



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен  $f(x)$  такой, что уравнение  $f(x) = 2x^2$  имеет единственное решение, а также уравнение  $f(x) = -8$  имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения  $f(x) = 0$ .
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число  $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$  в виде произведения двух натуральных чисел  $x$  и  $y$ , где  $y$  делится на  $x$ ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел  $(a; b)$  такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a - b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах  $BA$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  с тупым углом  $B$  как на диаметрах построены окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, пересекающиеся в точках  $B$  и  $D$ . Хорда  $BE$  окружности  $\omega_1$  перпендикулярна  $BC$ , а хорда  $BF$  окружности  $\omega_2$  перпендикулярна  $CE$  и касается  $\omega_1$ . Найдите отношение  $BF : BD$ , если  $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$ .
6. [5 баллов] При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  вписана сфера  $\omega$ . Луч с началом в точке  $A$  пересекает  $\omega$  в точках  $P$  и  $Q$ , а луч с началом в точке  $C$  пересекает  $\omega$  в точках  $M$  и  $N$ . Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABCD$ . Найдите объём призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и расстояние  $\rho$  от центра  $\omega$  до плоскости  $PAC$ , если известно, что  $AO = 1$ ,  $BO = 2$ ,  $CO = 4$ ,  $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ ,  $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$ ,  $CN = 2\sqrt{5}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Проверим  $b = 4$ .

$$f(x) x^2 + 4x - 4.$$

$$x^2 + 4x - 4 = 2x^2 - 1 \text{ рш.}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (x-2)^2 = 0 \quad - 1 \text{ рш. } \textcircled{V}$$

$$x^2 + 4x - 4 = -8.$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0 \quad - 1 \text{ рш. } \textcircled{V}$$

Получим  $f(x) = x^2 \pm 4x - 4$

$$b = 4;$$

$$f(x) x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$D = 32 \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2} \quad x_1 + x_2 = \boxed{-4}$$

$$b = -4;$$

$$f(x) = x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$D = 32 \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2}$$

$$x_1 + x_2 = \boxed{4}$$

Ответ:  $\pm 4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1  $f(x) = x^2 + bx + c$

1)  $f(x) = 2x^2 - 1$  решение.

2)  $f(x) = -8$  - 1 решение

Тогда:

1)  $x^2 + bx + c = 2x^2$

$x^2 - bx - c = 0$  - имеет 1 решение, когда  $D = 0$ ,  
 $D = b^2 + 4c = 0$ .

2)  $x^2 + bx + c = -8$

$x^2 + bx + c + 8 = 0$

$D = b^2 - 4(c + 8) = 0$

Получаем:

$$\begin{cases} b^2 + 4c = 0 & b^2 = -4c \\ b^2 - 4(c + 8) = 0 & -4c - 4c - 32 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} -8c &= 32 \\ \underline{c} &= -4 \end{aligned}$$

Из первого:

$b^2 - 16 = 0 \quad b = \pm 4$

Получаем:  $f(x) = x^2 \pm 4x - 4$

Проверим при  $b = -4$ :

$x^2 - 4x - 4 = -8$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (x - 2)^2 = 0 \quad \text{✓}$

$x^2 - 4x - 4 = 2x^2 - 1$  при

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$(x + 2)^2 = 0 \quad \text{✓}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☒☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$n = 2^{101} \cdot 3^{500} = x \cdot y. \quad y \div x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \\ y = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 101 \quad \text{и} \quad \beta_1 + \beta_2 = 500$$

Тогда.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = 101 \\ \beta_1 + \beta_2 = 500 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 \quad \text{и} \quad \beta_1 \leq \beta_2$$

Будем выбирать  $\alpha_1$ , потому что при  $\alpha_1$  — однозначно определится  $\alpha_2$ , учитывая, что

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \quad \text{получаем, что } \alpha_1 \in [0; 200] - 201$$

С  $\beta_1$  аналогично, но учитывая: способ  
выбрать

$$\beta_1 \in [0; 250] - 251 \text{ способ выбрать.}$$

Из за того, что  $\text{НОД}(2, 3) = 1$  от деления на 2 не зависит деление на 3. и наоборот

Поэтому Ответ:  $251 \cdot 201 = 50451$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐2  
☐3  
☒4  
☐5  
☐6  
☐7  
☐СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$(1) \quad \frac{x-1}{y+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{y-1}{y+1}$$

$$\text{из (3)} \quad y = x^3$$

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{3(y-1)}{4(y+1)} > 0.$$

$$\frac{2(x-1)(y+1) - 3(y-1)(x+1)}{4(x+1)(y+1)} > 0.$$

$\begin{matrix} \sqrt{\phantom{x}} & \sqrt{\phantom{x}} \\ 0 & 0 \end{matrix}$   
по ОГР

$$2(xy - y + x - 1) - 3(xy - x + y - 1) > 0.$$

$$5xy - 10y + 10x - 6 > 0 \quad | :2$$

$$2xy - 5y + 5x - 2 > 0$$

$$y(2x-5) + \frac{5}{2}(2x-5) + \frac{25}{2} - 2 > 0$$

$$(2x-5) \left( y + \frac{5}{2} \right) > -\frac{21}{2}$$

$\begin{matrix} \sqrt{\phantom{x}} \\ 0. \end{matrix}$

$$1) \quad x = 0$$

$x > 0$   
по ОГР

$$2) \quad x = 1$$

$x \neq 1$  по  
ОГР

$$3) \quad x = 2$$

$$4) \quad x > 2$$

$\forall y \in \text{ОГР}$   
верно

Рассм. 4 случая.

$$(2-3) \quad x \in (2; 31] \quad (3) \quad y = x^3$$

Для каждого  $x$  однозначно опре.  $y$ . По вариантам



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☒

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решим случай 3)  $x=2$ .

$$(4-y)\left(y+\frac{5}{2}\right) > -\frac{21}{2}$$

$$y+\frac{5}{2} < \frac{21}{2}$$

$$y < 8$$

$$y \neq 1$$

$$y > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} y < 8 \\ y \neq 1 \\ y > 0 \end{array} \right\} y \in [2; 8) - \text{6 случаев.}$$

П.о. где  $x=2$  - 6 случаев  $y$ .

Ответ:  $y=x^3$  - где (1)  $y=8$  - не подходит.

П.о. Ответ: 29.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \left( \frac{1}{16} \right) = 0 \\ & \textcircled{1} \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7} \\ x \leq 31 \end{cases} \end{aligned}$$

ОГР:

$$\begin{aligned} x &> 0 \\ y &> 0 \\ x &\neq 1 \\ y &\neq 1 \end{aligned}$$

$$] \quad a = \log_x 2 \quad b = \log_{xy} 2$$

Тренируем (1), как.

$$\log_x 2 + 9 \log_y 2 + 16 \log_{xy} 2 = 0$$

$$\log_x 2 + \frac{9 \log_x 2}{\log_x y} - \frac{16 \log_x 2}{\log_x (xy)} = 0$$

$$\log_x (xy) = \log_x x + \log_x y = 1 + b$$

Если  $b = 0$ :

$$\log_{xy} 2 = 0$$

$$y = 1 \quad x - \text{любой}$$

Ø по ОГР.

Если  $\log_{xy} 2 = -1$

$$a = \frac{1}{x}$$

$$xy = \frac{1}{x} \cdot x = 1 \quad \text{Ø по ОГР.}$$

$$a + \frac{9a}{b} - \frac{16a}{b+1} = 0$$

$$a \left( 1 + \frac{9}{b} - \frac{16}{b+1} \right) = 0$$

$$a \left( \frac{b^2 + b + 9b + 9 - 16b}{b(b+1)} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow a \left( \frac{b^2 - 6b + 9}{b(b+1)} \right) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b - 3 = 0 \\ b(b+1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_x 2 = 0 \\ \log_{xy} 2 = 3 \\ b(b+1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ y = x^3 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4:

$$4a = \frac{a^2 \cdot k^2}{3}$$

$$\frac{12}{a} = k^2 \quad k = \pm \sqrt{\frac{12}{a}}$$

$$a = 3 \quad \text{или} \quad a = 12.$$

$a = 3$ : Подставим  $b(1)$

$$12 = 3(3-b)^2 = 3(b-3)^2$$

$$4 = (b-3)^2 \quad b-3 = \pm 2. \quad b = 1$$
$$b = 5.$$

И.к.  $a < b$ , то возможны пара  $(3; 5)$

$a = 12$ : Подставим  $b(1)$

$$16 = (b-12)^2$$

$$b-12 = \pm 4 \quad b = 8$$
$$b = 16$$

И.к.  $a < b$ , то возможны пара  $(12; 16)$

Итого Ответ  $(a; b)$ :  $(12; 16); (3; 5); (5; 3);$   
 $(16; 12)$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$a, b \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a, b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \cdot \max(a, b) = \text{НОК}(a, b) \end{cases}$$

1)  $\boxed{a > b}$

$$\begin{aligned} (1) & \quad 4 \cdot b = 3(a-b)^2 \\ (2) & \quad 3a = \text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)} \end{aligned}$$

$$(2) \quad 3 \cdot \text{НОД}(a, b) = b = 3 \cdot \text{НОД}(a-b, b) \Leftrightarrow \frac{b}{3} = \text{НОД}(a-b, b)$$

из (1)  $\text{н.к. } \text{НОД}(4, 3) = 1$ , то.

$$4b : (a-b)^2$$

н.к.  $\frac{b}{3} = \text{НОД}(a-b, b)$  можно  
понять, что  $a-b = \frac{b}{3} \cdot k$ , где  
 $k \in \mathbb{Z}$  и  $k \neq 3$   
 $k > 0$ .

Подставим:  $b(1)$

$$4b = \frac{b^2}{3} \cdot k^2 \quad | \quad b \neq 0, b \in \mathbb{N}$$

$$\frac{12}{b} = k^2 \quad k = \pm \sqrt{\frac{12}{b}}, \text{ т.к. } k \in \mathbb{Z}$$

, то  $b = 3$  или  $b = 12$

$k = \pm 2$   
 $k = 2$

$k = \pm 1$   
 $k = 1$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$b=3, \text{ то}$$

$$4 \cdot 3 = 3(a-3)^2$$

$$\text{т.к. } a-3 = \pm 2 \quad a=1 \quad a=5.$$

т.к.  $a > b$ , но проверим пару  $(5, 3)$   
Вопрос

$$12 = 3 \cdot 2^2 \quad \text{В}$$

$$3 \cdot 5 = \text{НОК}(5, 3) - \text{В}$$

$$\text{Пусть } b=12; \quad 12 = 3(a-3)^2$$

$$16 = (a-12)^2$$

$$a-12 = \pm 4 \quad \begin{cases} a=8 \\ a=16 \end{cases}$$

т.к.  $a > b$ , то ответ  $(16, 12)$

$$\text{Пусть } a < b; \quad 3(b-a)^2$$

Тогда:

$$4 \cdot a = 3(a-b)^2$$

$$3b = \text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)}$$

$$\text{НОД}(a, b) = \frac{a}{3} = \text{НОД}(a, b-a)$$

$$\text{т.о. } b-a = \frac{a}{3} \cdot k, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \text{ и } k \neq 3.$$

Подставим:

$$\begin{matrix} \forall / & \forall / & \forall / \\ \delta & \delta & \delta \end{matrix} \quad k \geq 0.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

ровно 2 решения

(1)  $(y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0$ .

(2)  $y = (2a+1)x - a^2 + 1$

1) Нужно изобразить на  $xOy$  как:

$y = x^2 + x + 1$  — парабола ветви вверх.

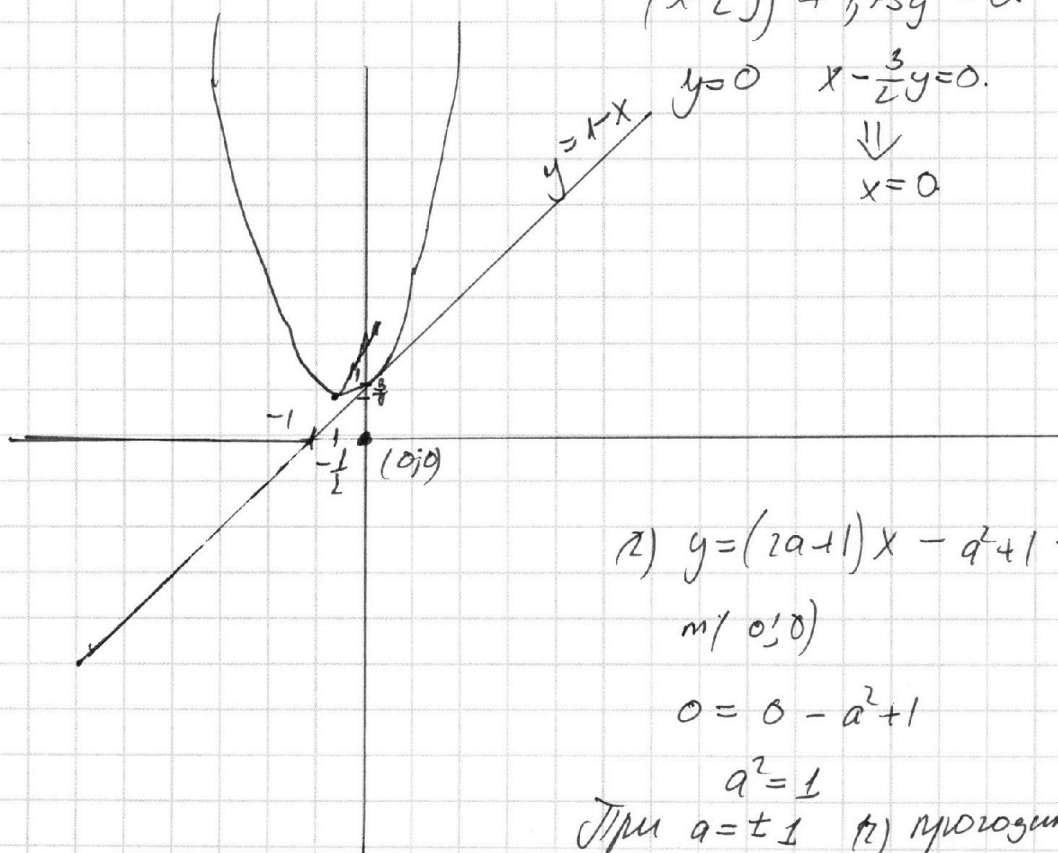
$y = 1 - x$  — прямая

$$x^2 - 3xy + 4y^2 = \left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 - \left(\frac{3}{2}y\right)^2 + 4y^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 + 1,75y^2 = 0.$$

$$y = 0 \quad x - \frac{3}{2}y = 0.$$

$$\Downarrow \\ x = 0$$



2)  $y = (2a+1)x - a^2 + 1$  — прямая

м/  $(0; 0)$

$$0 = 0 - a^2 + 1$$

$$a^2 = 1$$

При  $a = \pm 1$  п) пройдет через

$(0; 0)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☒7  
☐СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассматриваем, при каких  $a$  линейная функция

пересекает  $y = (2a+1)x - a^2 + 1$ .

и  $y = x^2 + x + 1$

$$x^2 + x + 1 = (2a+1)x - a^2 + 1$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0 \quad D=0 \Rightarrow \text{всегда будет ровно 1 пересечение}$$

$$(x-a)^2 = 0$$

С прямой  $y = 1-x$  всегда будет пересечение,

кроме когда  $2a+1 = -1 \quad a = -1$

Т.е. при  $a=1$  будет пересечение с  $x^2+x+1=y$ .

с  $y = 1-x$   
и с прямой  
(0;0)

При  $a = -1$

$$\begin{cases} y = -x \\ y = 1-x \text{ — нет пересечения.} \\ y = x^2 + x + 1 \quad x = -1 \text{ — пересечение} \\ (0;0) \text{ — пересечение.} \end{cases}$$

$a = -1$  подходит?

Во всех остальных (2) будет имеет.

1 точка пересечения с  $y = x^2 + x + 1$  и 1 точку,

пересечения с  $y = 1-x$  при этом они не будут совпадать. Ответ:  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$



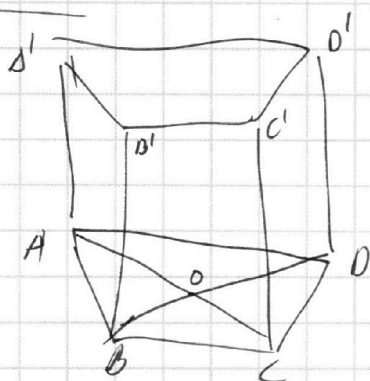
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7



$$AO = 1 \quad CO = 4$$

$$BO = 2$$

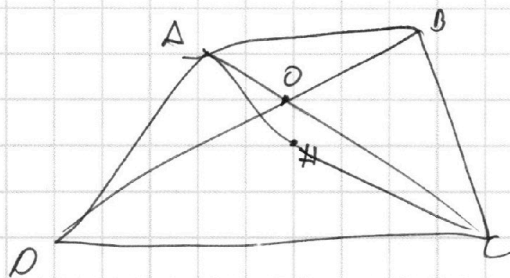
$$AP = \frac{5}{3}$$

$$AQ = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$CM = \frac{10\sqrt{3}}{9}$$

$$CN = 2\sqrt{3}$$

Пусть H — произвольная точка сферы на ABCD



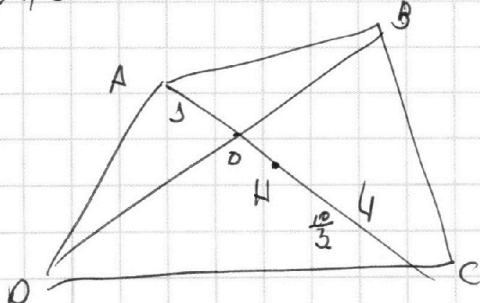
Получа

$$AH = \sqrt{AP \cdot AQ} = \frac{5}{3}$$

$$CH = \sqrt{CM \cdot CN} = \frac{10}{3}$$

П.и.  $AO + CO = 5$  и  $AH + HC = 5$ .

П.и. H лежит на AC.



П.и. — сфера вписана  
то она касается.

граней.  $BCB'C'$  и

$DCD'C'$ , то центр  
лежит на

биссектрисе плоскости

$\Rightarrow AC$  — биссектриса обоих углов A и C.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

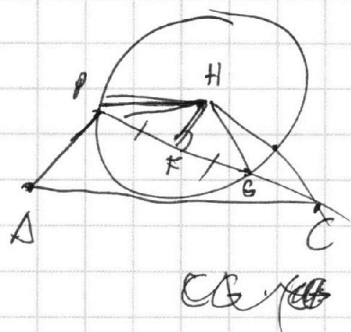
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

$$h = 5, S_{ABCO} = 10$$

$$N_{ABCOA'D'C'O'} = S_{ABCO} \cdot h = \boxed{50}$$



Проекция на  $ACD'C'$

$H\bar{F}$  - искомое расстояние

$$HP = \frac{5}{2}$$

X/X

$$X = CG$$

CG

Ответ:  $\boxed{50}$



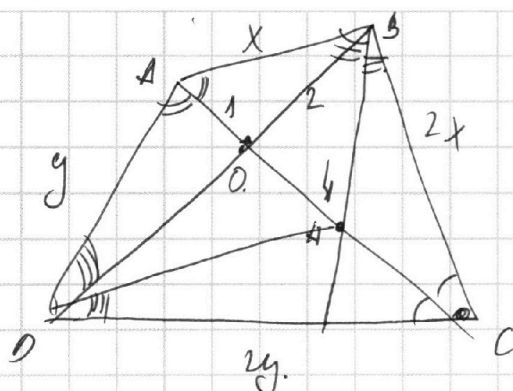


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



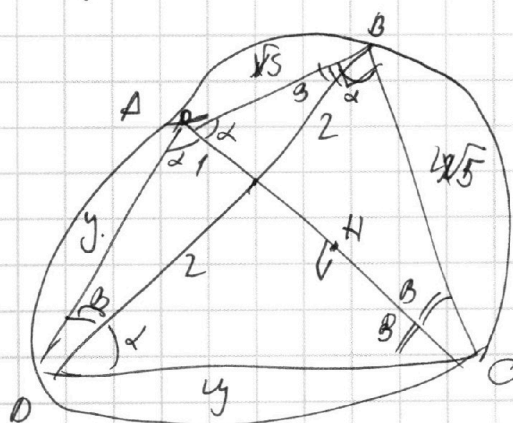
По св-ву биссектрисы.

$$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AO}{OC} = \frac{1}{2}$$

Положим основание, чтобы ~~и~~ централь в центре

Погда получим описанный четырехугольник.



BD и AC - хорды

$$\Rightarrow DO \cdot DC = DO \cdot DB$$

$$OD = 2$$

$$\angle A + \angle B = 90^\circ, \text{ т.к. } \angle A \sim \angle B$$

$$\text{По п. 1. } 3x^2 + x^2 = 15 \quad x = \sqrt{5}$$

$\triangle ABC$  равен  $\triangle BCD$  по стороне и двум углам, т.о.

$$S_{ABCO} = 2S_{ABC}$$

$$S_{ABCO} = \frac{1}{2} \cdot 10$$

$$S_{ABCO} = 10, \text{ т.о. } R = \frac{5}{2}$$

т.к. сфера касается верхнего и нижнего оснований то высота призма равна  $2R = 5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left[ a > b \right]$$

$$\left[ a < b \right]$$

$$1) \sqrt{b} = 3(a-b)^2$$

$$\left[ 3a = \text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)} \right]$$

$$b=3$$

$$b=12$$

$$3a \cdot \text{НОД}(a, b) = ab$$

$$a-b = \frac{b}{3} \cdot k \quad \text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a-b, b) = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{-20 \sqrt{1}}{10}$$

$$\sqrt{b} = 3 \left( \frac{a-b}{3} \right)^2 \quad \frac{a-b}{3} = \frac{1}{3} \cdot k^2 \quad b=12 \quad k=2 \quad b=3 \quad k=2$$

$$4b$$

$$1) \sqrt{b} = 3(a-b)^2 \Rightarrow$$

$$4b: (a-b)^2 = (a-b)(a+b) = (a+b) \cdot b \cdot \frac{1}{3} k$$

$$a = \frac{b}{3} \quad a-b = \frac{b}{3} \quad a = \frac{b}{3}$$

$$a-b = \frac{b}{3} \quad a+b = 2 \quad a = 1-b$$

$$(a+b) \cdot \frac{1}{3} k \leq 4 \quad u:$$

$$a+b=12 \quad \sqrt{b} = 3(a-b)^2$$

$$a-b = \pm 4 \quad \sqrt{b} = 3(a-b)^2 = 3(a-b)$$

$$b=16$$

$$(3, 3)$$

$$(1, 12)$$

$$\sqrt{b} = 3 - 3b$$

$$2b=3$$

$$b=1.5$$

$$(a+b) \cdot k = 6 \quad a = b-b$$

$$a=1-b$$

$$u=1 \quad a+b=6$$

$$\sqrt{b} = 3(a-b)^2 \quad a-b = \frac{b}{3}$$

$$4b = 18(a-b)$$

$$18 = 18(6-2b)$$

$$40b = 108$$

$$b=2.7$$

$$108$$

$$a+b=2$$

$$\sqrt{b} = 6(a-b)$$

$$16 = 6(2-2b)$$

$$b = 3(1-b)$$

$$\sqrt{b} = 3 \quad b=9$$

$$u=2 \quad a+b=3$$

$$u=3 \quad a+b=2$$

$$u=6 \quad a+b=1$$

$$\sqrt{b} = 3(a-b)^2 = 9(a-b) = 9(3-2b)$$

$$a+b=3$$

$$a=3-b$$

$$\sqrt{b} = 27 - 18b$$

$$a=3-b \quad \sqrt{b} = 27$$

$$a+b=3$$

$$\sqrt{b} = 9(a-b)$$

$$\sqrt{b} = 9(3-2b)$$

$$a+b=1$$

$$a+b=2$$

$$a+b=6$$

$$a+b=3$$

$$a+b=6$$

$$\sqrt{b} = 36$$

$$b=9(12-2b)$$

$$18 = 18(12-2b)$$

$$18 = 18(12-2b)$$

$$a+b=3$$

$$k=3$$

$$a+b=12$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution for a geometry problem involving a cube and a tetrahedron. The solution includes several diagrams and calculations.

**Diagrams:**

- A cube with vertices labeled A, B, C, D, A', B', C', D'. A point O is marked at the center of the cube.
- A tetrahedron with vertices labeled A, B, C, D. A point O is marked at the center of the tetrahedron.
- A triangle with vertices labeled A, B, C. A point O is marked at the center of the triangle.
- A triangle with vertices labeled A, B, C. A point O is marked at the center of the triangle.
- A triangle with vertices labeled A, B, C. A point O is marked at the center of the triangle.

**Calculations:**

$$12 = 12x^2$$

$$12x^2 = 12x^2 +$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{(5x^2 - 25)^2}{4x^2}}$$

$$\frac{5}{3} + \frac{10}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

$$\cos \alpha = \frac{25 - 5x^2}{4x^2}$$

$$25 = 5x^2 - 4x^2 \cdot \cos \alpha$$

$$16 = 4 + 4x^2 - 8x \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

$$\frac{4}{1} \left\{ 1 = 4 + x^2 - 2x \cdot \cos(\beta) \right.$$

$$\frac{x^2 + 3}{2x} \quad \cos \beta = \frac{x^2 + 3}{2x} \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \left( \frac{x^2 + 3}{2x} \right)^2} = \frac{\sqrt{x^2 - (x^2 + 3)^2}}{2x}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\frac{2x - (x^2 + 3)^2}{4x^2} = \frac{2x - (x^2 + 3)^2}{4x^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 \_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6 \quad (y - x^2 - x + 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x + 1) = 0.$$

$$y = (2a+1)x - a^2 + 1$$

ровно 2 рещ.

$(x, y)$

$$2a+1 = 1$$

$$a = 0$$

$$y = x + 1$$

$$x^2 + x + 1 = x + 1$$

$$x = 0.$$

$$a = 1 - \text{по условию.}$$

$$y = 3x -$$

$$y = x^2 + x + 1 \quad \text{и} \quad y = (2a+1)x - a^2 + 1$$

есть 1 пересечение.

$$x^2 + x + 1 = (2a+1)x - a^2 + 1$$

-ххххх

$$x^2 + x(1 - 2a - 1) + a^2 - 1 = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

$$(x - a)^2 = 0 \quad D = 0 = 4a^2 - 4(a^2 - 1) = 2 = 0 \quad a \neq$$

$$x = a.$$

$$y = 1/x + 2/4$$

$$y = x^2 + x + 1$$

$$11x - 24 = x^2 + x + 1$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0 \quad x = 5$$

$$y = 1 - x$$

$$y = x^2 + x + 1$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$$

$$+\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1$$

$$-\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

Всегда  
пересек.  
прям.  
и параболу

$$x^2 - 3xy + 4y^2$$

$$D = 9y^2 - 16y^2 = -7y^2$$

Решение:

$$a = 1; a = 0.$$

$$1 \cdot 5 = 24$$

$$35 - 24 = 31$$

$$25 + 541 = 31$$

$$x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$$

$$(x - 1.5y)^2 + 1.75y^2 = 0$$

$$y = \frac{2}{3}x$$

$$y = 0.$$

$$0 = \frac{2}{3}x$$

$$x = 0.$$

$$-9x - 24 =$$

$$1) a = 5: \quad x^2 + x + 1$$

$$2) a = -5: \quad x^2 + 10x + 25 = 0$$

$$1) y = 11x + 24$$

$$y = x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x + 1 = 11x + 24$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$D = 100 + 4 \cdot 25$$









На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 \_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3

$$x > 0 \quad y > 0$$

$$\log_x 2 + 3 \log_y 8 + 6 \log_{xy} 2^{-4} = 0$$

$$4xy + 10x + 10y - 4 > 0$$

$$x \leq 31$$

$$0 \leq y \leq 31^3$$

$$a = \log_x 2$$

$$x \neq 1$$

$$y \neq 1$$

$$y + \frac{5}{2}$$

$$b = \log_{xy} 2$$

$$\frac{10+5}{2}$$

$$a + \frac{9a}{b}$$

$$+ \frac{16}{b+1}$$

$$= 0$$

$$\log_x 2$$

$$\log_x x^3 = 3$$

$$\log_x (xy)$$

$$\log_x y + 1$$

$$b+1$$

$$a + \frac{9a}{b}$$

$$- \frac{16a}{b+1}$$

$$= 0$$

$$a \left( 1 + \frac{9}{b} - \frac{16}{b+1} \right) = 0$$

$$\log_x 2 = 0$$

$$x \neq 2$$

$$(2x-5) \left( y + \frac{5}{2} \right) > \frac{-21}{2}$$

$$\frac{(b+1)b + 9(b+1) - 16b}{b(b+1)} = 0$$

$$b \neq 0 \quad b+1 \neq 0$$

$$x=0 \quad x=1 \quad x=2$$

$$b^2 + b + 9b + 9 - 16b = 0$$

$$x > 2 \quad y$$

$$b^2 - 6b + 9 = 0 \quad (b-3)^2 = 0 \quad b = 3$$

$$\log_x y = 3$$

$$y = x^3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} 4 \cdot \min(a, b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \cdot \max(a, b) = \text{НОК}(a, b) \end{cases}$$

$$a > 0 \quad b > 0$$

$$9 \in \mathbb{N}$$

$$\neg a > b:$$

$$\begin{cases} 4b = 3(a-b)^2 \\ 3a = \text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)} \end{cases}$$

$$4b: (a+b)(a-b)$$

$$1b: (a+b) \cdot \frac{b}{3} \cdot k \rightarrow$$

$$\begin{matrix} k=5, & a+b & k \leq 12 \\ k+3 & \frac{a+b}{3} & \\ k+6 & (a+b) & k \leq 12 \\ k \leq 6 & & \end{matrix}$$

$$\frac{a+b}{3} \cdot k = 1 \quad \begin{cases} 1) a+b=3 \\ k=1 \\ 2) a+b=1 \\ k=3 \end{cases}$$

$$3a \text{ НОК}(a, b) = ab$$

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, b) = \frac{b}{3}$$

$$a-b = \frac{b}{3} \cdot k \quad b: 3$$

$$1) \quad \begin{cases} a+b=3 \\ a-b=\frac{b}{3} \end{cases} \quad k=1$$

$$a = \frac{4}{3}b \quad k=3$$

$$4: \frac{a+b}{3} k$$

$$\frac{4}{3}b + b = 3$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$$

$$4b + 3b = 9$$

$$\frac{12}{4} + \frac{9}{2}$$

$$7b = 9$$

$$b = \frac{9}{7}$$

$$\frac{12}{4} + \frac{9}{2}$$

$$2) \quad \begin{cases} a+b=1 \\ a-b=b \end{cases}$$

$$a = 2b$$

$$3) \quad \frac{a+b}{3} k = 2$$

$$3b = 1 \quad b = \frac{1}{3} \quad \text{X}$$

$$k=1$$

$$a+b=1$$

$$\begin{cases} k=3 \\ a+b=2 \end{cases}$$

$$a+b=4$$

$$a+b=6$$

$$a = \frac{4}{3}b$$

$$k=1$$

$$a+b=6$$

$$a-b=\frac{b}{3}$$

$$a = \frac{4}{3}b$$

$$\frac{4}{3}b + b = 6$$

$$4b + 3b = 18$$

$$7b = 18$$

$$\frac{4}{3}b + b = 4$$

$$4b + 3b = 12$$

$$7b = 12$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ k=6 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 2^{601} \cdot 3^{500} = xy.$$

$$y : x$$

$$\frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$$\log_x 2 + 3 \log_y 8 + 6 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7} \\ x \leq 91 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\log_y 8 = \frac{3 \log_x 2}{\log_x y}$$

$$\log_x 2 = \max \log_{32} 2 = \frac{1}{5} \log_2 2 = \max < \frac{1}{5}$$

$$\frac{(x-1)(7y+7) - (3y-3)(x+1) \log_x 2}{(x+1)(7y+7) \log_x y} - 16 \frac{\log_x 2}{\log_y(xy)} = 0$$

$$a = \log_x 2 \quad \log_x y = \frac{\log_2 y}{\log_2 x} \quad \log_y x + \log_y y = 1 + \log_y x$$

$$\begin{aligned} 2xy - 7y + 7x - 7 \\ -(3xy - 3x + 3y - 3) > 0 \end{aligned}$$

$$9x + 10x - 10y - 49 + \frac{9a}{b} - 16 \frac{a}{b+1} = 0$$

$$\frac{ab+9a}{b} - \frac{16a}{b+1} = 0$$

$$\frac{\log_2 2}{\log_2 x} =$$

$$\frac{(ab+9a)(b+1) - 16ab}{b(b+1)} = 0$$

$$ab^2 + 9ab + ab + 9a = 16ab$$

$$ab^2 - 8ab + 9a = 0$$

$$a=0 \quad b^2 - 8b + 9 = 0 \quad D = 64 - 36 = 28.$$

$$b_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$\begin{aligned} x^0 &= 2 \\ 1 &= 2^0 x \\ \log_x 2 &= 0 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 \_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

①  $f(x) = x^2 + bx + c$

$$x^2 + bx + c = 2x^2 - 1 \text{ урем.}$$

$$x^2 + bx + c = -8 - 1 \text{ урем.}$$

Находим  $[-b]$

$$x^2 - bx - c = 0$$

$$D=0 \quad D = b^2 - 4c = 0$$

$$x^2 + bx + c + 8 = 0$$

$$D=0 \quad D = b^2 - 4(c+8) = 0$$

$$\begin{cases} b^2 + 4c = 0 & b^2 = -4c \\ b^2 - 4(c+8) = 0 & b^2 = 4c + 32 \end{cases}$$

$$-4c - 4c - 32 = 0$$

$$-8c = 32 \quad c = -4$$

$$b^2 = -4 \cdot -4 = 16 \quad b = \pm 4$$

$$x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$D = 16 + 16 = 32$$

$$x_2 = \frac{+4 \pm \sqrt{32}}{2}$$

$$x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$D = 32$$

$$\frac{4 + \sqrt{32}}{2} + \frac{4 - \sqrt{32}}{2} = \boxed{4}$$

$$x_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2}$$

$$-\frac{4 + \sqrt{32}}{2} + -\frac{4 - \sqrt{32}}{2} = \boxed{-4}$$

$$b = 0$$

$$b = -1$$

$$\log_x y = 0$$

$$y = 1$$

$$x - \text{люб. } \neq 0$$

$$\log_x y = -1$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$x - \text{люб. } \neq 0$$



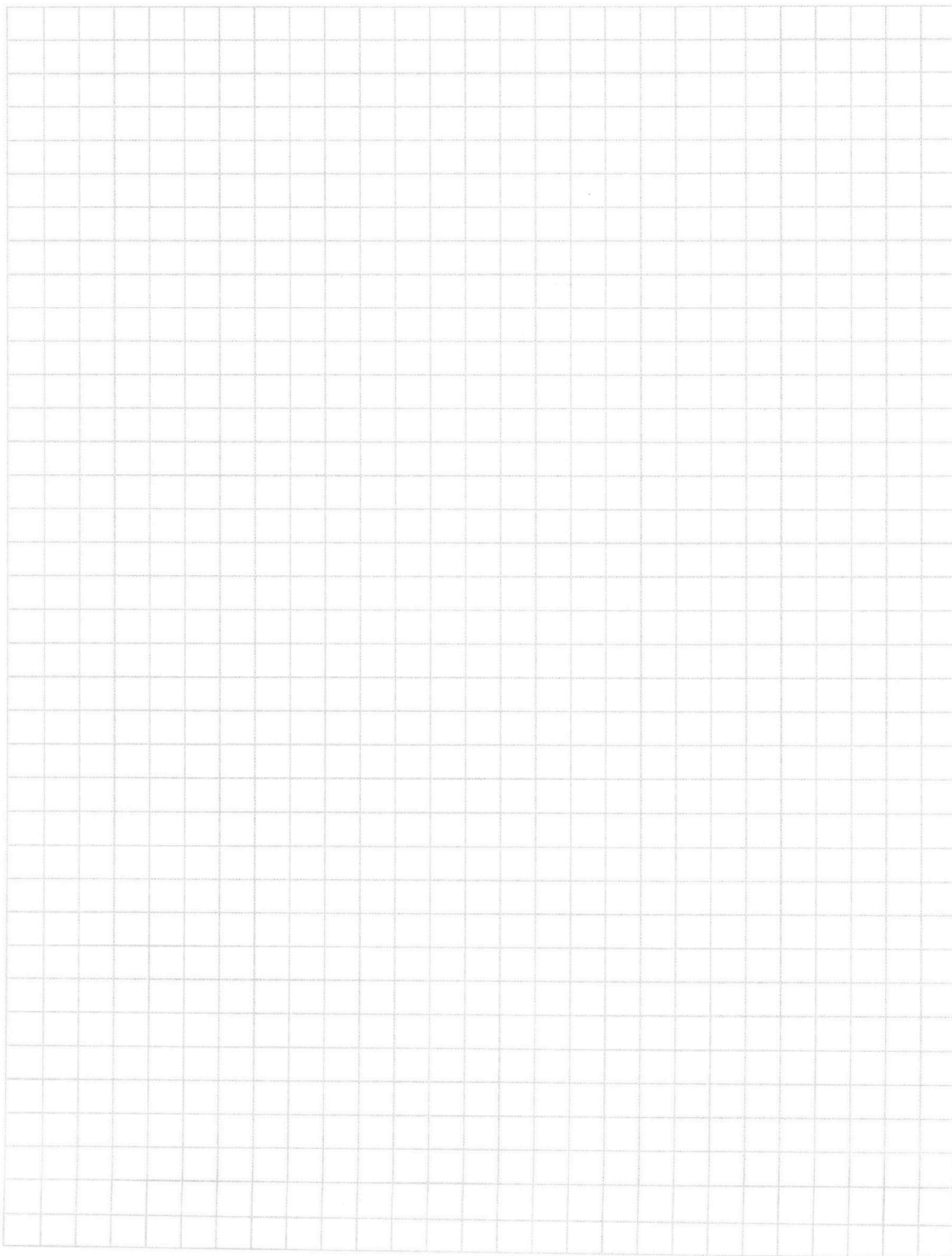


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

