - 1}{a} = 0 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$a - \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \quad a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$2) \quad x = 4y \Rightarrow y = \frac{x}{4}$$

$$\frac{x}{4} = (2a+1)x - a^2 + 1 \quad * \quad y = (2a+1)4y - a^2 + 1$$

$$= y(8a+3) = a^2 - 1 \Rightarrow y = \frac{a^2 - 1}{8a+3}$$



$$l_1 \cap l_2 = l_3 \cap l_4$$

$$l_3 \parallel l_4 \quad l_5 \nparallel l_6$$

$$l_3 \neq l_4$$

$$\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☒5
☒6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1\text{-ое ур-е} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 x^2 + x + 1 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases} ; \begin{cases} y^2 x^2 + x + 1 \\ x = -y \\ x = 4y \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

Поиск, что прямая $y^2 x^2 + x + 1$

имеет 1 точку касания с $y^2 x^2 + x + 1$ т.к.

$$x^2 + x + 1 = (2a+1)x - a^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$(x-a)^2 = 0 \Rightarrow x = a$$

Значит нужно еще решить 1 уравнение.

$$\text{Пусть } l_1: y = -x; \quad l_2: y = +\frac{x}{4} \\ l_2: y = -x + 1; \quad l_a: (2a+1)x - a^2 + 1 \quad | \quad C: y^2 x^2 + x + 1$$

Если $l_a \perp l_1$, то $l_a \perp l_2$ т.к. $l_1 \parallel l_2$. Значит, что

l_1 касается C . $\Rightarrow$ 2 решения ^{найдется} если $l_a \perp l_1$, $l_a \perp l_2$

и $l_a \perp C$ в т. касания l_1 и C ($x = -1$), но тогда

$$l_a = l_1 \Rightarrow \infty \text{ решений.}$$

$$\text{Значит } l_a \parallel l_1 \Rightarrow l_a \parallel l_2 \Rightarrow 2a+1 = -1 \Rightarrow a = -1.$$

Но тогда $1-a^2 = 0 \Rightarrow l_a = l_1 \Rightarrow \text{противоречие.}$

$$\text{Пусть } l_a \perp C$$

Ответ: Нет таких значений a .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь $l_a \cap C = \emptyset \Leftrightarrow l_a$ ~~не имеет~~ ^{нигде.} ~~нигде.~~

$$x^2 + x + 1 = (2a+1)x - a^2 + 1 \text{ не имеет корней}$$

$$x^2 + x(1-2a-1) + 1 + a^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = 0 \Rightarrow x = -a$$

$$(x-a)^2 = 0 \rightarrow \text{всегда есть решение} \Rightarrow \text{противоречие}$$

$$\Rightarrow l_a \cap C \neq \emptyset. \text{ А } \Rightarrow \text{противоречие.}$$

$$\text{II случай: } l_a \parallel l_1, l_2 \Leftrightarrow 2a+1 = -1 \Rightarrow a = -1$$

$$\text{и } l_a \neq l_1, l_a \neq l_2: \begin{cases} a^2 - 1 \neq 0 \\ a^2 - 1 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq \pm 1 \leftarrow \text{иначе совпад}$$

$$\frac{1}{5} = (2a+1) \sqrt{5-a^2+1}$$

$$1 = (2a+1) \sqrt{5-a^2+1}$$

$$8a+4-5a^2+5=1$$

$$8a-5a^2+8=0$$

$$5a^2-8a-8=0$$

$$D_1 = 16 + (5 \cdot 8) = 56$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{56}}{5}$$

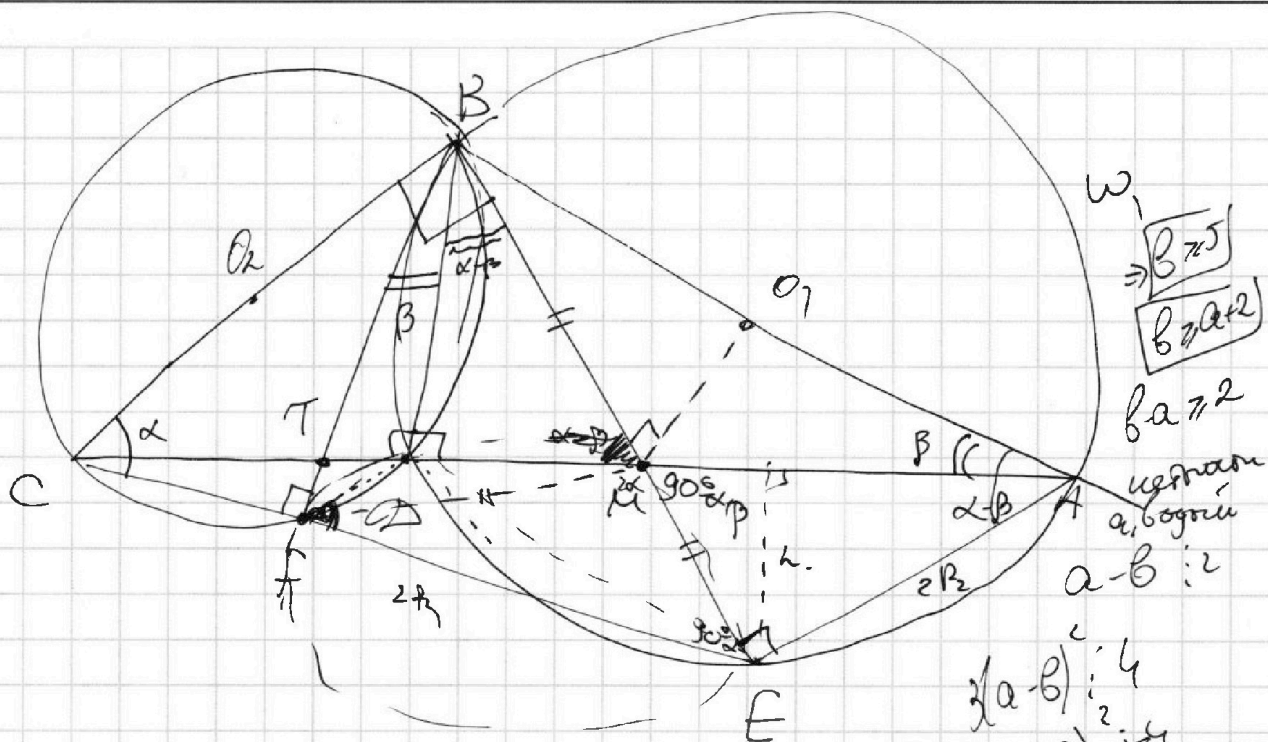


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



[illegible]



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4a = 3(a-b)^2 \\ 3b = [a, b] \end{cases} \quad 3 \leq a \leq b. \quad (a-b) : 3 \Rightarrow b$$

$$3b : a \quad a \Rightarrow \nu_3(a) = 2$$

$$4a : 3 \quad b = [a, b] \quad \Rightarrow \nu_3(b) = 1 + 2\nu_3(a-b) = 1 + 2\nu_3(b)$$

$$\Rightarrow \nu_3(3b) = 1 + \nu_3(b) \geq \nu_3(a) = 1 + 2\nu_3(b) \Rightarrow !!$$

$$\Rightarrow \nu_3(b) = 0 \quad b : 3 \Rightarrow \nu_3(a) = 1$$

$$a = 3\alpha, \alpha : 3. \quad b : a \quad \Rightarrow \min\{\nu_3 a, \nu_3 b\}$$

$$]b : a \Rightarrow \nu_3 b \geq \nu_3 a \Rightarrow \nu_3 a = 1 + 2\nu_3(a-b)$$

$$\Rightarrow 1 + 2\nu_3 a \Rightarrow 1 + \nu_3 a \leq 0 \Rightarrow !?$$

$$3b : a, b : a \Rightarrow 3 : a.$$

$$1) 3b : a, b : a, 3 : a \Rightarrow \nu_3 a = 1 + 2\nu_3(a-b) \quad \boxed{\text{um } a = 1}$$

$$\text{на } 1 \quad \textcircled{1} \nu_3 b < \nu_3 a \Rightarrow \nu_3 a = 1 + 2\nu_3 b = 1 + 2\nu_3 a - 2 = 2\nu_3 a - 1$$

$$\nu_3 b = \nu_3 a - 1 \quad \boxed{\nu_3 a = 1} \Rightarrow \nu_3 b = 0 \Rightarrow b : 3 \quad a : 3$$

$$4a = 3(a-b)^2 \quad a = 3\alpha, \alpha : 3 \quad \text{um } \alpha = 2$$

$$b^2 - 4a : 3 \quad 12\alpha^2 = 3(4\alpha^2 - 6\alpha b + b^2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① $y = x^2 + x + 1$
 $x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$
 $y = -x + 1$

② $y = (a+1)x - a^2x$
 $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{y}\right) + 4 = 0$
 $\left(\frac{x}{y} - 4\right)\left(\frac{x}{y} + 1\right) = 0$
 $\frac{x}{y} = 4$
 $x = 4y$
 $y = x$
 $\frac{-1}{2}$
 $x - x + 1$
 $-(1-a^2) \geq -1$
 ≤ 1
 $x = 0$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

3 прямые + парабола 2 реш.

$x^2 - 4x + (8-a) = x^2 - 4x + 4$
 $x^2 - px + 4$
 $x^2 + px + 4$

$y = kx$
 $x = \frac{y}{k}$
 $0, 400 \dots$
 $2, 4, \dots 402$
 $1, 2, \dots 207$
 $2, 4 \dots 502$

257



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \log_2 x = \log_2 y$$

$$\log_2 x^3 = \log_2 y \Rightarrow x^3 = y$$

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3(y-1)}{7(y+1)} = \frac{3(x^3-1)}{7(x^3+1)}$$

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{3}{7} \cdot \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} > 0 \quad | \cdot (x+1) \quad | : (x-1)$$

$$(x-1)(x^2-x+1)$$

$$7(x-1) - \frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x^2-x+1} > 0$$

$$\frac{7}{2}$$

$$7(x-1)(x^2-x+1) - 3(x-1)(x^2+x+1) <$$

$$= (x-1)(7x^2 - 7x + 7 - 3x^2 - 3x - 3) > 0$$

$$(x-1)(4x^2 - 10x + 4) > 0$$

$$(x-2)(x-\frac{1}{2})$$

$$(x-1)(2x^2 - 5x + 2) > 0$$

$$(x-\frac{1}{2})(x-2)$$

$$(x-1)(x-2)(x-\frac{1}{2}) > 0$$

$$x \in (\frac{1}{2}; 1) \cup (2; +\infty) \cap (-\infty; 37]$$

$$\Rightarrow x \in (\frac{1}{2}; 1) \cup (2; 37]$$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in [3; 37] \Leftrightarrow y = 3^{4+1} = 3^5 = 3 + 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4 \min\{a, b\} = 3(a-b)^2 \\ 3 \max\{a, b\} = [a, b] \end{cases}$$

$$1140000 \leq b,$$

$$\begin{cases} 4a = 3(a-b)^2 \\ 3b = [a, b] \end{cases}$$

$$[a, b] : 3b : b, :3$$

$$[a, b] \geq b \quad 3b : a, 3b : b$$

$$4a = 3(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$\begin{aligned} 1) & 3b : a \\ & \Rightarrow a = 3 \text{ или } 1 \end{aligned}$$

$$2) \quad \cancel{b : a} \quad [a, b] = b$$

$$3b^2 = 4a - 3a^2 + 6ab \Rightarrow 3b^2 : a$$

$$\cancel{3 : a} \rightarrow \cancel{b : a} \quad 3b : a$$

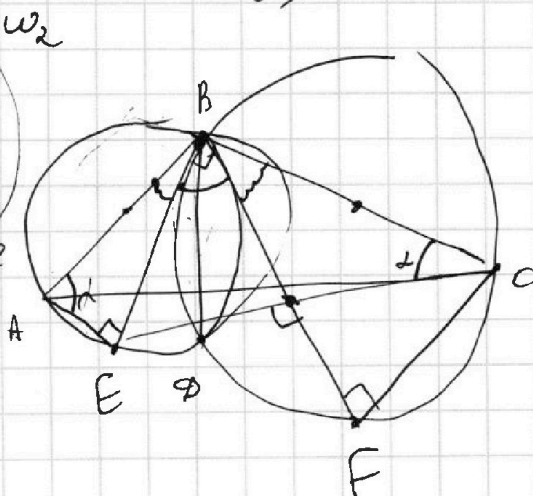
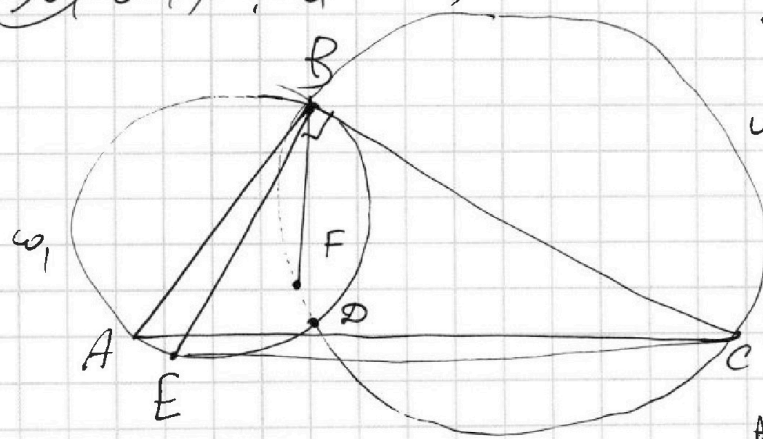
$$\begin{cases} 3b = k_1 a \\ 3b^2 = k_2 a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3b & \leq ab \\ 3 & \leq a \end{aligned}$$

$$3(b^2 - b) = (k_2 - k_1)a \quad 3b(b-1) = (k_2 - k_1)a$$

$$\cancel{3b(b-1) : a}$$

$$\cos \angle BCE = \frac{2}{x}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + px + q \quad \text{!} \quad \sum \text{корней } f = 0$$

$$f(x) = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 - px - q = 0 \quad \text{! не}$$

$$f(x) = -8 \Leftrightarrow x^2 + px + (q+8) = 0 \quad \text{! реш.$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$D = \begin{cases} p^2 + 4q = 0 \\ p^2 - 4(q+8) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 + 4q = 0 \\ p^2 - 4q - 32 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2 + 4q = 0 \\ p^2 - 4q = 32 \end{cases} \Rightarrow 2p^2 = 32 \Rightarrow p^2 = 16 \Rightarrow p = \pm 4$$

$$1) \underline{p = 4} \Rightarrow 4q = -16 \Rightarrow \underline{q = -4}$$

$$2) \underline{p = -4} \quad q = 4$$

$$D = 2^2 + 4 = 4 + 4 = 8$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0; f(x) = 2x^2 \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \quad x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$n = 2^{401} \cdot 3^{500} = xy : y : x \Rightarrow y = kx$$

$$\Rightarrow n = 2^{401} \cdot 3^{500} = kx^2$$

↑
целые степени

$$2: 0, 2, 4, \dots, 400;$$

$$3: 0, 2, \dots, 500$$

$$x^2 = 2^{401} \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow y = n \cdot 1$$

$$4x = 3 \cdot 2^{401} \cdot 3^{500} = 3 \cdot 2^{401} \cdot 3^{500}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4 \min(a, b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \cdot \max(a, b) = \text{НОК}(a, b) \end{cases} \quad (a, b) \in \mathbb{N}^2$$

Положим $a \leq b$.

$$9 - 5 = 4$$

$$\min\{a, b\} = a \quad \max\{b, a\} = b \quad b = 3 \pm 2$$

$$\begin{cases} 4a = 3(a-b)^2 \\ 3b = \text{НОК}(a, b) \end{cases} \Rightarrow 4a = 3(a^2 - 2ab + b^2) \quad (1)$$

$$[a, b] = k : k : a$$

$$k : b$$

$$(1) \quad 4a = 3a^2 - 6ab + 3b^2$$

$$\frac{3a^2}{12} - \frac{4a}{12} - \frac{6ab}{12} + \frac{3b^2}{12} \Rightarrow$$

$$\log_2 4 = 2$$

$$\log_4 4 = 1$$

$$a(3a-4) : b \quad 3 \cdot 5 = (5, 3) (x, y) \in \mathbb{Z} - ?$$

$$36 - 8 = 28$$

$$a : 3 \Rightarrow b : 3$$

$$\log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0 \quad \frac{4}{\log_2 xy} - \frac{4}{4 \log_2 xy}$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{3}{\log_2 y} + \frac{4}{\log_2 xy} = 0$$

$$\log_8 y = \frac{1}{3} \log_2 y \quad \frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} = \frac{16}{\log_2 xy} \quad \frac{16}{\log_2 xy} = 0$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} = \frac{16}{\log_2 xy} = \frac{16}{\log_2 x + \log_2 y} \quad \log_2 x = \alpha$$

$$\log_2 y = \beta$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{9}{\beta} = \frac{16}{\alpha + \beta} \quad \frac{\beta(\alpha + \beta) + 9\alpha(\alpha + \beta) - 16\alpha\beta}{\alpha\beta + \beta^2 + 9\alpha^2 + 9\alpha\beta - 16\alpha\beta} = 0$$

$$3\alpha^2 - 6\alpha\beta + \beta^2 = (3\alpha - \beta)^2 = 0 \Rightarrow 3\alpha = \beta$$