



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен  $f(x)$  такой, что уравнение  $f(x) = 2x^2$  имеет единственное решение, а также уравнение  $f(x) = -8$  имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения  $f(x) = 0$ .
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число  $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$  в виде произведения двух натуральных чисел  $x$  и  $y$ , где  $y$  делится на  $x$ ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел  $(a; b)$  такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a-b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах  $BA$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  с тупым углом  $B$  как на диаметрах построены окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, пересекающиеся в точках  $B$  и  $D$ . Хорда  $BE$  окружности  $\omega_1$  перпендикулярна  $BC$ , а хорда  $BF$  окружности  $\omega_2$  перпендикулярна  $CE$  и касается  $\omega_1$ . Найдите отношение  $BF : BD$ , если  $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$ .
6. [5 баллов] При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  вписана сфера  $\omega$ . Луч с началом в точке  $A$  пересекает  $\omega$  в точках  $P$  и  $Q$ , а луч с началом в точке  $C$  пересекает  $\omega$  в точках  $M$  и  $N$ . Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABCD$ . Найдите объём призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и расстояние  $\rho$  от центра  $\omega$  до плоскости  $PAC$ , если известно, что  $AO = 1$ ,  $BO = 2$ ,  $CO = 4$ ,  $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ ,  $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$ ,  $CN = 2\sqrt{5}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad N1 \quad f(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = 2x^2 \rightarrow (a-2)x^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4c(a-2) = 0 \quad \text{т.к. одно решение}$$

$$ax^2 + bx + c = -8 \rightarrow ax^2 + bx + (c+8) = 0$$

$$D = b^2 - 4a(c+8) = 0$$

$$\Rightarrow 4c(a-2) = 4a(c+8) \quad c = -4a \Rightarrow b^2 = 16a(2-a)$$

$$\text{Сумма корней } x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{\pm \sqrt{16a(2-a)}}{2a}$$

Приведённый трёхчлен у которого  $a=1$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{\pm \sqrt{16}}{2} = \pm 2$$

Ответ:  $\pm 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$n = 2^{401} \cdot 3^{500} = x \cdot y, \quad y = kx, \quad k \in \mathbb{N} \Rightarrow n = k \cdot x^2$$

Значит ~~к~~ кол-во вариантов ~~будет~~ кол-во вариантов представить

$n$  в виде  $kx^2$ , где  $x$  состоит из набора множителей  $n$ .

$$x^2 < \begin{matrix} 2^0; 2^2; 2^4; \dots; 2^{538}; 2^{400} \\ 3^0; 3^2; 3^4; \dots; 3^{498}; 3^{500} \end{matrix}$$

чтобы получить  $x^2$ , надо взять одно число из множества двоек, одно число из множества троек, а это кол-во будет

Важно, что 2 и 3 взаимнопростые!

201 способ  $2^n$

251 способ  $3^n$

$\Rightarrow 201 \cdot 251$  способ

т.к. они все будут разные из разложения по множителям

Ответ:  $201 \cdot 251 = 50451$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \cdot \log_y 8 + 4 \cdot \log_{xy} \frac{1}{16} = 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7} \\ x \leq 31 \end{cases}$$

ОАЗ:

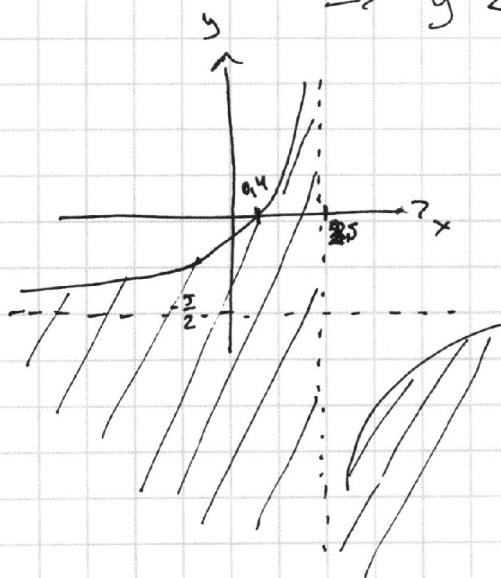
$$\begin{aligned} x &> 0 \\ y &> 0 \\ x &\neq 1 \\ y &\neq 1 \end{aligned}$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1} \Rightarrow 1 + \frac{2}{x-1} < \frac{7}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{y-1}$$

$$-\frac{2}{3} + \frac{1}{x-1} < \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{y-1}$$

$$\frac{5-2x}{x-1} < \frac{7}{y-1}$$

$$\Rightarrow y < 1 + \frac{7(x-1)}{5-2x}$$



На рисунке второе н-во

+ добавим ОАЗ логарифма,

получим, что  $x \in [0.4; 2.5]$

тут всего целые  $x = 1, 2$

Рассмотрим их.  $x \neq 1$  по ОАЗ

$$\Rightarrow x = 2$$

$$\log_2 2 + 3 \cdot \log_y 8 + 4 \cdot \log_{2y} \frac{1}{16} = 0$$

$$1 + 9 \cdot \log_y 2 - 16 \cdot \log_{2y} 2 = 0$$

$$1 + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 2y} = 0$$

$$1 + \frac{9}{t} - \frac{16}{1+t} = 0$$

$$\log_2 y = t$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☒

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1 + \frac{9}{t} = \frac{16}{1+t}$$

$$\frac{t+9}{t} = \frac{16}{1+t}$$

$$t+t^2+9+9t=16t$$

$$t^2-6t+9=0$$

$$t=\pm 3$$

$$\Rightarrow \log_2 y = 3 \Rightarrow y = 8$$

$$\log_2 y = -3 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x=2$   
 $y=8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4. \min(a; b) = 3(a-b)^2 \\ 3. \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

N4

Очевидно,  $a \neq b$ . Иначе не выполняется равенства  $m_1$  и  $m_2$ .

$$\text{Пусть } b > a. \Rightarrow \begin{cases} 4. a = 3(a-b)^2 \\ 3. b = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

$$\text{Рассмотрим первое выражение. } \frac{a}{3} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$\text{Пусть } k = \frac{b-a}{2}. \text{ Тогда } a = 3k^2, b = 3k^2 + 2k. \text{ Из выражений следует, что } k \in \mathbb{N}. \quad (a = 3k^2)$$

$$\text{Тогда } 3 \cdot b = \text{НОК}(a; b) \rightarrow 3 \cdot (3k^2 + 2k) = \text{НОК}(3k^2; 3k^2 + 2k)$$

$\begin{matrix} | & | \\ :k & :k \end{matrix}$   
 $\Rightarrow$  можно вынести

$$3k(3k+2) = \text{НОК}(3k; 3k+2) \cdot k$$

$$3 \cdot (3k+2) = \text{НОК}(3k; 3k+2)$$

Такое выражение верно до тех пор, пока  $(3k+2):k$ .  $\Rightarrow$

$$\left(\frac{3k+2}{k}\right) \in \mathbb{N} \quad \frac{3k+2}{k} = 3 + \frac{2}{k} \Rightarrow \begin{matrix} k=1 \\ k=2 \end{matrix} \text{ , остальные случаи не подходят.}$$

$$k=1 \Rightarrow b = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 5 \quad a = 3 \cdot 1^2 = 3$$

$$k=2 \Rightarrow b = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 16 \quad a = 3 \cdot 2^2 = 12$$

Для случая  $a > b$  аналогично.

Ответ:  $(3; 5); (5; 3); (12; 16); (16; 12)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle BDC = 90^\circ$$

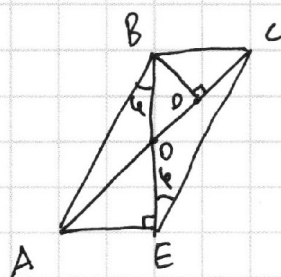
$$\angle BDA = 90^\circ$$

$\Rightarrow D$  лежит на  $AC$

$$\cos(90^\circ - \phi) = \frac{3}{5} \text{ по условию } \Rightarrow \sin \phi = \frac{3}{5}$$

$$\cos \phi = \frac{4}{5}$$

$$\tan \phi = \frac{3}{4}$$



Пусть  $BC = 3$

$$BE = 4 \Rightarrow OE = 2$$

$$AB = CE = 5$$

O - точка пересечения диагоналей  
 $AO = OE$

$$\text{т.к. } \cos \angle OEC \quad OC^2 = OE^2 + EC^2 - 2 \cdot OE \cdot EC \cdot \cos \phi$$

$$OC^2 = 4 + 25 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 29 - 16 = 13$$

$$OC = \sqrt{13}$$

$$\text{Тогда } S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot BD$$

$$\Rightarrow BD = \frac{OB \cdot OC}{OC} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

$$BF = BC \cdot \cos \phi = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{12}{5} \cdot \frac{\sqrt{13}}{6} = \frac{2}{5} \sqrt{13}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{5} \sqrt{13}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} (y-x^2-x-1)(x^2-3xy+4y^2)(y+x-1)=0 \\ y=(2a+1)x-a^2+1 \end{cases}$$

Заметим, что ~~первое~~ решение этой системы это объединение решений трёх систем:

$$\begin{cases} \textcircled{1} \\ y-x^2-x-1=0 \\ y=(2a+1)x-a^2+1 \end{cases} \quad \begin{cases} \textcircled{2} \\ x^2-3xy+4y^2=0 \\ y=(2a+1)x-a^2+1 \end{cases} \quad \begin{cases} \textcircled{3} \\ y+x-1=0 \\ y=(2a+1)x-a^2+1 \end{cases}$$

Найдём со второй.

$$x^2-3xy+4y^2=0 \Rightarrow x=0=y \Rightarrow 0=(2a+1) \cdot 0 - a^2 + 1 \Rightarrow a=\pm 1$$

Т.е. при  $a=\pm 1$  всегда есть решение  $x=0, y=0$ .  
При других  $a$  у этой системы нет решения.

3-я система:

$$\begin{cases} y+x-1=0 \Rightarrow y=1-x \Rightarrow 1-x=(2a+1)x-a^2+1 \\ 2(a+1) \cdot x = a^2 \\ x = \frac{a^2}{2(a+1)} \quad y = \frac{2a+2-a^2}{2a+2} \end{cases}$$

Если  $a=-1$ , то у этой системы нет решения. При остальных  $a$  есть.

1-я система:

$$y=x^2+x+1 \Rightarrow (2a+1)x-a^2+1=x^2+x+1$$

$$x^2-x \cdot 2a+a^2=0$$

$$(x-a)^2=0 \Rightarrow x=a$$

$$y=a^2+a+1$$

← система имеет такое решение при любом  $a$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☒ 6

☐ 7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получим решение системы изначальной:

$$x=a$$

$$y=a^2+a+1$$

$$x=\frac{a^2}{2(a+1)}$$

$$y=\frac{2a+2-a^2}{2(a+1)}$$

при  $a \neq -1$

$$x=0$$

$$y=0$$

при  $a=1$

$a=-1 \rightarrow$  два решения

$a=1 \rightarrow$   $x=1, y=3$   $x=\frac{1}{4}, y=\frac{3}{4}$   $x=0, y=0$   $\Rightarrow$  не подходит, три решения

Посмотрим, когда решения совпадают.

$$x_1=x_2 \quad a=\frac{a^2}{2(a+1)} \Rightarrow 2a^2+2a=a^2 \Rightarrow a(a+2)=0 \Rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ a=-2 \end{matrix}$$

$$y_1=y_2 \quad a^2+a+1=\frac{2a+2-a^2}{2(a+1)}$$

Если  $x$  совпадают только при  $a=0$  и  $a=-2$ ,  
то достаточно проверить совпадения  
в при этих  $a$ .

$$a=0 \Rightarrow y_1=0+0+1=1$$

$$y_2=\frac{0+2-0}{2}=1$$

- совпали

$\Rightarrow$  при  $a=0$   
"  $a=-2$  система имеет  
1 решение

$$a=-2 \quad y_1=4-2+1=3$$

$$y_2=\frac{4+2-4}{2(-1)}=3$$

- совпали

$\Rightarrow$  система имеет 2 решения при  $a \in (-\infty; -2) \cup$

$$a \in (-2; 0)$$

$$a \in (0; 1)$$

$$a \in (1; +\infty)$$

Ответ:

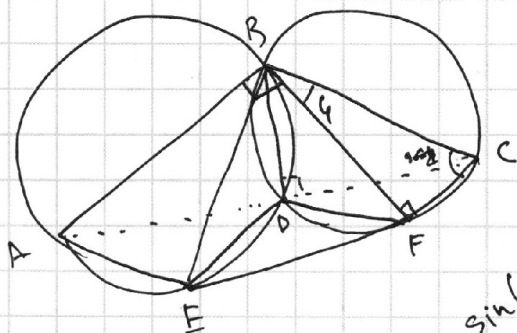


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

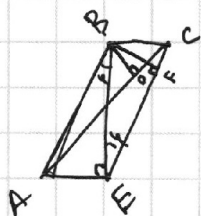
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \phi = \frac{3}{5}$$

$$\cos \phi = \frac{4}{5}$$

$$\tan \phi = \frac{3}{4}$$



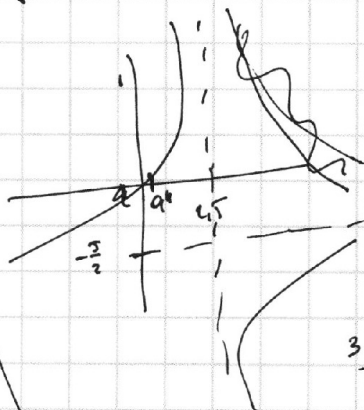
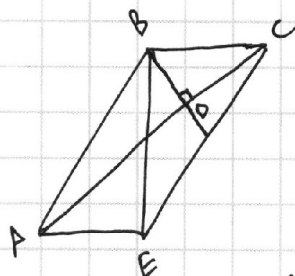
$$EF = 4$$

$$BF = 3$$

$$EB = 5$$

$$AE = BE + EF = 5 + 4 = 9$$

$$AB = \frac{15}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{45}{16}$$



$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1}$$

$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{7}{3} \cdot \frac{y-1}{y+1}$$

$$x - \frac{2}{x-1} < \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{y-1}$$

$$\frac{1}{x-1} < \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{y-1}$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{3} < \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{y-1}$$

$$\frac{3(x-1) - 2(x-1)}{3(x-1)} < \frac{7}{3(y-1)}$$

$$\frac{5-2x}{x-1} < \frac{7}{y-1}$$

$$\frac{x-1}{5-2x} > \frac{y-1}{7}$$

$$\frac{7-2}{5-2} = 2$$

$$y < \left(1 + \frac{7(x-1)}{5-2x}\right)$$

$$\left(\frac{7x-7}{5-2x}\right)'$$

$$= \frac{7 \cdot (5-2x) + 2(7x-7)}{(5-2x)^2} =$$

$$= \frac{35 - 14x + 14x - 2}{(5-2x)^2} = \frac{33}{(5-2x)^2}$$

$$\frac{7(x-1)}{5-2x} = -1$$

$$7x-7 = -5+2x$$

$$5x = 2$$

$$x = \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3}$$

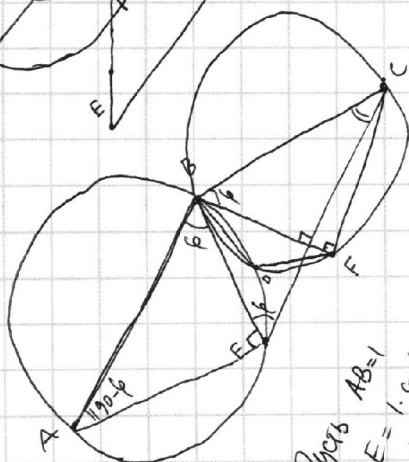
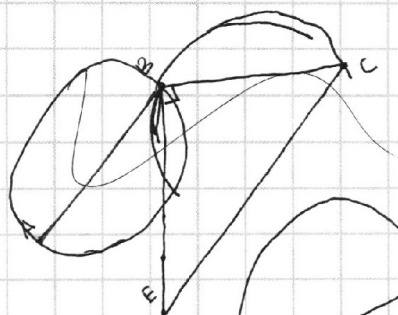
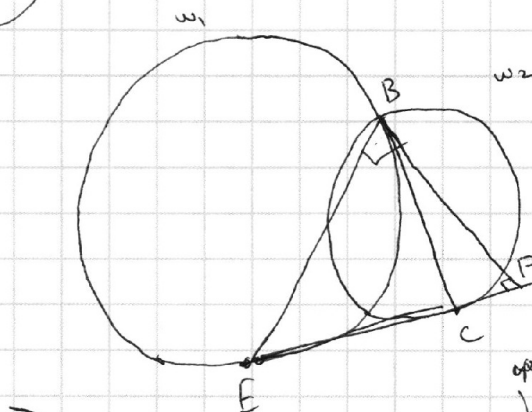
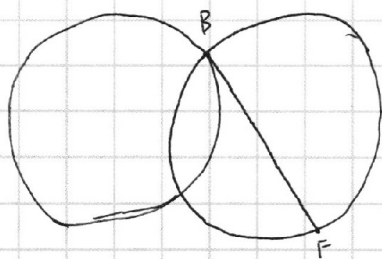
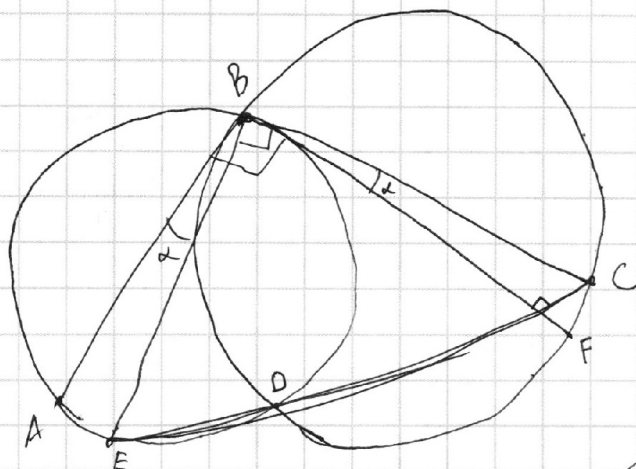


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

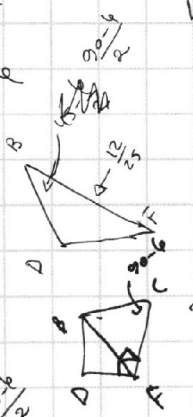
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $AB=1$   
 $AE = 1 \cdot \cos(\alpha) = \sin \beta = \frac{3}{5} = BC$   
 $BE = \frac{4}{5} \Rightarrow BF = \frac{4}{5} \sin \beta = \frac{12}{25}$

$\angle CBD = \angle CBF + \angle FBD$   
 $= \frac{90-\beta}{2}$   
 $\beta = 90^\circ$



$\angle BCD = 90^\circ - \beta$   
 $\angle BCF = 90^\circ - \beta$   
 $\frac{BF}{\sin 90^\circ} = \frac{BD}{\sin BCD}$   
 $BD = BC \cdot \sin \frac{90-\beta}{2}$   
 $BF = BC \cdot \sin \beta (90-\beta)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1/2

$$n = 2^{401} \cdot 3^{500}$$

$$y = kx$$

$$\Rightarrow x \cdot y = k \cdot x^2 = n$$

$$\begin{array}{r} \times 201 \\ 251 \\ \hline 201 \\ + 201 \\ 1005 \\ 402 \\ \hline 50451 \end{array}$$

→

√2

$$x^2 = k \cdot n$$

$$2^0, 2^2, 2^4, 2^6, 2^8, \dots, 2^{998}, 2^{400}$$

$$3^0, 3^2, 3^4, 3^6, 3^8, \dots, 3^{498}, 3^{500}$$

√4

→

⇒ 201 вариант  
251 вариант

$$\Rightarrow 201 \cdot 251$$

$$4. \min(a; b) = 3(a-b)^2$$

$$3. \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \text{ — все делители от } a \text{ и } b$$

Пусть  $b > a$ :

$$4. a = 3(b-a)^2$$

$$3. b = \text{НОК}(a; b)$$

$$b - \text{НМ} \Rightarrow a - \text{НМ}$$

$$b - 4 \Rightarrow a - \text{любое}$$

$$\frac{a}{3} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$a = 3 \cdot k^2$$

$$2k = b - a$$

$$b = 3k^2 + 2k$$

$$3k^2 + 2k = \text{НОК}(3k^2 + 2k; 3k^2)$$

$$(3k+2) \cdot 3 = 9k+6 = \text{НОК}(3k+2; 3k)$$

$$k=1 \quad 15 = \text{НОК}(5; 3) \quad \textcircled{V}$$

$$k=2 \quad 24 = \text{НОК}(8; 6) = 24 \quad \textcircled{V}$$

$$k=3 \quad 33 = \text{НОК}(11; 9) =$$

Если  $(3k+2); k$ , то  $\textcircled{V}$

$$k=1 \quad \textcircled{V}$$

$$k=2 \quad \textcircled{V}$$

$$\frac{3k+2}{k} = 3 + \frac{2}{k} \Rightarrow \text{целое}$$

$$\Rightarrow k=1$$

$$k=2$$

не забыть  $a$  и  $b$   
местами поменять



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☐7  
☐СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$ax^2 + bx + c = 2x^2$$

$$(a-2)x^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow D = b^2 - 4ac = 0$$

$$b^2 - 4(a-2)c = 0$$

$$ax^2 + bx + (c+8) = 0$$

$$b^2 - 4(c+8) \cdot a = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$\log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1}$$

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{7}{3} \cdot \frac{y+1}{y-1}$$

$$1 + \frac{2}{x-1} < \frac{7}{3} \left(1 + \frac{2}{y-1}\right)$$

$$\frac{2}{x-1} < \frac{4}{3} + \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{y-1}$$

$$\frac{1}{x-1} < \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{y-1}$$

$$\log_x 2 + 9 \cdot \log_y 2 - 16 \cdot \log_{xy} 2 = 0$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} = \frac{16}{\log_2 xy}$$

$$\frac{\log_2 y + 9 \log_2 x}{\log_2 y \cdot \log_2 x} = \frac{16}{\log_2 xy}$$

$$\frac{\log_2 y \cdot x^9}{\log_2 y} = \frac{16}{\log_2 xy}$$

$$\log_2 y \cdot x^9 = 16 \cdot \log_2 x$$

$$1 + 9 \cdot \log_2 x =$$

$$\frac{2}{x-1} = \frac{4}{3}$$

$$b^2 - 4(a-2) \cdot (-4a) = 16a(2-a)$$

$$\log_a b = k$$

$$b = a^k$$

$$a \neq 1$$

$$a > 0$$

$$b \neq 0$$

$$\log_a a^{\log_a b} = b$$

$$3 \cdot \log_x 2^3 = 9 \cdot \log_x 2$$

$$x^2 = 2$$

$$\log_x 4 \cdot \log_y k = 1$$

$$\log_4 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 4} = \frac{4}{2}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

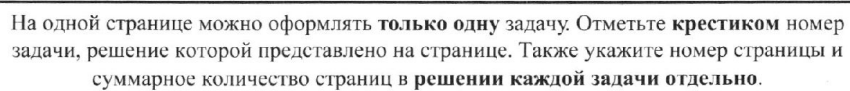
$$x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$$

$$D = 9x^2 - 4 \cdot 4x^2 = -7x^2$$

$$D = 9x^2 - 4 \cdot 4x^2 = -7x^2$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c$$

$$x^2 - 2ax + 4y^2 - 4yb + a^2 + b^2 = c$$



СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a = \pm 1 \Rightarrow$  есть решения  $x = y = 0$

$$D = 2a \sqrt{1-a^2}$$

$$y = x^2 + x + 1$$

$$D = 1 - 4 = .3$$

$$y \cdot x = 1$$

$$y = 1 - x$$

$$(2a+1)x - a^2 + 1 = 1 - x$$

$$2ax + x - a^2 + x = 0$$

$$x(2+2a) = a^2$$

$$x = \frac{a^2}{2(a+1)}$$

$$y = 1 - \frac{a^2}{2(a+1)} = \frac{2a+2-a^2}{2(a+1)}$$

$$(2a+1)x - a^2 + 1 = x^2 + x + 1$$

$$x^2 - x(2a+1-1) + a^2 = 0$$

$$x^2 - x \cdot 2a + a^2 = 0$$

$$(x-a)^2 = 0$$

$$x=a \Rightarrow y=a^2+a+1$$

