



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 11

- [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен  $f(x)$  такой, что уравнение  $f(x) = 2x^2$  имеет единственное решение, а также уравнение  $f(x) = -8$  имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения  $f(x) = 0$ .
- [3 балла] Сколько способами можно представить число  $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$  в виде произведения двух натуральных чисел  $x$  и  $y$ , где  $y$  делится на  $x$ ?
- [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел  $(a; b)$  такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a - b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

- [5 баллов] На сторонах  $BA$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  с тупым углом  $B$  как на диаметрах построены окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, пересекающиеся в точках  $B$  и  $D$ . Хорда  $BE$  окружности  $\omega_1$  перпендикулярна  $BC$ , а хорда  $BF$  окружности  $\omega_2$  перпендикулярна  $CE$  и касается  $\omega_1$ . Найдите отношение  $BF : BD$ , если  $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$ .

- [5 баллов] При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

- [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  вписана сфера  $\omega$ . Луч с началом в точке  $A$  пересекает  $\omega$  точках  $P$  и  $Q$ , а луч с началом в точке  $C$  пересекает  $\omega$  в точках  $M$  и  $N$ . Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABCD$ . Найдите объём призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  и расстояние  $\rho$  от центра  $\omega$  до плоскости  $PAC$ , если известно, что  $AO = 1$ ,  $BO = 2$ ,  $CO = 4$ ,  $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ ,  $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$ ,  $CN = 2\sqrt{5}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим  $\beta = 4$

$$f(x) = x^2 + 8x - 4.$$

$$x^2 + 8x - 4 = 2x^2 - 1 \text{ при.}$$

$$x^2 + 8x + 4 = 0 \quad (x+4)^2 = 0 \quad -1 \text{ при.} \quad \textcircled{v}$$

$$x^2 + 8x - 4 = -8.$$

$$x^2 + 8x + 4 = 0$$

$$(x+4)^2 = 0 \quad -1 \text{ при.} \quad \textcircled{v}$$

Посмотрим  $f(x) = x^2 + 8x - 4$

$$\beta = 4;$$

$$f(x) = x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$\Delta = 32 \quad x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{32}}{2} \quad x_1 + x_2 = \boxed{-4}$$

$$\beta = -4$$

$$f(x) = x^2 - 4x - 4 = 0 \quad \Delta = 32 \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} \quad \boxed{x_1 + x_2 = 14}$$

Ответ:  $\pm 4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

1)  $f(x) = 2x^2 - 1$  решение.

2)  $f(x) = -\varphi$  - 1 решение

Получаем:

1)  $x^2 + bx + c = 2x^2$

$x^2 - bx - c = 0$  - имеет 1 решение, когда  $D=0$ ,

$D = b^2 + 4c = 0$ .

2)  $x^2 + bx + c = -\varphi$

$x^2 + bx + c + \varphi = 0$

$D = b^2 - 4(c+\varphi) = 0$

Получаем:

1)  $b^2 + 4c = 0 \quad b^2 = -4c$

2)  $b^2 - 4(c+\varphi) = 0 \quad -4c - 4\varphi - 32 = 0 \quad -4c = 32 \quad \underline{c = -8}$

Из первого:

$b^2 - 32 = 0 \quad b = \pm 4\sqrt{2}$

Получаем:  $f(x) = x^2 \pm 4x - 8$

Проверка при  $b = -4\sqrt{2}$

$x^2 - 4x - 8 = -\varphi$

$x^2 - 4x + 8 = 0 \quad (x-2)^2 = 0 \quad \text{✓}$

$x^2 - 4x - 8 = 2x^2 - 1$  реш.

$x^2 + 6x + 7 = 0$

$(x+2)^2 = 0 \quad \text{✓}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$n = 2^{101} \cdot 3^{500} = x \cdot y. \quad y : x$$

$$\sqrt{x = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1}} \quad \text{и} \quad y = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2}$$

При орга.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 101 \\ \beta_1 + \beta_2 = 500 \end{cases} \quad \text{и} \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 \quad \beta_1 \leq \beta_2$$

Тогда выбираем  $\alpha_1$ , потому что  $\alpha_1$  - это количество отдельных способов, а  $\alpha_2$  - это количество способов, при которых  $\alpha_1$ .

$\alpha_1 \leq \alpha_2$  получаем, что  $\alpha_1 \in [0; 200]$  - 201 способ

С  $\beta_1$  аналогично, но упрощенно:

$\beta_1 \in [0; 250] = 251$  способ

Из этого, что  $\text{HOD}(2,3) = 3$  от деления на 2 не зависит деление на 3, и наоборот

Поэтому ответ:  $251 \cdot 201 = 50451$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$(1) \frac{x-1}{y+1} > \frac{3}{7} \frac{y-1}{y+1}$$

$$\text{Уз } (3) y = x^3$$

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{3(y-1)}{y(y+1)} > 0.$$

$$2(x-1)(y+1) - 3(y-1)(x+1) > 0.$$

$$\begin{matrix} \text{V} \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{VI} \\ 0 \end{matrix}$$

no OГР

$$2(xy - y + x - 1) - 3(xy - x + y - 1) > 0.$$

$$5xy - 10y + 10x - 6 > 0 \quad | : 2$$

$$2xy - 5y + 5x - 3 > 0$$

$$y(2x-5) + \frac{5}{2}(2x-5) + \frac{25}{2} - 2 > 0$$

$$(2x-5)(y+\frac{5}{2}) > -\frac{21}{2}$$

$\begin{matrix} \text{VII} \\ 0 \end{matrix}$

$$1) x=0$$

$$\begin{matrix} x > 0 \\ \text{no OГР} \end{matrix}$$

$$2) x=1$$

$$\begin{matrix} x \neq 1 \text{ no} \\ \text{OГР} \end{matrix}$$

$$3) x=2$$

$$4) x > 2$$

$$\begin{matrix} y \in \text{OГР} \\ \text{всем} \end{matrix}$$

Рассмотрим случаи.

$$(2-3) x \in (2; 31] \quad (3) y = x^3$$

Поэтому  $x$  однозначно опред.  $y$ .  $\text{OГР}$  вариантов



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Расшифруй 3)  $x=2$ .

$$(4-5)(y + \frac{5}{2}) > -\frac{21}{2}$$

$$y + \frac{5}{2} < \frac{21}{2}$$

$$y < 8$$

$$\begin{cases} y \neq 1 \\ y > 0 \end{cases} \quad y \in [2; 8] - 6 \text{ чисел.}$$

II.0 где  $x=2$  - 6 чисел  $y$ .

Ответ:  $y = x^3$  - где (I)  $y > 8$  - не подходит.

III.0. Ответ: 29.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$(1) \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 6 \log_{xy} \left(\frac{1}{16}\right) = 0$$

$$(1) \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}$$

$$(2) x < 31$$

ОГРН:

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$x \neq 1$$

$$y \neq 1$$

$$a = \log_x 2 \quad b = \log_y 2$$

Преобразовать (1), нач.

$$\log_x 2 + 9 \log_y 2 + 16 \log_{xy} 2 = 0$$

$$\log_x 2 + \frac{9 \log_x 2}{\log_y 2} - \frac{16 \log_x 2}{\log_y 2} = 0$$

$$\log_x (xy) = \log_x x + \log_x y = 1+b$$

Если  $b=0$ :

$$\log_x y = 0.$$

$$y=1 \quad x-\text{любое.}$$

$\emptyset$  но ОГРН.

$$a + \frac{9a}{b} - \frac{16a}{b+1} = 0$$

$$a \left( 1 + \frac{9}{b} - \frac{16}{b+1} \right) = 0$$

$$a \left( \frac{b^2 + b + 9b + 9 - 16b}{b(b+1)} \right) = 0$$

$$a \left( \frac{b^2 - 6b + 9}{b(b+1)} \right) = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b-3=0 \\ b(b+1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a \left( \frac{b^2 - 6b + 9}{b(b+1)} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \log_x 2 = 0 \\ \log_x y = 3 \\ b(b+1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \emptyset \\ y = x^3 \\ b \neq -1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4:

$$\sqrt{a} = \frac{a^2 \cdot b^2}{3}$$

$$\frac{n}{a} = b^2 \quad b = \sqrt{\frac{n}{a}}$$

$$a = 3 \quad \text{или} \quad a = 12.$$

$a=3$ : Поставим  $b(1)$

$$12 = 3(3-b)^2 = 3(b-3)^2$$

$$b = (b-3)^2 \quad b-3 = \pm 2. \quad b = 1 \\ b = 5.$$

III. и.  $a < b$ , то можем пары  $(3;5)$

$a=12$ : Поставим  $b(1)$

$$16 = (b-a)^2$$

$$b-12 = \pm 4 \quad b = 5 \\ b = 16$$

III. и.  $a < b$ , то возможны пары  $(12,16)$

Итого ответ  $(3;5); (12;16); (12;16), (3;5), (5;3)$   
 $(16;12)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$a, b \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a, b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \cdot \max(a, b) = \text{НОД}(a, b) \end{cases}$$

1)  $a > b$ .

$$\begin{aligned} (1) \quad & 4b = 3(a-b)^2 \\ (2) \quad & 3a = \text{НОД}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)} \end{aligned}$$

$$(1) \quad 3 \cdot \text{НОД}(a, b) = b = 3 \cdot \text{НОД}(a-b, b) \Leftrightarrow \frac{b}{3} = \text{НОД}(a-b)$$

из (1)  $\exists$  к.  $\text{НОД}(b, 3) = 1$ , т.к.

$$4b \vdots (a-b)^2$$

т.к.  $\frac{b}{3} = \text{НОД}(a-b, b)$  можно понять, что  $a-b = \frac{b}{3} \cdot k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$  и  $k \neq 0$ .

Доказательство:  $b | 0$

$$4b = \frac{b^2}{3} \cdot k^2 \quad | \quad b \neq 0, b \in \mathbb{N}$$

$$\frac{12}{b} = k^2 \quad k = \pm \sqrt{\frac{12}{b}}, \text{ т.к. } k \in \mathbb{Z}$$

, т.к.  $b = 3$  или  $b = 12$

$b=3$

$b \neq 12$

$b=2$

$b=1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.










СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

загадка

$$b=3, \text{ то}$$

$$4 \cdot 3 = 3(a-3)^2$$

$$\text{При } a-3 = \pm 2 \quad a=1 \quad a=5.$$

III. к.  $a > b$ , но проверим пару (5, 3) <sup>об.</sup>  
 $12 = 3 \cdot 2^2$   $\text{Вопрос}$

$$3 \cdot 5 = \text{НОД}(53) - \checkmark$$

Часть 2:  $b=12$ ;  $12=(a-3)^2$

$$16 = (a-12)^2$$

$$a-12 = \pm 4 \quad \begin{cases} a=8 \\ a=16 \end{cases}$$

III. к.  $a > b$ , то в ответе  $(16, 12)$

III. Тогда  $a < b$ ;  $3(b-a)^2$

$$\text{Тогда: } 16 \cdot a = 3(a-b)^2$$

$$3b < \text{НОД}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)}$$

$$\text{НОД}(a, b) = \frac{a}{3} = \text{НОД}(a, b-a)$$

III. о.  $b-a = \frac{a}{3} \cdot k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$  и  $k \neq 0$ .

Проверим:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

ровно 2 решения

$$(1) \frac{1}{(y-x^2-x-1)(x^2-3xy+4y^2)}(y+x-1)=0.$$

$$(2) \quad y = (2a+1)x - a^2 + 1$$

(1) Несколько изобразим на координах:

$y = x^2 + x + 1$  — парабола ветви вверх.

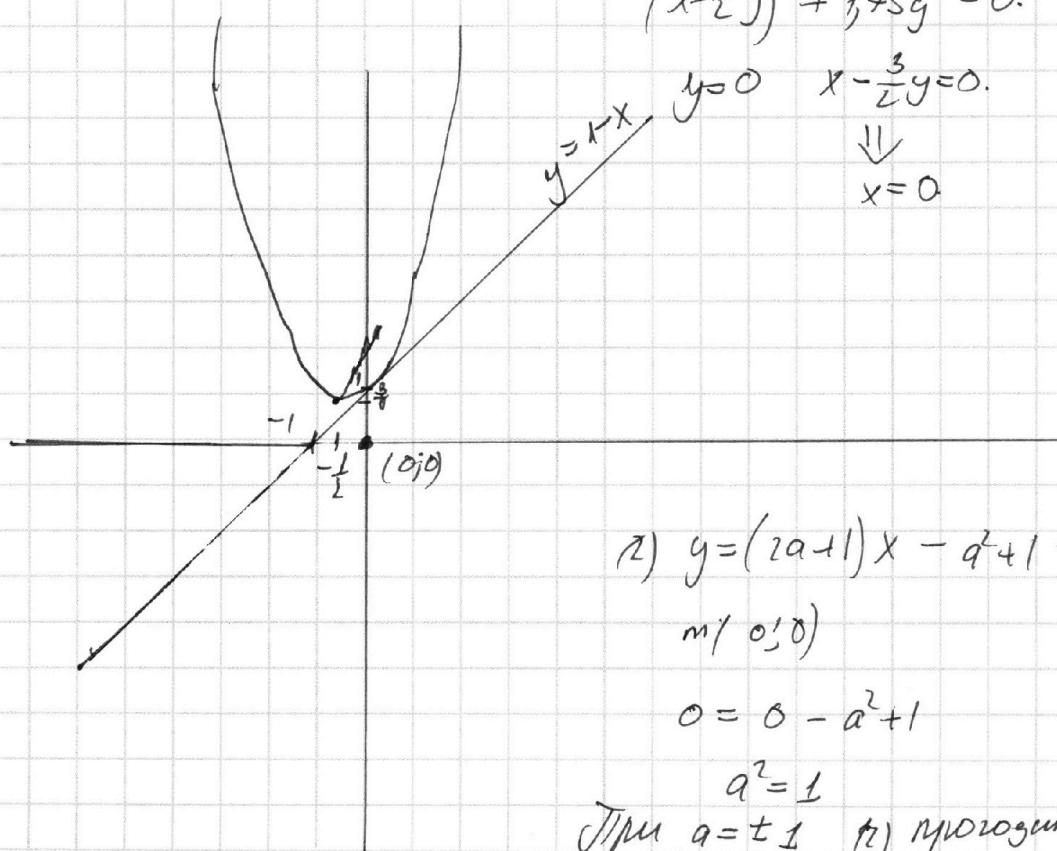
$y = 1 - x$  — прямая

$$x^2 - 3xy + 4y^2 = (x - \frac{3}{2}y)^2 - (\frac{3}{2}y)^2 + 4y^2 = 0$$

$$(x - \frac{3}{2}y)^2 + \frac{7}{4}y^2 = 0.$$

$$y=0 \quad x - \frac{3}{2}y = 0.$$

$$\Downarrow \\ x=0$$



(2)  $y = (2a+1)x - a^2 + 1$  — прямая

$m \neq 0; 0$

$$0 = 0 - a^2 + 1$$

$$a^2 = 1$$

При  $a = \pm 1$  т.к.) проходит через  $(0, 0)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим при каких  $a$  синий график будет

пересекать  $y = (2a+1)x - a^2 + 1$ .

$$\text{и } y = x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x + 1 = (2a+1)x - a^2 + 1$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0 \quad D=0 \Rightarrow \text{всегда будет ровно 1 пересечение}$$

$$(x-a)^2 = 0$$

Синий график  $y = t-x$  всегда будет пересечением

и кроме этого  $2a+1 = -1 \quad a = -1$

т.е. при  $a=1$  будет пересечение с  $x^2 + x + 1 = y$ .

$$\text{С } y = t-x$$

и синий  
(0,0)

т.е. при  $a=-1$

$$y = -x$$

$$\begin{cases} y = -x & -\text{такое пересечение.} \\ y = x^2 + x + 1 & x = -1 -\text{пересечение} \\ (0,0) & -\text{пересечение.} \end{cases}$$

$a = -1$  подходит!

По всем оставшимся  $(2)$  будут линиями.

1 точку пересечение с  $y = x^2 + x + 1$  и 1 точку,

пересечение с  $y = t-x$  при этом они все будут совпадать. Ответ:  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$



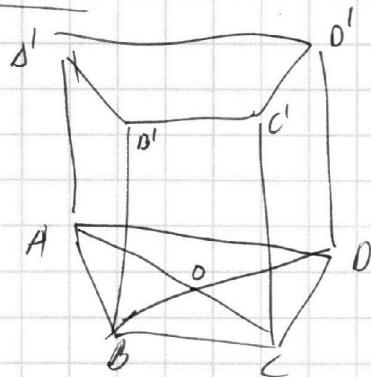
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
1 из \_\_\_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7



$$AO = 1$$

$$CO = 6$$

$$BO = 2$$

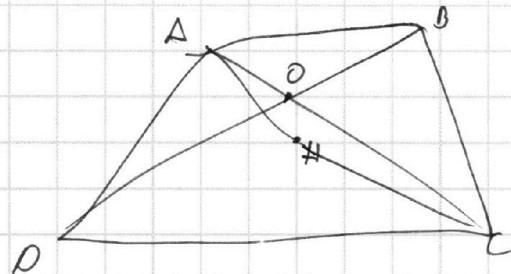
$$AP = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$AQ = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$CM = \frac{10\sqrt{3}}{9}$$

$$CN = 2\sqrt{5}.$$

Рисунок H - проекция фигуры сферы на ABCD



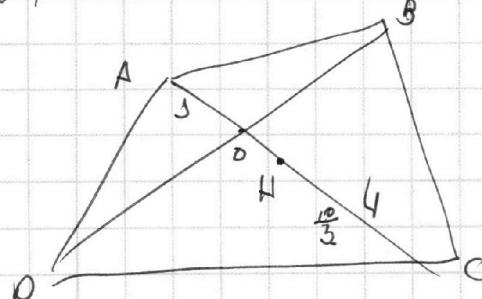
Рисунок

$$AH = \sqrt{AP \cdot AO} = \frac{s}{3}$$

$$CH = \sqrt{CO \cdot CN} = \frac{10}{3}$$

И.и  $AO + CO = s$ . и  $AH + HC = s$ .

И.и H лежит на AC.



И.и - Есреда вписанда  
по ова касатка.  
запад.  $BCB'C'$  и

$DCDC'$ , то центр  
лежит на  
бисектиориц обеих угла  $A$  и  $C$ .

$\Rightarrow AC$  - бисектиорица обеих угла  $A$  и  $C$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

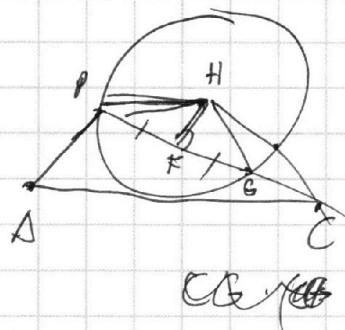
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

$$h=5, S_{ABCO} = 10$$

$$V_{ABCD'A'C'D'} = S_{ABCO} \cdot h = 150$$



Проекция на  $PCA'C'$

$HF$  — искомое расстояние

$$HF = \frac{s}{2}$$

$$x/x$$

$$x = CG$$

$$CG \neq x$$

$$\text{Ответ: } x = 50$$

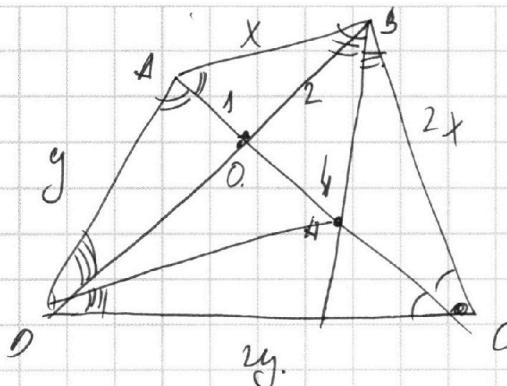


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

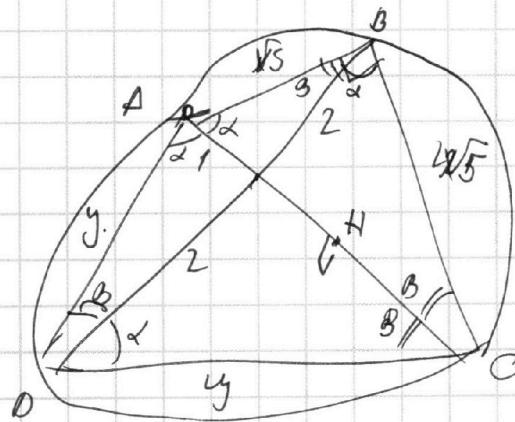


По сб. без биссектрисы.

$$\frac{AH}{HC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$$

Позиционируем основание, чтобы  $\triangle ABC$  лежала в центре сферы.  
При этом получим отсеченный гипотенузу.



$BD$  и  $DC$  - хорды

$$\Rightarrow DO \cdot DC = DO \cdot DB$$

$$OD = 2,$$

$$\angle ADB = 90^\circ, \text{ т.к. } \angle AOB = 2\angle ADB$$

$$D^2 = DO^2 + OX^2 \Rightarrow 4 = 4 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

$\triangle ABC$  равен  $\triangle BCD$  по симметрии и  
второму признаку, т.к.  $S_{BDC} = 2S_{ABC}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot r$$

$AC$  - диаметр сферы, т.к.  $R = \frac{5}{2}$

$\triangle ABC$  вписан в сферу и имеет общее основание то  
высота призмы равна  $2R = 5$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$6 \quad \begin{cases} (y - x^2 - x + 1)^c (x^2 - 3xy + 4y^2) (3 + x - 1) = 0, \\ y = (2a+1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

проверка 2 лин.

(x, y)

$$2a+1 = 1$$

$$a=0$$

$$y = x + 1$$

$$x^2 + x + 1 - x + 1$$

$$x < 0.$$

$$a = \frac{1}{2} - \text{некоэдим.}$$

$$y = 3x -$$

$$y = x^2 + x + 1 \quad \text{и} \quad y = (2a+1)x - a^2 + 1$$

если 1  
пересечени.

$$x^2 + x + 1 = (2a+1)x - a^2 + 1$$

-~~2ax~~ - ~~2x~~

$$x^2 + x(1 - 2a - 1) + a^2 - 1 = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

$$(x - a)^2 = 0 \quad D = 0 = (a^2 - 0)(a^2 - 1) = 2 = 0 \quad a \neq 0$$

$$x < a.$$

$$y = 1/x - 2/4$$

$$y = x^2 + x + 1$$

$$4/x - 2 = x^2 + x + 1 \quad x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad x = 5$$

$$1) \quad 0 = s: \quad x^2 + x + 1$$

$$2) \quad a = -s: \quad x^2 + 10x + 25 = 0$$

$$1) \quad y = 1/x - 2/4$$

$$y = x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x + 1 = 1/x - 2/4$$

-2/4

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$D = 100 - 4 \cdot 25 =$$

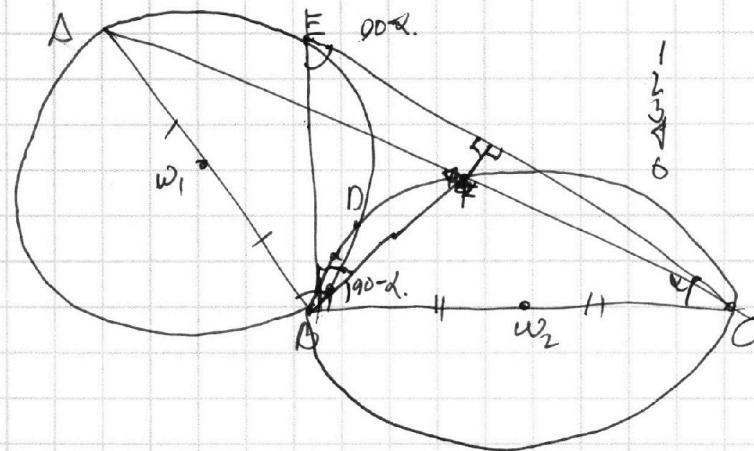


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{BE}{BO} \leftarrow ?$$

$$\omega_3 \angle BCE = \frac{3}{3}$$

$$n = 2^{401} \cdot 3^{800}$$

$$5y$$

$$y : x$$

$$HOD(x,y) = x$$

$$x = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1}$$

$$y = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2}$$

$$\begin{array}{l} \text{if } \alpha_1 < \alpha_2 \text{ then } \\ \quad x^{\alpha_1} < x^{\alpha_2} \text{ and } \beta_1 < \beta_2. \end{array}$$

$$d_1 = (101 - \alpha_2) \quad \alpha_2 \in [0, 100]$$

$$\beta_1 = 500 - \beta_2 \quad \beta_2 \in [0, 250].$$

$$x=2 \quad y=2 \cdot 3^{\frac{3}{8}} = 8$$

$$x=1 \quad y=108.$$

$$x=3 \quad y=36.$$

$$x=6 \quad y=18.$$

$$x=6 \quad y=27.$$

$$n = 2^3 \cdot 3^6 =$$

$$n = 2^2 \cdot 3^3 = \frac{100}{18}$$

$$2^2 \cdot 3^2$$

$$2^2 \cdot 3^1$$

$$\cancel{2^1}$$

$$(100)^{\frac{1}{18}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

(3)

$$x > 0 \quad y > 0$$

$$\log_{xy} 2 + 3 \log_y 8 + 6 \log_{xy} 2^{-8} = 0$$

$$\log_{xy} 2 + 3 \log_y 8 - 8 > 0$$

$$x \leq 31$$

$$0 < y \leq 31^3$$

$$\alpha = \log_x 2$$

$$\beta = \log_x y.$$

$$\alpha + \frac{9\beta}{6} + 16 = \frac{\log_x 2}{\log_x y}$$

$$\log_x x^3 = 3.$$

$$\alpha + \frac{9\beta}{6} - \frac{16\beta}{\beta+1} = 0.$$

$$\alpha \left( 1 + \frac{9}{6} - \frac{16}{\beta+1} \right) < 0$$

$$\frac{(\beta+1)\beta + 9(\beta+1) - 16\beta}{\beta(\beta+1)} = 0$$

$$\beta^2 + \beta + 9\beta + 9 - 16\beta = 0$$

$$\beta^2 - 8\beta + 9 = 0 \quad (\beta-3)^2 = 0 \quad \beta = 3$$

$$\begin{aligned} \log_x y &= 3 \\ y &= x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} x \neq 1 \\ y \neq 1 \end{array}$$

$$\beta + \frac{5}{2}$$

$$\frac{10+5}{2}$$

$$\log_x(xy)$$

$$\log_x y + 1$$

$$\beta + 1$$

$$(2x-5y+5x-5) - (3xy-3x+3y-3) = 0$$

$$4xy - 10y + 10x - 6 \geq 0$$

$$2xy - 5y + 5x - 2 \geq 0$$

$$y(2x-5) + \frac{5}{2}(2x-5) \geq 0$$

$$(2x-5)(y+\frac{5}{2}) \geq 0$$

$$-2x + 25 \geq 0$$

$$2x - 25 \leq 0$$

$$2x - 25 \geq 0$$

$$\log_x 2 = 0 \quad x \stackrel{!}{=} 2 \quad \emptyset$$

$$(2x-5)(y+\frac{5}{2}) > \frac{-21}{2}$$

$$\beta \neq 0 \quad \beta + 1 \neq 0.$$

$$x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2$$

$$x > 2 \quad \beta > 0$$

$$\log_x y = 3$$

$$y = x^3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} q \cdot \min(a, b) = 3(a-b)^2 \\ 3 \cdot \max(a, b) = \text{НОК}(a, b) \end{cases}$$

$\rightarrow a > b:$

$$\begin{cases} 10b = 3(a-b)^2 \\ 3a = \text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)} \end{cases}$$

$$3a \cdot \text{НОД}(a, b) = ab \quad \text{НОД}(a-b, b) = b$$

$$\text{НОД}(a-b, b) = \text{НОД}(a, b) = \frac{b}{3}$$

$$a > b \quad b > 0$$

$$q, b \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{l} k=5, \\ k+3 \\ k+6 \end{array} \left| \begin{array}{l} a+b \\ 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} u \leq 12 \\ u \leq 18 \\ u \leq 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} k \leq 6, \\ k+3 \\ k+6 \end{array} \left| \begin{array}{l} (a+b) \\ 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} u \leq 18 \\ u \leq 12 \\ u \leq 12 \end{array}$$

$$b: (a+b) \cdot \frac{b}{3} \cdot k \Rightarrow$$

$$\frac{a+b}{3} \cdot k = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} a+b=3 \\ k=1 \\ a+b=1 \\ k=3 \end{array} \right]$$

$$a-b = \frac{b}{3} \cdot k \quad b \mid 3.$$

$$1) \begin{cases} a+b=3 \\ a-b=\frac{b}{3} \end{cases} \quad u=1 \quad a = \frac{4}{3}b \quad u \nmid b. \quad \left| \begin{array}{l} a+b=3 \\ b \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \frac{a+b}{3} \\ k \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{3}b+b=3, \\ 4b+3b=9. \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{9}{7} \\ \frac{12}{7} + \frac{9}{7} \end{array}$$

$$2) \begin{cases} a+b=1 \\ a-b=b \end{cases} \quad \begin{array}{l} 7b=9, \\ b=\frac{9}{7} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{12}{7} + \frac{9}{7} \\ \frac{21}{7}=3. \end{array}$$

$$a=2b.$$

$$3) \frac{a+b}{3}k=2$$

$$3b=1 \quad b=\frac{1}{3} \quad \emptyset$$

$$\begin{array}{l} u=1 \\ a+b=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} u \mid 3 \\ a+b=2 \end{array}$$

$$a+b=6$$

$$a+b=4$$

$$a=\frac{9}{3}b$$

$$a+b=6$$

$$\begin{array}{l} \frac{6}{3}b+b=4 \\ 4b+3b=12 \end{array}$$

$$a+b=6$$

$$\frac{18}{3}b+3b=12$$

$$4b+3b=12$$

$$4b=12$$

$$4b=12$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 2^{601} \cdot 3^{500} = xy. \quad y : x \quad \text{и } \frac{1}{2^1} = 2^{-1}$$

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 6 \log_{xy} \frac{1}{10} = 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7} \end{cases} \quad \begin{array}{l} y > 0 \\ y > 0 \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} x, y \in \mathbb{Z} \\ \log_y 8 = \frac{3 \log_x 2}{\log_{xy} 2} \end{array}$$

$$\log_{x^2} = \max \log_{32} 2 = \frac{1}{3} \log_2 2 = \max < \frac{1}{5}$$

$$\frac{(x-1)(7y+7) - (3y-3)(x+1)}{(x+1)(7y+7)} \cdot \frac{\log_{x^2} 2}{\log_{xy} 2} - 16 \cdot \frac{\log_{x^2} 2}{\log_y (xy)} = 0$$

$$\begin{aligned} & 0. \quad a = \log_{x^2} 2 \quad \log_{xy} 2 = \frac{\log_2 y}{\log_2 x} \quad \log_y x + \log_x y = 1 + \log_{xy} 2 \\ & 2xy - 7y + 7x - 7 \\ & -(3xy - 3x + 3y - 3) > 0 \quad b = \log_{xy} 2 = \log_x y \end{aligned}$$

$$9xy + 10x - 10y - 48 + \frac{9a}{b} - 16 \cdot \frac{a}{b+1} = 0$$

$$\begin{array}{r} +28 \\ \hline +36 \\ \hline 04 \end{array}$$

$$\frac{ab+9a}{b} - \frac{16a}{b+1} = 0$$

$$\begin{array}{r} -64 \\ \hline 36 \\ \hline 28 \end{array}$$

$$\frac{(ab+9a)(16b+1)}{b(b+1)} - 16ab > 0 \quad \begin{array}{r} x^{251} \\ \hline 201 \\ \hline 251 \\ \hline 000 \\ \hline 50451 \end{array}$$

$$ab^2 + 9ab + ab + 9a = 0$$

$$\begin{array}{r} 502 \\ \hline 50451 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x=2 \\ 1=2 \neq x \end{array}$$

$$ab^2 - 8ab + 9a = 0$$

$$\log_{x^2} 2 < 0$$

$$a=0 \quad b^2 - 8b + 9 = 0 \quad D = 64 - 36 = 28.$$

$$b_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \quad f(x) = x^2 + bx + c$$

$$x^2 + bx + c = 2x^2 - 1 \text{ усил.}$$

$$x^2 + bx + c = -8 - 1 \text{ реш.}$$

Найдем  $\boxed{-8}$ .

$$x^2 - bx - c = 0$$

$$\Delta = 0 \quad \Delta = b^2 + 4ac = 0.$$

$$x^2 + bx + c + 8 = 0$$

$$\Delta = 0. \quad \Delta = b^2 - 4(c+8) = 0$$

$$\begin{cases} b^2 + 4c = 0 & b^2 = -4c \\ b^2 - 4(c+8) = 0 & \end{cases}$$

$$b^2 = 4c$$

$$-4c - 4c - 32 = 0$$

$$-8c = 32 \quad c = -4$$

$$b^2 = -4 \cdot -4 = 16 \quad b = \pm 4$$

$$x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$\Delta = 16 + 16 = 32$$

$$+ 4 \pm \sqrt{32}$$

$$x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\Delta = 32$$

$$x_2 = \frac{4 + \sqrt{32}}{2} + \frac{4 - \sqrt{32}}{2} = \boxed{4}$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{32}}{2}$$

$$-\frac{4 + \sqrt{32}}{2} + -\frac{4 - \sqrt{32}}{2} = \boxed{-4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!