



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



✂ [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = -2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -6$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.

✂ [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?

✂ [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0, \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}, \\ y \leq 24. \end{cases}$$

✂ [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

✂ [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$.

6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 11$, $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $AQ = 2\sqrt{5}$, $CM = 4\sqrt{5}$, $CN = 5\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть $f(x) = x^2 + ax + b$

$$f(x) = -2x^2$$

$$x^2 + ax + b = -2x^2$$

$$3x^2 + ax + b = 0$$

$$D = a^2 - 12b = 0$$

$$a^2 = 12b$$

$$f(x) = -6$$

$$x^2 + ax + b = -6$$

$$x^2 + ax + b + 6 = 0$$

$$D = a^2 - 4(b+6) = a^2 - 4b - 24 = 0$$

$$\begin{cases} a^2 = 12b \\ a^2 = 4b + 24 \end{cases}$$

$$12b = 4b + 24$$

$$8b = 24$$

$$b = 3$$

$$a^2 = 12b = 12 \cdot 3 = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \pm 6.$$

1) $a = 6$: $x^2 + 6x + 3 = 0$

$$D = 36 - 12 = 24 > 0. \quad \cancel{D = 36 - 12 = 24}$$

По т. Виета:

$$\cancel{x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -3 \pm \sqrt{6}}$$

$$x_1 + x_2 = -6$$

2) $a = -6$: $x^2 - 6x + 3 = 0$

$$D = 36 - 12 = 24 > 0$$

По т. Виета:

$$x_1 + x_2 = 6$$

Ответ: 1) 6 2) -6



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$

$$n = xy, \text{ тогда } x = 5^k \cdot 7^r \text{ и } y = 5^{151-k} \cdot 7^{600-r},$$

т.к. число y xy есть точный делитель,
который не содержит n .

Т.к. $y : x$, то $151 - k \geq k$ и $600 - r \geq r$,
т.е. $k \leq 75,5$ и $r \leq 300$.

Т.к. $k, r \in \mathbb{N}$ или 0 , то $0 \leq k \leq 75$ и $0 \leq r \leq 300$

Тогда где k есть 76 вариантов, где
 $r - 301$ вариант. Т.е. всего вариантов

$$76 \cdot 301 = 22876.$$

Ответ: 22876



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-4xy + 10x - 10y + 4 < 0$$

$$x = 3^a = 3^{3b}, \quad y = 3^b \Rightarrow x = y^3$$

$$-4 \cdot y^4 + 10 \cdot y^3 - 10y + 4 < 0$$

$$4y^4 - 10y^3 + 10y - 4 > 0$$

$$4 \quad -10 \quad 10 \quad -4$$

$$1 \quad 4 \quad -6 \quad 4 \quad 0$$

$$(y-1)(4y^3 - 6y^2 + 4)$$

$$4 \quad -10 \quad 0 \quad 10 \quad -4$$

$$1 \quad 4 \quad -6 \quad -6 \quad 4 \quad 0$$

← правило Горнера

$$(y-1)(4y^3 - 6y^2 - 6y + 4) > 0$$

$$4 \quad -6 \quad -6 \quad 4$$

← правило Горнера

$$2 \quad 4 \quad 2 \quad -2 \quad 0$$

$$(y-1)(y-2)(4y^2 + 2y - 2) > 0 \quad | :2 > 0$$

$$(y-1)(y-2)(2y^2 + y - 1) > 0$$

$$2(y-1)(y-2)(y+1)(y-\frac{1}{2}) > 0$$

$$y \geq 2 \Rightarrow y-1 > 0; y+1 > 0; y-\frac{1}{2} > 0$$

$$y-2 > 0 \Leftrightarrow y > 2 \text{ и } y \leq 24 \text{ из (3)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Возможны все y от 3 до 24. А в нары идет $x = y^3$.

Ответ: 22



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 34

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\boxed{N3} \begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0 & (1) \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1} & (2) \\ y \leq 24 & (3) \end{cases}$$

огр: $x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1, xy \neq 1$

~~т.к. $x, y \in \mathbb{R}, \text{ то } xy \neq 1 \Rightarrow x \text{ и } y$~~
одновременно $\neq 1$.

$$(1): 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0$$

$$3 \log_x 3^3 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} (3^{-2}) = 0$$

$$9 \log_x 3 + \log_y 3 - 16 \log_{xy} 3 = 0$$

$$9 \cdot \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{16}{\log_3 xy}$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{16}{\log_3 x + \log_3 y}$$

Сделаем замену: $\log_3 x = a \neq 0$ Тогда
 $\log_3 y = b \neq 0$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{a+b}$$

Т.к. $x \geq 2$ и $y \geq 2$ из огр., то $\log_3 x > 0 \Rightarrow a > 0$
 $\log_3 y > 0 \Rightarrow b > 0$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{a+b}$$

$$\frac{9b+a}{ab} - \frac{16}{a+b} = 0; \quad \frac{9ab + a^2 + 9b^2 + ab - 16ab}{ab(a+b)} = 0;$$

$$a^2 + 9b^2 - 6ab = 0; \quad (a-3b)^2 = 0; \quad a = 3b.$$

$$\log_3 x = a \Rightarrow x = 3^a \Rightarrow x = (3b)^3 \Rightarrow x = 3^a = 27^b$$

$$\log_3 y = b \Rightarrow y = 3^b$$

Р.С. $ab(a+b) \neq 0$, т.к. $a, b > 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получим, что $x = 27b^3$ и $y = b^3$.

Подставим в (2):

$$\frac{3b^3+3}{b^3-1} < \frac{7 \cdot 27b^3+7}{27b^3-1}$$

$$\frac{3b^3+3}{b^3-1} - \frac{7 \cdot 27b^3+7}{27b^3-1} < 0$$

$$\frac{3 \cdot 27b^6 + 3 \cdot 27b^3 - 3b^3 - 3 - 7 \cdot 27b^6 - 7b^3 + 7 \cdot 27b^3 + 7}{(b^3-1)(27b^3-1)} < 0$$

$$\frac{-4 \cdot 27b^6 + 260b^3 + 4}{(b^3-1)(27b^3-1)} < 0 \quad | :4$$

$$\frac{-27b^6 + 65b^3 + 1}{(b^3-1)(27b^3-1)} < 0$$

Найдем корни числителя:

$$-27b^6 + 65b^3 + 1 = 0$$

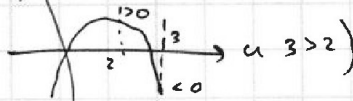
Здесь сделаем обратную замену: $(y = b^3)$

$$\frac{-27y^2 + 65y + 1}{(y-1)(27y-1)} < 0 \quad \text{при } 1 \leq y \leq 24 \text{ и } y \in \mathbb{Z}.$$

Тогда $(y-1) \geq 1 > 0$ и $27y-1 \geq 53 > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (y-1)(27y-1) > 0$. Тогда достаточно

решить $-27y^2 + 65y + 1 < 0$

Пусть $f(y) = -27y^2 + 65y + 1$ — парабола с вершиной
 вниз и $f(0) = 1 \Rightarrow y$ — корни. Также
 заметим, что $f(2) = -27 \cdot 4 + 65 \cdot 2 + 1 = 2(-54 + 65) + 1 > 0$
 и $f(3) = -27 \cdot 9 + 65 \cdot 3 + 1 = 3(-27 \cdot 3 + 65) + 1 < 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ при всех $y \geq 3$ $f(y) < 0$. (т.к.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☒☐☐☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $n=1: b=5$

(7; 5)

Тогда $a = 1 \cdot (5 \pm 2)$
 ~~$a = 3$~~
 ~~$a = 7$~~

$a = 1 \cdot (5 \pm 2)$

$a = 7 \quad (a > 0)$

$a = 3 \quad (a > 0)$

(3; 5) и (7; 5)

(3; 5) нег, т.к.
 $a \geq b$

2) $n=2: b=20$

(24; 20)

Тогда $a = 2 \cdot (10 \pm 2)$

$a = 24$

$a = 16$

(24; 20) и (16; 20)

↑
нег, т.к. $a > b$.

Также, поскольку упорядоченность a и b

не важна, то также подойдут пары

(5; 7) и (20; 24)

Ответ: (5, 7), (7, 5), (20; 24), (24; 20).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} 4. \min(a, b) = 5(a-b)^2 \\ 5. \max(a, b) = \text{НОК}(a, b) \end{cases}$$

Т.к. $(a-b)^2 = (b-a)^2$, то это выражение не зависит от упорядочивания a и b .

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(b, a) \Rightarrow \text{также не зависит.}$$

Таким образом можно сказать, что $a \geq b$.

$$\begin{cases} 4b = 5(a-b)^2 & (1) \\ 5a = \text{НОК}(a, b) & (2) \end{cases}$$

$$(1): 4b = 5a^2 + 5b^2 - 10ab$$

$$5a^2 - a \cdot 10b + 5b^2 - 4b = 0$$

$$D = 100b^2 - 4 \cdot 5 \cdot (5b^2 - 4b) =$$

$$= 100b^2 - 100b^2 + 80b = 80b = 16 \cdot 5b.$$

$$a_{1,2} = \frac{10b \pm 4\sqrt{5b}}{10} = b \pm \frac{2\sqrt{5b}}{5}$$

$$\text{Т.к. } a \in \mathbb{N}, \text{ то } \sqrt{5b} \in \mathbb{N} \Rightarrow b : 5.$$

$$\exists b = 5k \text{ при } k \in \mathbb{N}. \text{ Тогда}$$

$$a = 5k \pm \frac{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5k}}{5} = 5k \pm 2\sqrt{5k} \Rightarrow k - \text{квадрат мно.}$$

$$\exists b = 5n^2, \text{ тогда } a = 5n^2 \pm \frac{2 \cdot 5 \cdot n}{5} = 5n^2 \pm 2n = n(5n \pm 2) \quad (*)$$

$$\text{Т.к. } 5a = \text{НОК}(a, b), \text{ то при } a = 5^{\alpha_1} \cdot p_1^{\alpha_2} \cdot p_2^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}, p_i \neq 5.$$

$$b = 5^{\beta_1} \cdot p_1^{\beta_2} \cdot p_2^{\beta_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}, p_i \neq 5 \text{ и } \beta_i \leq \alpha_i, \text{ но не все } \alpha_i = \beta_i. \text{ Тогда если } b = 5n^2, \text{ то } a = n^2 \cdot c \text{ где}$$

$$(c, 5) = 1. \text{ Вернемся к } (*):$$

$$n^2 c = n(5n \pm 2)$$

$$nc = 5n \pm 2 \Rightarrow 2 : n \Rightarrow n = 1 \text{ или } n = 2.$$

Т.к. $\triangle EBC$ прямоугольный и BF — высота в нём, то $BF^2 = EF \cdot FC \Rightarrow EF = \frac{BF^2}{FC} = \frac{7x^2}{3x} = \frac{7x}{3}$, тогда $EC = \frac{16x}{3}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{в } \triangle EMC: \frac{\sin \angle EMC}{\sin \angle ECM} = \frac{EC}{EM} \quad (*)$$

$$\text{в } \triangle BMC: \frac{\sin(180^\circ - \angle EMC)}{\sin \angle MCB} = \frac{BC}{BM} \quad (**)$$

$$\frac{(*)}{(**)} = \frac{\sin \angle MCB}{\sin \angle ECM} = \frac{EC \cdot BM}{EM \cdot BC}$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin(2-\varphi)} = \frac{EC}{BC} \quad (BM = EM)$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin(2-\varphi)} = \frac{16 \times \frac{3}{4}}{4 \times} = \frac{4 \times}{3}$$

$$3 \sin \varphi = 4 (\sin 2 \cos \varphi - \sin \varphi \cos 2)$$

$$3 \sin \varphi = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \cdot \frac{3}{4}$$

$$3 \sin \varphi = \sqrt{3} \cos \varphi - \frac{3}{4} \sin \varphi$$

$$12 \sin \varphi = 4 \sqrt{3} \cos \varphi - 3 \sin \varphi$$

$$15 \sin \varphi = 4 \sqrt{3} \cos \varphi$$

$$3 \sin \varphi = a, \text{ тогда } \cos \varphi = \sqrt{1-a^2}$$

$$15a = 4 \sqrt{3} \cdot \sqrt{1-a^2} \quad |^2 \quad (15a > 0) \quad (a > 0)$$

$$225a^2 = 112 \cdot (1-a^2); \quad 337a^2 = 112 \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{112}}{\sqrt{337}},$$

$$113a^2 = 112$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{112}}{\sqrt{113}}, \text{ но } a > 0 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{112}}{\sqrt{113}} \Rightarrow a = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{337}}$$

$$\text{Итак, } \sin \varphi = \frac{\sqrt{112}}{\sqrt{113}} = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{337}}$$

$$\text{в } \triangle BPC: \sin \varphi = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BD = BC \sin \varphi$$

$$= 4 \times \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{337}} = \frac{16\sqrt{7} \times}{\sqrt{337}} \quad \text{Тогда}$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{x \sqrt{7} \cdot \sqrt{113}}{16\sqrt{7} \times} = \frac{\sqrt{113}}{16} \quad \sin \varphi = \frac{4\sqrt{7}}{337}, \text{ тогда } \frac{BD}{BC} = \sin \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD = BC \cdot \sin \varphi = 4 \times \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{337}} = \frac{16\sqrt{7} \times}{\sqrt{337}}$$

$$\text{Тогда } \frac{BF}{BD} = \frac{x \sqrt{2} \cdot \sqrt{332}}{16\sqrt{7} \times} = \frac{\sqrt{332}}{16}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{332}}{16}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{4}{3}$$

3

$$3(\sin \alpha \cos \varphi - \sin \varphi \cos \alpha) = 4 \sin \varphi$$

$$3 \sin \alpha \cos \varphi - 3 \sin \varphi \cos \alpha = 4 \sin \varphi$$

$$\frac{3\sqrt{7}}{4} \cos \varphi - 3 \sin \varphi \cdot \frac{3}{4} = 4 \sin \varphi$$

$$\frac{3\sqrt{7}}{4} \cos \varphi - \frac{9 \sin \varphi}{4} = 4 \sin \varphi$$

$$3\sqrt{7} \cos \varphi - 9 \sin \varphi = 16 \sin \varphi$$

$$3\sqrt{7} \cos \varphi - 25 \sin \varphi = 0$$

$$\left(\frac{3\sqrt{7}}{a}\right)^2 + \left(\frac{25}{a}\right)^2 = 1$$

$$\frac{15}{\sqrt{337}} \sin \varphi - \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{337}} \cos \varphi = 0$$

$$\cos \varphi = \frac{15}{\sqrt{337}}, \sin \varphi = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{337}}$$

$$\cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$\sin(\varphi - \varphi) = 0$$

$$\varphi - \varphi = nk, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos \frac{15}{\sqrt{337}} + nk = \varphi$$

$$\sin \varphi =$$

sin

$$\sin \varphi = a$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1-a^2}$$

$$15a = 4\sqrt{7}\sqrt{1-a^2}$$

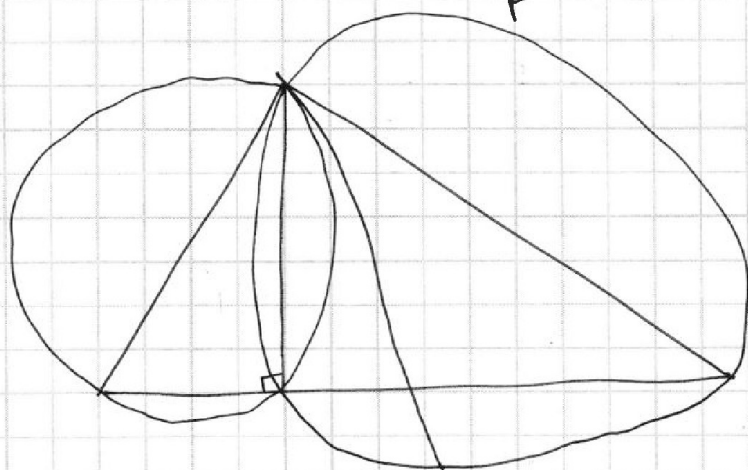
$$225a^2 = 112(1-a^2)$$

$$225a^2 = 112 - 112a^2$$

$$112 = 4 \cdot 28 = 112$$

$$337a^2 = 112$$

$$a =$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{3y+3}{y-1} - \frac{7x+2}{x-1} > 0$$

$$3xy + 3x - 3y - 3 - 7xy - 7y + 7x + 2y =$$

$$= -4xy + 10x - 10y + 4$$

$$x = 3^a = 3^{3b} = y^3$$

$$y = 3^b$$

$$(xy)^3$$

$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2$$

$$2y^3$$

$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2$$

$$16 - 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 2$$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$$

$$2(y+1)(y-\frac{1}{2})$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} 4. \min(a, b) = 5(a-b)^2 \\ 5. \max(a, b) = \text{НОК}(a, b) \end{cases}$$

НОК и $(a-b)^2$ не равны, следовательно $a \neq b$

] $a \geq b$:

$$\begin{cases} 4. b = 5(a-b)^2 \\ 5. a = \text{НОК}(a, b) \end{cases}$$

$$5a : a \text{ и } 5a : b$$

$$\text{НОК}(a, b) = 5a$$

$$4b = 5a^2 + 5b^2 - 10ab$$

$$5a^2 - 10ab + 5b^2 - 4b = 0$$

$$D = 100b^2 - 20b^2 + 16b$$

$$5a^2 - 10b \cdot a + (5b^2 - 4b) = 0$$

$$D = 100b^2 - 20(5b^2 - 4b) =$$

$$= 80b$$

$$80 = 16 \cdot 5$$

$$a_{1,2} = \frac{10b \pm \sqrt{80b}}{10}$$

$$\frac{16 \pm 4\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{НОК}(a, b) = a \cdot c$$

$$c = 5$$

$$\text{НОК}(a, b) = 5a \text{ и } a \geq b. \text{ тогда } \neq.$$

$$a > b$$

$$5a : b$$

$$5a = bc$$

$$\text{НОК}(a, b) = 5a$$

$$a \cdot 5 = b \cdot c$$

НОК - б. из a и б. из b , то a и b .

$$\text{НОК}(a, b) \geq a$$

$$4. 20a$$

$$4b = 5a^2 + 5b^2 - 10ab$$

$$5b^2 - b(4 + 10a) + 5a^2 = 0$$

$$D = 16 + 100a^2 + 80a - 100a^2 = 16 + 80a =$$

$$= 16 + 80a$$

$$x + 80a + (16 - x) \cdot x = 16$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 5^{151} \cdot 7^{600}$$

$$x = 5^k \cdot 7^r$$

$$y = x^{151-k} \cdot 7^{600-r}$$

$$\log_{xy} \frac{1}{9} = -2 \log_{xy} 3 \quad 151 - k \geq k \quad 151 \geq 2k \quad k \leq 75, \text{ т.е. } k \in \mathbb{Z}$$

$$600 - r \geq r \quad r \leq 300$$

$$k = \{1, 2, \dots, 75\}$$

$$r = \{1, 2, \dots, 300\}$$

$$75 \cdot 300 = 22500$$

$$\begin{aligned} 76 \cdot 301 &= \begin{array}{r} 206 \\ \times 301 \\ \hline 206 \\ 21180 \\ \hline 21876 \end{array} \\ &= (75+1)(300+1) = \\ &= 22500 + 75 + 300 + 1 = \\ &= 22800 + 76 = 22876 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0 \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1} \\ y \leq 24 \end{cases}$$

$$x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1, xy = 1$$

$$8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 8 \log_{xy} \cdot 3^{-2} = -16 \log_{xy} 3 \quad \begin{array}{r} 276 \\ \times 301 \\ \hline 1806 \\ 21040 \\ \hline 21176 \end{array}$$

$$3 \log_x 27 + \log_y 3 = 16 \log_{xy} 3$$

$$\log_{xy} 3 = \frac{1}{\log_3 xy} = \frac{1}{\log_3 x + \log_3 y} \quad \log_{xy} 3 = \frac{\log_x 3}{\log_x xy} = \frac{\log_x 3}{\log_x x + \log_x y} = \frac{\log_x 3}{1 + \log_x y}$$

$$\begin{aligned} 9 \log_x 3 + \log_y 3 &= -16 \cdot \frac{1}{\log_3 x + \log_3 y} = 0 \\ \begin{cases} \log_x 3 = a \\ \log_y 3 = b \end{cases} & \quad \begin{cases} x^a = 3 \\ y^b = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt[3]{3} \\ y = \sqrt[3]{3} \end{cases} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = \cancel{ax^2} x^2 + \cancel{ax} + b$$

$$x^2 + ax + b = -2x^2$$

$$3x^2 + ax + b = 0$$

$$\rightarrow D = a^2 - 12b = 0$$

$$a^2 = 12b$$

$$x^2 + ax + b = -6$$

$$x^2 + ax + b + 6 = 0$$

$$D = a^2 - 4(b+6) = 0$$

$$\begin{cases} a^2 = 12b \\ a^2 = 4b + 24 \end{cases}$$

$$12b = 4b + 24$$

$$8b = 24$$

$$b = 3$$

$$a^2 = 12b$$

$$a = \pm 6$$

$$x^2 + 6x + 3 = 0$$

$$D = 36 - 12 = 24$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -3 \pm \sqrt{6}$$

$$-3 - \sqrt{6} + (-3 + \sqrt{6}) = -6$$

$$x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$D = 36 - 12 = 24$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 3 \pm \sqrt{6}$$

$$\text{mod } 6$$

$$x^2 + 6x + 3 = -2x^2$$

$$3x^2 + 6x + 3 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x^2 + 6x + 3 = -6$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(x+3)^2 = 0$$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x^2 - 6x + 3 = -6$$

$$(x-3)^2 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{a+b}$$

$$\frac{9b+a}{ab} = \frac{16}{a+b}$$

$$\frac{9ab + a^2 + 9b^2 + ab}{ab(a+b)} = \frac{16ab}{ab(a+b)}$$

$$10ab + a^2 + 9b^2 = 16ab$$

$$a^2 - 6ab + 9b^2 = 0$$

$$(a-3b)^2 = 0$$

$$a = 3b$$

$$y \geq 2$$

$$b^3 \geq 2$$

$$b \geq \sqrt[3]{2}$$

$$\begin{array}{r} \times 27 \\ 7 \end{array}$$

$$81b^3 - 3b^3 - 2b^3 = 77b^3$$

$$10.27b^3 = 77b^3$$

$$27b^3 - 10b^3 = 26b^3$$

4333

$$b_{1,2} = \frac{-65 \pm \sqrt{4333}}{54}$$

$$-65 \pm \sqrt{4333}$$

$$b_1 = \frac{65 + \sqrt{4333}}{54}$$

$$b_2 = \frac{\sqrt{4333} - 65}{54}$$



$$-27y^2 + 65y^2 + 1$$

$$y_{1,2} = \frac{65 \pm \sqrt{4333}}{54} \geq 2$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{4333} - 65}{54}$$

$$\frac{\sqrt{4333} - 65}{54} \leq 24$$

$$\sqrt{4333} \leq 54 \cdot 24 + 65$$

$$\sqrt{4333} \geq 168 - 65$$

$$\sqrt{4333} \geq 103 \quad \text{Ⓢ}$$

$$-27 \cdot 3 + 65 \cdot 3 + 1 =$$

$$= -81 \cdot 3 + 65 \cdot 3 + 1 =$$

$$= 3 \cdot (-16) + 1 < 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y \leq 24$$

$$\sqrt[3]{y} \leq 24$$

$$3 \leq 24^b$$

$$\log_{24} 3 \leq b$$

$$\frac{3 \cdot \sqrt[3]{y} + 3}{\sqrt[3]{y} - 1} < \frac{7 \sqrt[3]{y} + 7}{\sqrt[3]{y} - 1}$$

$$\frac{3(b^3 + 1)}{b^3 - 1} = \frac{7(b^3 + 1)}{b^3 - 1}$$

$$\frac{3(\sqrt[3]{y} + 1)}{\sqrt[3]{y} - 1}$$

$$\log_3 x = a$$

$$\log_3 y = b$$

$$x = a^3$$

$$y = b^3$$

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{a+b}$$

$$\frac{3 \cdot b^3 + 3}{b^3 - 1} < \frac{7a^3 + 7}{a^3 - 1}$$

$$-4ts + 4 + 10t - 10s =$$

$$= (4 - 10s) + t(-4s + 10)$$

$$y \leq 24$$

$$b^3 \leq 24$$

$$b \leq \sqrt[3]{24}$$

$$-27 \cdot 64 \cdot 3^2 + 65 \cdot 8 \cdot 3 + 11 =$$

$$= -27 \cdot 64 \cdot 9 + 65 \cdot 24 + 11 =$$

$$b^3 \leq 24$$

$$b \leq \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$$

$$\frac{3b^3 + 3}{b^3 - 1} - \frac{7a^3 + 7}{a^3 - 1} < 0$$

$$3a^3b^3 + 3a^3 - 3b^3 - 3 - (7a^3b^3 + 7b^3 - 7a^3 - 7) < 0$$

$$\frac{3a^3b^3 + 3a^3 - 3b^3 - 3 - 7a^3b^3 - 7b^3 + 7a^3 + 7}{(a^3 - 1)(b^3 - 1)} < 0$$

$$\frac{-4a^3b^3 + 10a^3 - 10b^3 + 4}{(a^3 - 1)(b^3 - 1)} < 0$$

$$a^3 = t$$

$$b^3 = s$$

$$\frac{-4ts + 4 + 10t - 10s}{(t - 1)(s - 1)} < 0$$

$$a \cdot b$$

$$\begin{array}{r} \times 65 \\ 65 \\ 325 \\ 3900 \\ 4225 \end{array}$$

$$D = 65^2 - 4 \cdot 27$$

$$4225 - 108 =$$

$$= 4117$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{BF}{BD} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \varphi)}$$

$$\frac{BF}{BD} = 4x$$

$$BF = 4x\sqrt{7}$$

$$\sin(\alpha - \varphi) = \frac{ED}{2R_1}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \frac{AC}{2R_2}$$

$$EF \cdot FC = BF^2$$

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

$$b = 5 \cdot p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$$

$$p_i < d_i$$

$$5a = \text{НОК}(a, b)$$

$$a = n^2 c$$

$$n^2 c = n(5n \pm 2)$$

$$nc = 5n \pm 2$$

$$b = n^2$$

$$a = n^2 \cdot c, (c, 5) = 1$$

$$10b \vee 4\sqrt{5}b$$

$$100b^2 \vee 80b$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sin \alpha = \frac{4 \sin 11}{3}$

$\sin 11 = \frac{4 \sin 11}{3}$

$16x^2 + \frac{16 \cdot 7x^2}{3} = \frac{256x^2}{9}$

$9 \cdot 16x^2 + 21 \cdot 16x^2 = 16 \cdot 16x^2$

$\frac{256x^2}{9} - 16x^2 =$

$= \frac{7 \cdot 16x^2}{9}$

$4 \sqrt{3}x$

$\frac{\sin 11}{\sin 11} = \frac{1}{1} \cdot \frac{EC}{BC} = \frac{16 \cdot \frac{7}{3}}{4x} = \frac{4}{3}$

$3 \sin 11 = 4 \sin 11$

$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{4 \sqrt{3}x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{4x}{3AB} = \frac{1}{4}$

$AB = \frac{16x}{3}$

$AB \parallel EC$

$AB = EC$

$\angle EBC = 90^\circ$

$\frac{4x}{EC} = \frac{3}{4}$

$EC = \frac{16x}{3}$

$7x^2 + \frac{4 \cdot 2x^2}{9} =$

$= \frac{63x^2 + 40x^2}{9} = \frac{103x^2}{9}$

$112 = 4 \cdot 28^2 = 16 \cdot 7$

$7x^2 = a \cdot (7x/3 - a)$

$7x^2 = a \cdot \frac{7x}{3} - a^2$

$21x^2 = 7xa - 3a^2$

$3a^2 - 7xa + 21x^2 = 0$

$D = 49x^2 - 4 \cdot 3 \cdot 21x^2 < 0$

$BE = x \sqrt{\frac{112}{9}} =$

$= x \cdot \frac{4}{3} \sqrt{7} = \frac{4\sqrt{7}x}{3}$

$\triangle BEC$

$\sin \varphi = \frac{EC}{BC}$

$\sin 60^\circ = \frac{EC}{BC}$

$\frac{7x}{3}$

$\frac{4x}{EC} = \frac{3}{4}$

$EC = \frac{16x}{3}$

$7x^2 + \frac{4 \cdot 2x^2}{9} =$

$= \frac{63x^2 + 40x^2}{9} = \frac{103x^2}{9}$

$112 = 4 \cdot 28^2 = 16 \cdot 7$