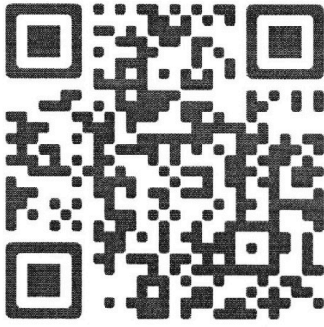




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 1, а  $y$  — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 3xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася высчитали, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{15}{2}$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 9$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☒

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

и ~~то~~ 2 в пятой степени

получили единственную тройку чисел:  
(6666', 202', 33')

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 11 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2$$

Ответ: (6666', 202', 33')



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Число  $a$ , т.к. представлено в виде  $\overline{aaaa}$ , где  $a \in \mathbb{N}$  и  $a \in \{1; 93\}$ , то  $A$  делится нацело на 1111 и представимо в виде:  $A = 1111 \cdot a$

$1111 = 101 \cdot 11$ , где 101 и 11 - простые числа, значит произведение  $A \cdot B \cdot C$  делится нацело на 101 и 11

$A \cdot B \cdot C = n^2$  (где  $n \in \mathbb{N}$ )  $\Rightarrow n^2 : 101 \Rightarrow n : 101 \Rightarrow n^2 : 101^2$ , аналогично  $n^2 : 11$ , а значит т.к.  $a$  не может делиться нацело ни на 11 ни на 101, значит число  $B$  или  $C$  должно делиться нацело на 101 и 11 (чтобы степень вхождения этих чисел в число была чётной).

Заметим что  $C$  - <sup>двузначное</sup> число, а значит оно не может делиться нацело на 101, значит на 101 делится число  $B$ , а значит  $B = \{101; 202; 303; 404; 505; 606; 707; 808; 909\}$ . Как мы видим, единственный вариант числа, которое содержит 2, где число  $B$  - это 202. 202 не делится нацело на 11, а значит  $C$  делится нацело на 11. Т.к. и число  $C$  должно содержать цифру 3, то единственным вариантом для числа  $C$  является число 33; а значит:

$$ABC = 1111 \cdot a \cdot 33 \cdot 202 = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 11 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 2 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a = n^2.$$

В <sup>разложении</sup> квадрата числа на простые множители, каждый множитель должен входить в чётной степени, а значит  $a$  должно делиться на 3 и на 2, а т.к.  $a \in \{1; 93\}$ , то единственный вариант для  $a$  -  $3 \cdot 2 = 6$  (в разложении числа  $a$  должно входить 3 в нечётной степени)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \quad (\text{перенесём всё в одну сторону})$$

$$\frac{x-1-x}{x(x-1)} + \frac{y+1-y}{(y+1)y} + \frac{2(x-1)(y+1)-2xy}{xy(x-1)(y+1)} = 0.$$

$$-\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(y+1)y} + \frac{x(x-y-1)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$-\frac{y(y+1) + x(x-1) + 2(x-y-1)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$-\frac{y^2 - y + x^2 - x + 2(xy - 1)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$-\frac{(y+x) + (x-y)(x+y) + 2(x-y-1)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$\frac{(x+y)(x-y-1) + 2(x-y-1)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$\frac{(x-y-1)(x+y+2)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

ОДЗ:  $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$  (по условию всегда выполняется т.к.  $x > 0$ )  
 $\begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq -1 \end{cases}$  (по условию всегда выполняется т.к.  $y > 0$ )  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$   $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq -1 \end{cases}$  (по улов.)

$x \neq 1$  на ОДЗ верно:  $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$

т.к.  $x, y > 0$ , то  $x+y+2 > 0$ , значит  $(x-y-1) = 0$ .

$x = y + 1$  (очевидно, что можно найти такие  $x$  и  $y$ , чтобы они удовлетворяли ОДЗ).





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☒

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

Ответ:  $M=1$ . Данное значение  $M$  достигнимо, например при  $y=3, x=4$ .

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{12} \quad (\text{условие на К.В.М.})$$

$$4^3 - 3^3 - 3 \cdot 4 \cdot 3 = 64 - 27 - 36 = 1$$

Ответ:  $M=1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

случае, когда  $\arcsin \frac{x}{5}$  и  $\arccos \frac{y}{4}$  принимают свои максимальные значения, только тогда их сумма становится равной  $\frac{3\pi}{2}$ , во всех остальных случаях, она меньше этого значения. Найдем  $x$  и  $y$ , при которых достигается данное равенство:

$$\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{5} = 1 \Rightarrow x = 5$$

$$\arccos \frac{y}{4} = \pi \Rightarrow \frac{y}{4} = -1 \Rightarrow y = -4.$$

Значит под данное неравенство нам подойдут все значения из  $\mathbb{Q}$  для  $x$  и  $y$ , кроме  $x = 5$  и  $y = -4$ .

Нам подойдут значения:  $x \in [-5; 5)$   
 $y \in (-4; 4]$

из пункта а найдем все подходящие пары целых чисел.

~~$x = 4; x = -4:$~~  
$$\begin{cases} y = 1 + (-12) + 2k \\ y = -4 - 1 - 2k \end{cases}$$
 Тогда для  $y =$   $\begin{cases} y = 13 \\ y = -1 \\ y = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

~~$x = -3:$~~  
$$\begin{cases} y = 7 - 9 + 2k \\ y = -3 - 1 - 2k \end{cases}$$
 значение для  $y:$   $\begin{cases} y = 13 \\ y = -1 \\ y = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

Заметим, что при целых значениях  $x$ , серии решений для  $y$  одинаковы в обоих случаях для одного определенного значения  $x$ :

$y = 1 + 3x + 2k$  - задаёт все целые значения  $y \equiv 3x + 1$

$y = x - 1 - 2k$  - задаёт все целые значения  $y \equiv x - 1$ ,

а т.к.  $3x + 1 \equiv x - 1$ , то данные серии



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a) \sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x &= \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x - \sin \pi y \sin \pi x &= 0 \\ \cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y) &= 0. \end{aligned}$$

По формуле суммы косинусов:

$$2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right) = 0 \quad (\text{равенство совокупности});$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

(сократим на  $\frac{\pi}{2}$ )

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 + 2k \\ x - y = 1 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + 3x + 2k \\ y = x - 1 - 2k \end{cases}$$

а) Ответ:  $(x, 1 + 3x + 2k)^*$ ,  $(x, x - 1 - 2k)$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$б) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}.$$

$$0 \leq 3: \begin{cases} \frac{x}{5} \geq -1 \\ \frac{x}{5} \leq 1 \\ \frac{y}{4} \geq -1 \\ \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 5 \\ y \geq -4 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

По определению:  $(\arcsin \frac{x}{5}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

$(\arccos \frac{y}{4}) \in [0, \pi]$ .

Значит их сумма:  $(\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

Мы видим, что при всех значениях, кроме одного выполняется исходное неравенство. Неравенство не выполняется только в единицу.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

решений для  $y$  при одних и тех же  $x$  совпадают. Пусть при  $x$  нужно найти  $n$ -во целых значений  $y$ ; при определенном значении  $x$ , нужно посчитать  $n$ -во целых  $y \in x-1$  и которые лежат в промежутке  $(-4, 4]$ .

Три четных значения  $x$ :

$y \equiv 1$ , таких значений <sup>в промежутке</sup> для каждого четного  $x$   $y$  нас 4.

Три нечетных значения  $x$ :

$y \equiv 0$ , таких значений <sup>из промежутка  $(-4, 4]$</sup>  для каждого нечет.  $x$   $y$  нас 4.

Четных значений  $x$  в промежутке  $[-5; 5]$ : 5

Нечетных значений  $x$  в промежутке  $[-5; 5]$ : 5

Значит всего целых пар решений равно:

$$5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 40$$

Ответ: 40.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☒

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 - y - 30 = 0$$

$$D = 1 + 120 = 121 \quad y_1 = \frac{1-11}{2} = -5 \text{ (не удов. условию)}$$

$$y_2 = \frac{1+11}{2} = 6$$

Ответ: 6 билетов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть одна из двадцати массовых -  $x$  чел., а билетов в конце месяца было выделено  $y$  ( $y > 4$ ), причём можно считать, что  $y \leq x$ , иначе

Рассчитаем вероятность Васе и Теме вместе попасть на концерт в начале в конце месяца

① в начале:

Всего исходов  $x$  способов, сколько способов выбрать 4-ех людей из  $x$ , то есть:  $C_x^4$

Всего исходов, в которых Теме и Васе вместе идут на концерт: Мы уже знаем, что конкретные двое человек идут на концерт, значит нам останется выбрать две другие пары,  $(x-2)$  оставшихся, которые пойдут вместе с ними на концерт, а способов это сделать:  $C_{x-2}^2$

$$P_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)! \cdot 4! \cdot (x-4)!}{2! \cdot (x-4)! \cdot x!} = \frac{12}{x(x-1)}$$

② в конце месяца.

Аналогично п.1, всего исходов  $C_x^4$

Исходов с Васей и Темой: Мы так же можем выбрать к ним двоим ещё  $(y-2)$  человека из  $(x-2)$  оставшихся  $C_{x-2}^{y-2}$

$$P_2 = \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^4} = \frac{y \cdot (y-1)}{x \cdot (x-1)}$$

По условию:

$$\frac{12}{x(x-1)} \cdot 2,5 = \frac{y(y-1)}{x(x-1)} \quad (т.к.  $x \geq 4$ , то можно записать):$$

$$30 = y(y-1)$$



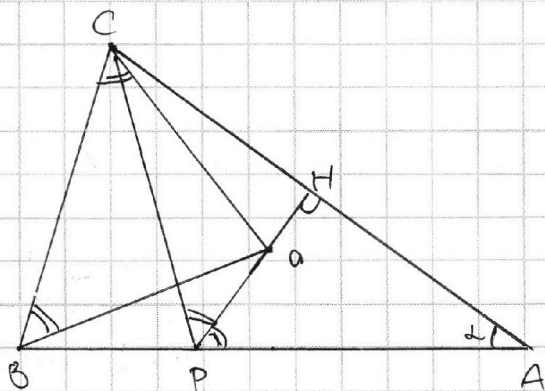
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $\angle A = 2$ , тогда

$\angle COB = 2$ , т.к. является центральным и опирается на ту же дугу, что и угол  $A$  вне окружности  $(ABC)$ .

$CO = OB$  (как радиусы)  $\Rightarrow \triangle COB$  - равнобедренный

$$\Rightarrow \angle OCB = \angle CBO = (180 - 2) \cdot \frac{1}{2} = 90 - 2$$

$\angle CBO = \angle CPO$  (т.к.  $\angle$  при  $CO$  и  $PO$  - впис. и опираются на одну и ту же дугу)

$$\angle BPO = 180^\circ - \angle BCO \text{ (из вписанности } COB) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle OPA = 180 - \angle BPO = \angle BCO = 90 - 2 \Rightarrow \angle CPO = \angle CPA$$

продлим  $PO$  до пересечения с  $CA$  в т.  $H$ .

$$\angle PHA = 90^\circ = 180^\circ - \angle HPA - \angle HAP = 180 - 2 - 90 + 2 =$$

$$= 90. \text{ В } \triangle PHA \text{ бис-са совпадает с}$$

высотой, а значит  $\triangle CPA$  -  $prb \Rightarrow$

$$\Rightarrow CH = HA = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\text{По т. Пифагора: } HP = \sqrt{AP^2 - HA^2} = \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{81}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{144}{4}} = \frac{12}{2} = 6.$$

$$\sin \alpha = \frac{PH}{AP} = \frac{6 \cdot 2}{15} = \frac{12}{15}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BA \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 15 \cdot \frac{12}{15} = 45$$

Ответ: 45



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

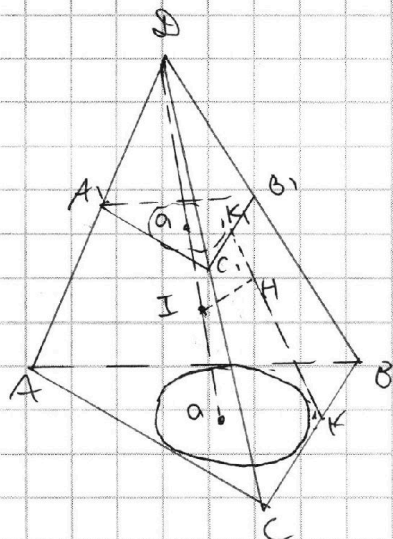
5  
☐

6  
☐

7  
☒

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$  - впис. по  
услов.

Точка  $I$  - центр сферы  $\omega$ .

т.  $H$  - проекция  $I$  на  $BC$ ,  $B$

проверим через  $H$  - вос-  
сому трапеции  $K_1K$

1





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$3. (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x =$$

$$\sin \alpha \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi + y}{2} \quad \beta = \frac{\pi - y}{2}$$

$$2 \sin \frac{\pi + y}{2} \cos \frac{\pi - y}{2} = \sin \pi x + \sin \pi y$$

$$2 \sin \frac{\pi(\pi + y)}{2} \cos \frac{\pi(\pi - y)}{2} \sin \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \frac{\pi}{2} x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\cos 2\pi x + \cos \pi(\pi + y) = 0$$

$$\cos \pi x + \cos \pi y = 2 \cos \frac{\pi + y}{2} \cos \frac{\pi - y}{2}$$

$$2 \sin \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} +$$

$$+ \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$$

$$2 \cos \pi(2\pi + y) \cos$$

$$2 \cos(\frac{3}{2}\pi + \frac{y}{2}) \cos(\frac{\pi}{2}\pi - \frac{y}{2})$$

$$2 \cos$$

$$\frac{2\pi x + \pi x + \pi y}{2} \sin(\frac{3}{2}\pi + \frac{y}{2})$$

$$\cos 0 + \cos 30 = 2 \cos 45 \cos$$

$$0 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2 \cos 60 + \cos 30 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 0 + \cos 60 = 2 \cdot \cos 30 + \cos 30 =$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 \_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновики

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$0 \leq 3: \frac{x}{5} \in \left( \frac{x}{5} \leq 1 \right) \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -5 \\ y \geq -4 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{5} \leq 1 \Rightarrow x \leq 5$$

$$\frac{y}{4} \leq -1 \Rightarrow y \leq -4$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -5 \\ y \end{cases}$$

$$x: 1+3x+2x$$

$$x: x-1-2x$$

$$-11+2x$$

$$-11-9-7-5-3-113$$

$$-3-3$$

$$k = x + 1 + k$$

$$k =$$

$$x-1-2x$$

$$1+3+2x2$$

$$x+2x$$

$$-2x$$

$$1+3x+2x \equiv 1+x$$

$$-5-3-113$$

$$-8$$

$$1+3x+2x$$

$$-4$$

$$x-1-2x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 \_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$2) \quad x, y > 0 \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \quad M = x^3 - y^3 - 3xy.$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(y+1)} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x-1-x}{x(x-1)} + \frac{y^2-1-y}{(y+1)y} + \frac{2(x-1)(y+1)-2xy}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$-\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(y+1)y} + \frac{2xy - 2y + 2x - 2 - 2xy}{xy(x-1)(y+1)} = 0.$$

$$\frac{2x - 2y - 2}{x(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{-y^2 - y + x^2 - x}{x(x-1)(y+1)y} = \frac{(x-y)(x+y-1)}{x(x-1)(y+1)y} = \frac{(x+y)(x-y-1)}{x(x-1)(y+1)y}$$

$$\frac{(x+y)(x-y-1)}{x(x-1)(y+1)y} + \frac{2(x-y-1)}{x(x-1)(y+1)y} = 0$$

$$(x-y-1)(x+y+2) = 0$$

$$0 \oplus 3: x \neq 1, y \neq -1, y \neq 0, x \neq 0.$$

$$x = y+1 \vee x = -2-y \Rightarrow 2(y+1) - (y+2)$$

$$\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y(y+1)} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{y}$$

$$\frac{1}{-2-y} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y(-2-y)} = \frac{1}{-3-y} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(y+1)(-3-y)}$$

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y(y+1) = 0 \quad (1)$$

$$x^3 - 8(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) - (y^3 + 6y^2 + 12y + 8) -$$

$$y^3 + 3y^2 + 6y - 2y^3 - 3y^2 - 6y + 8 =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A, B, C \in \mathbb{N}$  Черновик

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{2b, b_2}$$

$$C = \overline{c_3}$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2$$

$$\begin{array}{r} \overline{aaaa} \\ + \overline{2b, b_2} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{aaaa} \\ + \overline{2b, b_2} \\ \hline \end{array}$$

Пусть  $B = \overline{b, b_2 2}$ , тогда  $n : 4$ .

① Если  $A = \overline{1111}$ , то  $n : 12$

$$\begin{array}{r} \overline{1111} \overline{11} \\ - \overline{11} \overline{11} \\ \hline \overline{31} \overline{11} \\ - \overline{23} \overline{11} \\ \hline \overline{31} \overline{11} \end{array}$$

$B : 101 \vee C$  не может делиться на  $101 \Rightarrow B : 101$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 202 \\ 303 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} C : 11 \\ 33 \end{array}$$

$$1) (1111, 202, 33)$$

② Если  $A = \overline{2222}$ , то  $A = 101 \cdot 11 \cdot 2$

$$\begin{array}{r} 202 \\ 2 \cdot 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ 11 \cdot 3 \end{array}$$

3) Если  $A = \overline{3333}$ , то  $A = 101 \cdot 11 \cdot 3$

$$\begin{array}{r} B = 202 \\ 101 \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} C = 33 \\ 3 \cdot 11 \end{array}$$

Все группы не подходят.

Ответ: 11

11 22 33 44 55 66 77 88 99





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

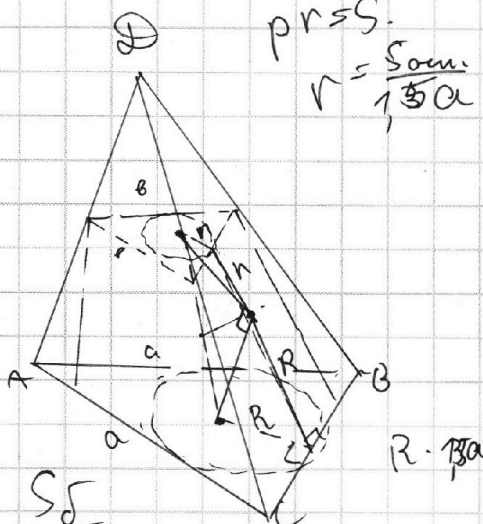
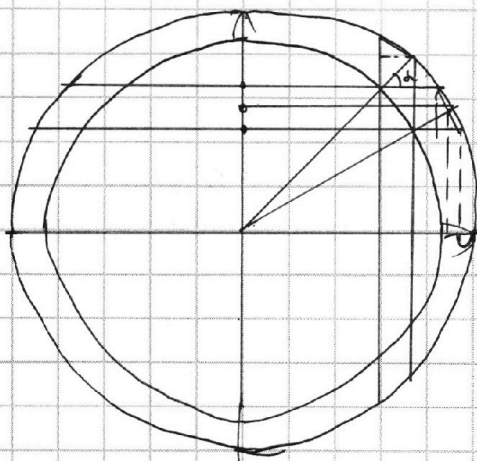
|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

5 352



$$pr = S$$
$$r = \frac{S_{\text{осн}}}{130a}$$

$$R \cdot 13a$$

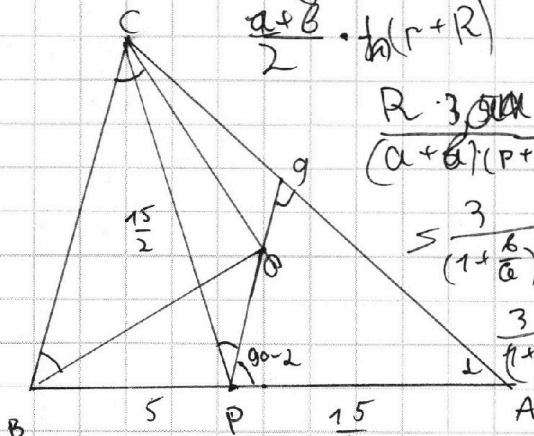
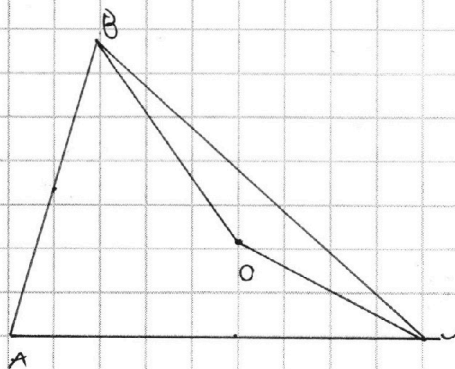
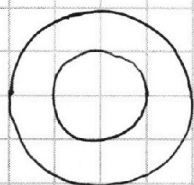
$$\frac{S_5}{S_{\text{осн}}}$$

оригинал трапеции

$$\frac{a+b}{2} \cdot h(r+R)$$

$$\frac{R \cdot 30a}{(a+b)(r+R)} =$$
$$= \frac{3}{(1+\frac{b}{a})(\frac{r}{R}+1)}$$

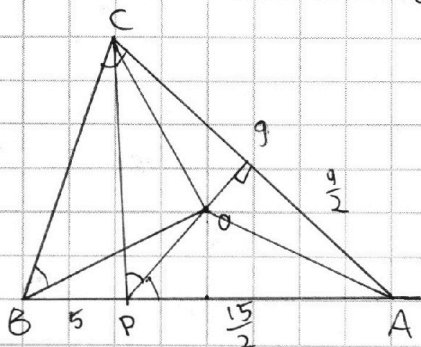
$$\frac{3}{(1+\frac{b}{a})^2}$$



$$5 \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{81}{4}} = \frac{12}{2}$$

$$\frac{225}{81}$$

$$S_{\text{инд}} =$$





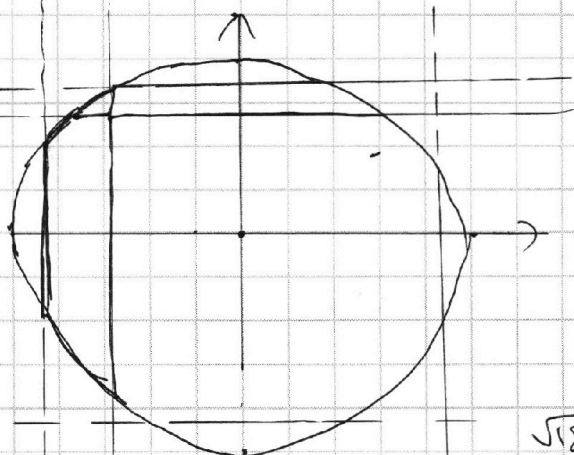
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

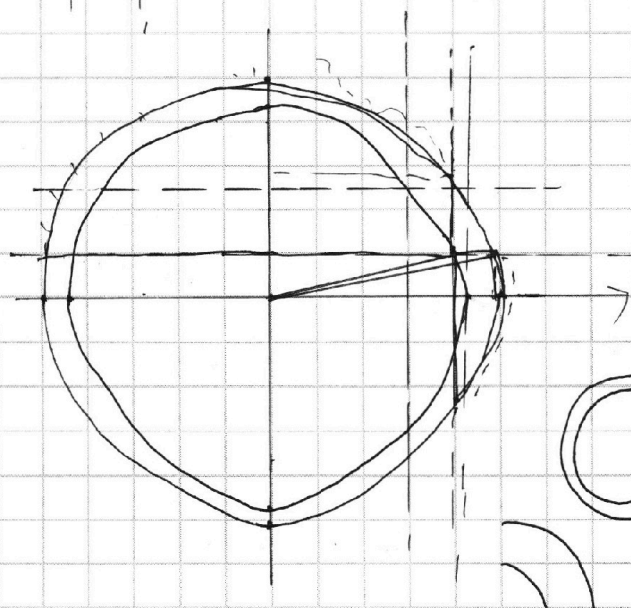


$$\begin{aligned}x &= 3\sqrt{2} \sin \alpha \\y &= 3\sqrt{2} \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &< 3\sqrt{2} \sin \alpha \\y &> 3\sqrt{2} \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\sqrt{2} \sin \alpha > 0 \quad \cos \alpha > 0.$$

дуги всегда равны

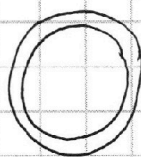


$$1 - \cos \alpha$$

$$3\sqrt{2}(1 - \cos \alpha)$$

$$2(5 - 3\sqrt{2}(1 - \cos \alpha)) +$$

+





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

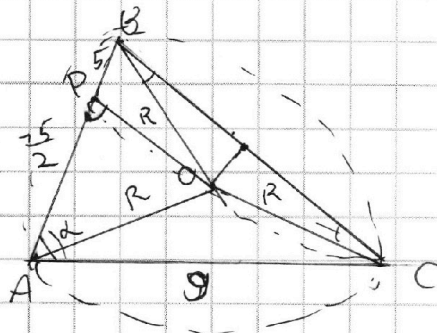
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

N 5

$$AP = \frac{15}{2} \quad BP = 5 \quad AC = 9$$

$S_{ABC} = ?$



$$7,5 \cdot 12,5$$

$$\begin{array}{r} 12,5 \\ \times 7,5 \\ \hline 625 \\ 875 \\ \hline 937,5 \end{array}$$

$$180^\circ$$

$$180^\circ + 2\alpha + 2\beta$$



$$90^\circ - 2\alpha - 90^\circ - 2\beta$$

$$12,5^2 + 9^2 - 2 \cdot 12,5 \cdot 9 \cdot \cos 2\alpha = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha$$

$$3R^2 = 4R^2 \cos^2 2\alpha$$

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin 2\alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos 2\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

max знач. периметра?

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2}k$$

$$k = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$x = 3\sqrt{2} \sin 2\alpha$$

Построим график  
линейный и о



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик  
 4 билета на концерт.

$x$

0,5

0,3.

1,5 + 1

1,9 + 2x

-0,7 - 2x

4 билета

1,3.

в начале: 4 билета

в конце: 74.

и одинаково: и у билетов в конце

$C_n^4$  - всего способов

$C_{n-2}^2$  - бил.

$$C_{2,5}^4 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = 2,5 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$$

$$12 \cdot \frac{10}{4} = 30$$

$$\frac{12}{2,5}$$

$$\frac{(n-2) \cdot (n-3)}{2} \cdot 2,5 = \frac{(n-2)(n-3) \cdot 2,5 \cdot 24}{2 \cdot n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{30}{n(n-1)}$$

$$C_{n-2}^{y-2} = \frac{(n-2)!}{(y-2)!(n-y)!} = \frac{(n-2)! \cdot y!}{(n! \cdot (y-2)!)} = \frac{y \cdot (y-1)}{n \cdot (n-1)}$$

$$y(y-1) = 30$$

$$y^2 - y - 30 = 0$$

$$(y+6)(y-5) = 0$$

$$y = 6 \vee y = -5.$$

$y = 6$  билетов

$$\frac{1}{2,5} = \frac{4}{10} = 0,4.$$

C

$$\frac{12}{n(n-1)} = 0,4$$

30

$$12 = 0,4n^2 - 0,4n$$

$$0,4n^2 - 0,4n - 12 = 0$$

⊕

$$n^2 - n - 30 = 0$$

$$\Delta = 1 + 120 = 121$$

$$n_1 = \frac{1 + 11}{2} = 6$$

$$n_2 = \frac{1 - 11}{2} = -5$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

