



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = -2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -6$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0, \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}, \\ y \leq 24. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$.
6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 11$, $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $AQ = 2\sqrt{5}$, $CM = 4\sqrt{5}$, $CN = 5\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N/1

$$f(x) = x^2 + px + q$$

$$1) f(x) = -2x^2 \Rightarrow x^2 + px + q = -2x^2 \Rightarrow 3x^2 + px + q = 0 - \text{имеет}$$

$$\text{единственное решение} \Rightarrow D = 0; D = p^2 - 4 \cdot 3 \cdot q = p^2 - 12q = 0$$

$$2) f(x) = -6 \Rightarrow x^2 + px + q = -6 \Rightarrow x^2 + px + (q+6) = 0 - \text{имеет}$$

$$\text{единственное решение} \Rightarrow D = 0; D = p^2 - 4(q+6) = 0$$

$$3) \begin{cases} p^2 - 12q = 0 & (1) \\ p^2 - 4(q+6) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow -12q + 4(q+6) = 0 \Rightarrow -12q + 4q + 24 = 0$$

$$\Rightarrow -8q = -24 \Rightarrow q = 3$$

$$p^2 = 12q = 12 \cdot 3 = 36 \Rightarrow p = \pm 6$$

$$\text{Значит, } f(x) = x^2 + 6x + 3 \text{ или } f(x) = x^2 - 6x + 3$$

$$4) f(x) = x^2 + 6x + 3 = 0, D = 36 - 4 \cdot 3 = 36 - 12 = 24$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -3 \pm \sqrt{6} \Rightarrow x_1 + x_2 = (-3 + \sqrt{6}) + (-3 - \sqrt{6}) = -6$$

$$5) f(x) = x^2 - 6x + 3 = 0, D = 36 - 12 = 24$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{2} = 3 \pm \sqrt{6} \Rightarrow x_1 + x_2 = (3 + \sqrt{6}) + (3 - \sqrt{6}) = 6$$

Ответ: ± 6 .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$n = 5^{151} \cdot 7^{600} = x \cdot y, \quad y : x$$

$$y : x, \quad 5/7 \text{ и } 7/5 \Rightarrow x = 5^p \cdot 7^m, \quad y = 5^a \cdot 7^b$$

$$\text{т.к. } y : x, \text{ то } a \geq p, \quad b \geq m$$

$$\text{Рассмотрим } 5^p \text{ и } 5^a, \quad a \geq p, \text{ тогда } 5^a : 5^p; \quad a + p = 151$$

$$\Rightarrow \text{при выборе какого-либо } a \quad p = 151 - a. \text{ Значит, при } a = 151:$$

$$p = 0, \text{ при } a = 150: p = 1, \text{ при } a = 149: p = 2, \dots, \text{ при } a = 76: p = 75 -$$

$$\text{все случаи, когда } a \geq p \text{ и } a + p = 151. \text{ Здесь } 151 - 76 + 1 = 76$$

вариантов.

$$\text{Рассмотрим } 7^m \text{ и } 7^b, \quad b \geq m, \text{ тогда } 7^b : 7^m, \quad b + m = 600.$$

$$\Rightarrow \text{при одном } b \text{ } m \text{ однозначно определяется как } m = 600 - b. \text{ Значит,}$$

$$\text{при } b = 600: m = 0, \text{ при } b = 599: m = 1, \dots, \text{ при } b = 300: m = 300 -$$

$$\text{все случаи, когда } b \geq m \text{ и } b + m = 600. \text{ Здесь } 600 - 300 + 1 = 301$$

вариант.

$$\text{Значит, всего способов представить } n = 5^{151} \cdot 7^{600} \text{ как } x \cdot y,$$

$$\text{если } y : x: \quad 76 \cdot 301 = 22\,876 \text{ способов, т.к. } y = 5^a \cdot 7^b -$$

$$\text{а можно выбрать } 76 \text{ способами, } b - 301 \text{ способами, а число } x = 5^p \cdot 7^m$$

$$\text{определяется однозначно при выборе } y = 5^a \cdot 7^b.$$

Ответ: 22 876 способов





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0 \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1} \\ y \leq 24 \end{cases}$$

$$\text{О.Д.З.} \begin{cases} x \neq 0, x \neq 1 \\ y > 0, y \neq 1 \end{cases}$$

$$1) 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0$$

$$3 \log_x 3^3 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} 3^{-2} = 0$$

$$27 \cdot 9 \log_x 3 + \log_y 3 - 16 \log_{xy} 3 = 0$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 xy} = 0$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 x + \log_3 y} = 0$$

замена $a = \log_3 x, b = \log_3 y$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} - \frac{16}{a+b} = 0, \quad a \neq 0, b \neq 0, a \neq -b$$

$a \neq -b$, т.к. $\log_3 x = -\log_3 y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \Leftrightarrow xy = 1$, но по О.Д.З. $xy \neq 1$

$$\frac{9b+a}{ab} - \frac{16}{a+b} = 0$$

$$\frac{(9b+a)(a+b) - 16ab}{ab(a+b)} = 0 \Leftrightarrow (9b+a)(a+b) - 16ab = 0$$

$$9ab + 9b^2 + a^2 + ab - 16ab = 0$$

$$a^2 - 6ab + 9b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-3b)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 3b, \quad \log_3 x = 3 \cdot \log_3 y \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 y^3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow 3^{\log_3 x} = 3^{\log_3 y^3} \Leftrightarrow x = y^3$$

$$2) \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}$$

$$\frac{3y+3}{y-1} < \frac{7y^3+7}{y^3-1}$$

$$\frac{3(y+1)}{y-1} - \frac{7(y^3+1)}{y^3-1} < 0$$

$$\frac{3(y+1)}{y-1} - \frac{7(y+1)(y^2-y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)} < 0$$

$$\frac{3(y+1)(y^2+y+1) - 7(y+1)(y^2-y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)} < 0$$

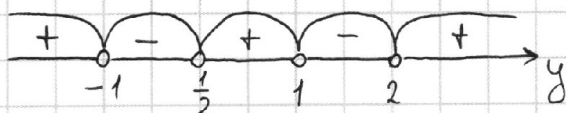
$$\frac{(y+1)(3y^2+3y+3 - 7y^2+7y-7)}{(y-1)(y^2+y+1)} < 0$$

$$\frac{(y+1)(-4y^2+10y-4)}{(y-1)(y^2+y+1)} < 0$$

$$\frac{(y+1)(2y^2-5y+2)}{(y-1)(y^2+y+1)} > 0$$

$$y^2+y+1 > 0, \text{ м.к. } \Delta = 1-4 < 0 \Rightarrow (y+1)(y-1)(2y^2-5y+2) > 0$$

$$2y^2-5y+2 - y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-4 \cdot 4}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\Rightarrow y \in (-\infty; -1) \cup (\frac{1}{2}; 1) \cup (2; +\infty)$$

$$\text{м.к. } y > 0, \text{ то } y \in (\frac{1}{2}; 1) \cup (2; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \begin{cases} y \in (\frac{1}{2}; 1) \cup (2; +\infty) \\ y \leq 24 \end{cases} \Rightarrow y \in (\frac{1}{2}; 1) \cup (2; 24].$$

$$4) x = y^3, \quad x > 0 \text{ и } x \neq 1, \quad x \text{ и } y - \text{целые числа}$$

$$\Rightarrow y = 3, x = 3^3; \quad y = 4, x = 4^3; \quad y = 5, x = 5^3; \dots y = 24, x = 24^3 -$$

подходят 22 пары целых чисел (x, y) .

Ответ: 22.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{4}$

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a-b)^2 \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

Пусть $a \cdot \min(a; b) = a$, $\max(a; b) = b$, тогда:

$$\begin{cases} 4a = 5(a-b)^2 \\ 5b = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

$$1) \quad 4a = 5(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$4a = 5a^2 - 10ab + 5b^2$$

$$5a^2 + (-4 - 10b)a + 5b^2 = 0 \Rightarrow 5a^2 - 2(5b+2)a + 5b^2 = 0$$

$$D = 4(5b+2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5b^2 = 4(25b^2 + 20b + 4) - 100b^2 =$$

$$= 80b + 16 = 16(5b+1) \Rightarrow a = \frac{2(5b+2) \pm 4\sqrt{5b+1}}{10} =$$

$$= \frac{5b+2 \pm 2\sqrt{5b+1}}{5}$$

$$a = \min(a; b) \Rightarrow a < b. \text{ Тогда при } a = \frac{5b+2 \pm 2\sqrt{5b+1}}{5} \geq b$$

$$2 + 2\sqrt{5b+1} > 0$$

$$\text{при } a = \frac{5b+2 - 2\sqrt{5b+1}}{5} \geq b \Rightarrow 2 - 2\sqrt{5b+1} \geq 0$$

$$a < b, \text{ если } 2 - 2\sqrt{5b+1} < 0 \Rightarrow \sqrt{5b+1} > 1 \Leftrightarrow 5b+1 > 1 \Leftrightarrow b > 0,$$

$$b \in \mathbb{N} \Rightarrow a = \frac{5b+2 - 2\sqrt{5b+1}}{5}$$

$$2) \quad 5b = \text{НОК}(a; b) \Rightarrow 5b = \text{НОК}\left(\frac{5b+2 - 2\sqrt{5b+1}}{5}; b\right)$$

$$5b : b, \quad 5b : \frac{5b+2 - 2\sqrt{5b+1}}{5} \Rightarrow 5b = \frac{5b+2 - 2\sqrt{5b+1}}{5} n,$$

$$\text{где } n \in \mathbb{N}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$10b = 25b = 5b(5-n) = 5bn + 2n - 2n\sqrt{5b+1}$$

$$5b(5-n) - 2n = -2n\sqrt{5b+1} \Leftrightarrow 2n - 5b(5-n) = 2n\sqrt{5b+1}$$

$$\Leftrightarrow (2n - 5b(5-n))^2 = 4n^2(5b+1), \quad \&$$

$$4n^2 - 20bn(5-n) + 25b^2(5-n)^2 = 20bn^2 + 4n^2$$

$$4n^2 - 100bn + 20b^2n^2 + 25b^2(25 - 10n + n^2) = 20bn^2 + 4n^2$$

$$-100bn + 25^2b^2 - 250b^2n + 25b^2n^2 = 0 \quad | :25$$

$$-4bn + 25b^2 - 10b^2n + b^2n^2 = 0 \Rightarrow b(25b - 10bn + bn^2 - 4n) = 0$$

$$b \neq 0, \quad 25b - 10bn + bn^2 - 4n = 0 \Rightarrow b(bn^2 - 10n + 25) = 4n$$

$$\Rightarrow b = \frac{4n}{(n-5)^2}$$

$$3) \quad b \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{функция } f(n) = \frac{4n}{(n-5)^2}, \quad (n-5)^2 \downarrow \text{ при } n \in (-\infty; 5),$$

$$(n-5)^2 \uparrow \text{ при } n \in (5; +\infty).$$

n	b
1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{3}{9}$
3	4 3
4	16
5	-
6	24
7	7
8	$\frac{32}{9}$

n	b
9	$\frac{9}{4}$
10	$\frac{8}{5}$
11	$\frac{11}{9}$
12	$\frac{48}{49}$
...	

$$\text{при } n \in (-\infty; 5); \quad \text{при } n \in (5; +\infty)$$

$$\text{ф-ция } f(n) \downarrow \Rightarrow \text{больше}$$

$$\text{натуральных чисел не}$$

$$\text{натуральных}$$

$$\Rightarrow b = 3, \quad b = 16, \quad b = 24, \quad b = 7$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☒☐☐☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4) a = \frac{5b+2-2\sqrt{5b+1}}{5}, a \in \mathbb{N}$$

$$b=3: a = \frac{15+2-2\sqrt{16}}{5} = \frac{17-2\cdot 4}{5} = \frac{9}{5} \text{ - не подходит}$$

$$b=16: a = \frac{82-2\sqrt{81}}{5} = \frac{82-18}{5} = \frac{64}{5} \notin \mathbb{N}$$

$$b=24: a = \frac{122-2\sqrt{121}}{5} = \frac{122-22}{5} = \frac{100}{5} = 20$$

$$b=7: a = \frac{37-2\sqrt{36}}{5} = \frac{37-12}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$\Rightarrow$ все пары $(a; b)$: $(20; 24), (24; 20), (5; 7), (7; 5)$

Ответ: $(20; 24), (24; 20), (5; 7), (7; 5)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) Пусть $(\cdot)M$ - середина BC и центр ω_2 , $(\cdot)N$ - середина AB и центр $\omega_1 \Rightarrow BM = MN = \frac{1}{2}BC = \frac{6x}{\sqrt{7}}$, $BN = ND = \frac{1}{2}AB = \frac{8x}{\sqrt{7}}$
 $\angle ABC = \angle CBE + \angle ABE = 90^\circ + \angle ABE \Rightarrow \cos \angle ABC = \cos 90^\circ \cos \angle ABE -$
 $-\sin 90^\circ \sin \angle ABE = -\sin \angle ABE = -\frac{3}{4}$

$$\Delta \triangle MBN: MN = \sqrt{BM^2 + BN^2 - 2 \cdot BM \cdot BN \cos \angle MBN} =$$

$$= \sqrt{\frac{36}{7}x^2 + \frac{64}{7}x^2 - 2 \cdot \frac{6 \cdot 8x^2}{7} \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{100}{7}x^2 + \frac{72}{7}x^2} = \frac{\sqrt{172}}{\sqrt{7}}x = \frac{2\sqrt{43}}{\sqrt{7}}x$$

м.к. $\omega_1 \cap \omega_2 = (\cdot)B, (\cdot)D$, но $MN \perp BD$. Пусть $MN \cap BD = (\cdot)P$

$$\cos \angle BMN = \frac{BM^2 + MN^2 - BN^2}{2 \cdot BM \cdot MN} = \frac{\frac{36}{7}x^2 + \frac{172}{7}x^2 - \frac{64}{7}x^2}{2 \cdot \frac{6}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{172}}{\sqrt{7}}x^2} = \frac{144}{7} \cdot \frac{2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{43}}{7} =$$

$$= \frac{144}{2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{43}} = \frac{12}{2\sqrt{43}} = \frac{6}{\sqrt{43}} \Rightarrow \sin \angle BMN = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BMN} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{36}{43}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}}$$

5) $\Delta \triangle BNP: \frac{BP}{BN} = \sin \angle BNP \Rightarrow BP = \frac{8x}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}} = \frac{8x}{\sqrt{43}}$

м.к. $MB = MD$ и $BD \perp MN$, но $BD = 2BP = \frac{12x}{\sqrt{43}}$

$$\Rightarrow \frac{BF}{BD} = 3x : \frac{12x}{\sqrt{43}} = \frac{3x \cdot \sqrt{43}}{12x} = \frac{\sqrt{43}}{4}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{43}}{4}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

$$\begin{cases} (y+x^2-4x+1)(x^2-2xy+3y^2)(y-2x+1)=0 \\ y = (-2a+4)x+a^2-1 \end{cases}$$

В первом ур-нии:

$$\begin{cases} y+x^2-4x+1=0 \\ x^2-2xy+3y^2=0 \\ y-2x+1=0 \end{cases}$$

1) $y = -(x^2-4x+1)$

$$y = (-2a+4)x+a^2-1$$

$$\Rightarrow -(x^2-4x+1) = (-2a+4)x+a^2-1$$

$$x^2-4x+1 = (-2a+4)x+a^2-1=0$$

$$x^2-2ax+a^2=0 \Rightarrow (x-a)^2=0 \Rightarrow x=a - \text{одно решение}$$

2) $x^2-2xy+3y^2=0$

$$D = 4y^2 - 4 \cdot 3y^2 = 4y^2 - 12y^2 < 0 \Rightarrow \text{нет решений}$$

3) $y = 2x-1$

$$\Rightarrow 2x-1 = (-2a+4)x+a^2-1$$

$$(2+2a-4)x = a^2 \Rightarrow (2a-2)x = a^2 - \text{одно решение}$$

Чтобы система имела ровно 2 решения, нужно, чтобы одновременно выполнялись условия: $x=a$ и $(2a-2)x=a^2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4) \begin{cases} x=a \\ (2a-2)x=a^2 \end{cases} \Rightarrow (2a-2) \cdot a = a^2 \Rightarrow 2a^2 - 2a = a^2$$

$$a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow a=0 \text{ и } a=2.$$

При этих значениях параметра a :

$$a=0: \quad x=0, \quad y=2 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow (0; -1)$$

$$a=2: \quad x=2, \quad y=2 \cdot 2 - 1 = 3 \Rightarrow (2; 3) - \text{система имеет}$$

одно решение. Значит, при значениях параметра a :

$a \in (-\infty; 0) \cup (0; 2); (2; +\infty)$ - система имеет два решения:

$$x=a \text{ и } x=\frac{a^2}{2(a-1)} \Rightarrow \text{два решения } (a; 2a-1), \left(\frac{a^2}{2(a-1)}; \frac{a^2}{a-1} - 1\right)$$

при $a=1$ второго решения не существует.

Значит, система имеет 2 решения при $a \neq 0, a \neq 1, a \neq 2$.

Ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

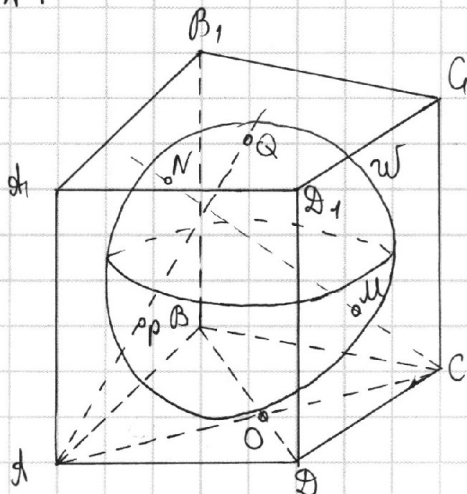
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7



Дано: $AO=1$, $BO=2$, $CO=11$,

$AP=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $AQ=2\sqrt{5}$, $CM=4\sqrt{5}$,

$CN=5\sqrt{5}$

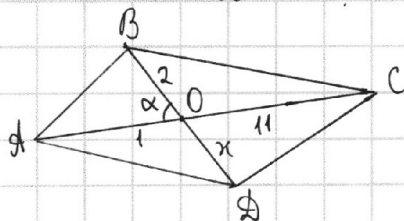
Найти: $V_{\text{призмы}}$, $g(O, (PAC))$,
 O_1 - центр ω

1) т.к. призма прямая и в неё

вписана сфера, то в основании призмы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ можно вписать окружность и высота призмы $AA_1=2r$, где r - радиус вписан. в $ABCD$ окружности. $V_{\text{призмы}} = AA_1 \cdot S_{\text{осн}}$

2) $\triangle ABCD$: описанный $\Rightarrow AB+CD=BC+AD$

$$AC=AO+OC=12$$



Пусть $OB=x$

Пусть $\angle AOB=\alpha$, тогда:

$$AB^2 = 1+4-4\cos\alpha = 5-4\cos\alpha$$

$$CD^2 = 121+x^2-22x\cos\alpha$$

$$BC^2 = 4+121+4\cdot 11\cos\alpha = 125+44\cos\alpha$$

$$AD^2 = 1+x^2+2x\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \sqrt{5-4\cos\alpha} + \sqrt{x^2+121-22x\cos\alpha} = \sqrt{125+44\cos\alpha} + \sqrt{x^2+1+2x\cos\alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

черновик

$$n = 5^{151} \cdot 7^{600} = x \cdot y, \quad y \vdots x$$

$$x = 5^a \cdot 7^m, \quad y = 5^\alpha \cdot 7^\beta, \quad a \geq n, \quad \beta \geq m$$

$$5^{151} \rightarrow 5^a \text{ и } 5^n, \quad a \geq n, \quad a+n=151$$

$$7^{600} \rightarrow 7^\beta \text{ и } 7^m, \quad \beta \geq m$$

$$\begin{array}{r} 151 \rightarrow 0 \\ 150 \rightarrow 1 \\ 149 \rightarrow 2 \\ \vdots \\ 76 \rightarrow 75 \end{array} \left. \begin{array}{l} 151-76+1=76 \\ \text{вариант } b \end{array} \right\}$$

$$234567$$

$$\begin{array}{r} 151 \\ -76 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 151 \\ -76 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$1011121314151617181920$$

$$\Rightarrow 76 \cdot 301 = 22876$$

$$x = 5^{151}$$

$$y = 7^{600}$$

$$\log_3 x = -\log_3 y$$

$$x = \frac{9}{2} - \frac{15}{2} + 2$$

$$\begin{array}{r} 301 \\ \times 76 \\ \hline 1806 \\ + 2107 \\ \hline 22876 \end{array}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

$$2 = 25 - 4 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$$

$$\begin{array}{r} 301 \\ \times 76 \\ \hline 1806 \\ + 2107 \\ \hline 22876 \end{array}$$

$$3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{3} = 0$$

$$3 \log_x 3^3 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} 3^{-2} = 0$$

$$9 \log_x 3 + \log_y 3 - 16 \log_{xy} 3 = 0$$

$$\frac{9}{1} < \frac{16}{7} = 9$$

$$24 - 3 + 1 = 22$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 x + \log_3 y} = 0, \quad \text{пусть } \log_3 x = a, \quad \log_3 y = b$$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} - \frac{16}{a+b} = 0$$

$$\frac{9b+a}{ab} - \frac{16}{a+b} = 0 \Rightarrow \frac{(9b+a)ab - 16ab}{ab(a+b)} = 0$$

$$9ab^2 + a^2b - 16ab = 0$$

$$ab(9b + a - 16) = 0$$

$$9b + a - 16 = 0 \Rightarrow a = 16 - 9b$$

$$a + 9b = 16$$

$$\log_3 x + 9 \log_3 y = 16 \Rightarrow \log_3 x \cdot y^9 = 16 \Rightarrow x \cdot y^9 = 3^{16}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

терновик

пусть $a - \min$, $b - \max$

$$4a = 5(a-b)^2 \Rightarrow$$

$$5b = \text{НОК}(a, b)$$

$$4a = 5(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$4a = 5a^2 - 10ab + 5b^2$$

$$5a^2 - 10ab - 4a + 5b^2 = 0$$

$$5a^2 - (10b + 4)a + 5b^2 = 0$$

$$5a^2 - 2(5b + 2)a + 5b^2 = 0$$

$$D = 4(5b + 2)^2 - 4 \cdot 5b^2 =$$

$$= 4(25b^2 + 20b + 4) - 20b^2 = 80b + 16 = 16(5b + 1)$$

$$a = \frac{2(5b+2) \pm 4\sqrt{5b+1}}{10} = \frac{(5b+2) \pm 2\sqrt{5b+1}}{5}$$

$$5b : \frac{(5b+2) \pm 2\sqrt{5b+1}}{5}$$

$$5b = \frac{(5b+2) + 2\sqrt{5b+1}}{5} m$$

5, 7

20 =

35 =

$$25b = (5b+2)m + 2m\sqrt{5b+1}$$

$$25b - 5bm - 2m = 2m\sqrt{5b+1}$$

$$5b(5-m) - 2m = 2m\sqrt{5b+1}$$

$$\Rightarrow (5b(5-m) - 2m)^2 = 4m^2(5b+1)$$

$$25b^2(5-m)^2 - 20bm(5-m) + 4m^2 = 20bm^2 + 4m^2$$

$$25b^2(25 - 10m + m^2) - 100bm + 20bm^2 + 4m^2 = 20bm^2 + 4m^2$$

$$25^2b^2 - 250b^2m + 25b^2m^2 - 100bm = 0 \quad | : 25$$

$$b(25b - 10bm + b^2m^2 - 4bm) = 0$$

$$b(25b - 10bm + b^2m^2 - 4bm) = 0$$

$$b \neq 0 \Rightarrow 25b - 10bm + b^2m^2 - 4bm = 0$$

$$b(25 - 10m + m^2) = 4m \Rightarrow b = \frac{4m}{(m-5)^2}$$

 $m - \text{целое}, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{36}{16}$$

$$\frac{40}{28} = \frac{8}{5}$$

$$m=1: b = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$m=2: \frac{8}{9}$$

$$m=3: \frac{12}{9} = 3 \checkmark$$

$$m=4: \frac{16}{1} = 16 \checkmark$$

$$\frac{24}{1} \quad \frac{28}{4} = 7$$

$$b=4, b=3, b=16$$

$$b=24, b=7,$$

$$\frac{44}{36} = \frac{11}{9}$$

$$m=5: \frac{20}{0} \text{ не существует}$$

$$m=6: \frac{24}{1} = 24 \checkmark$$

$$m=7: \frac{28}{4} = 7 \checkmark$$

$$m=8: \frac{32}{9}$$

$$m=9: \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

$$m=10: \frac{40}{25}$$

$$m=11: \frac{44}{36}$$

$$m=12: \frac{48}{48}$$

$$m=13: \frac{52}{64}$$

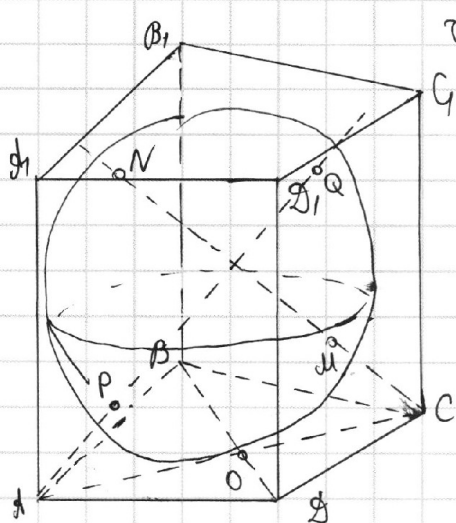


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$CM = 4\sqrt{5}, CN = 5\sqrt{5} \\ MN = \sqrt{5}$$

$$PQ = AQ - AP = 2\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot 5 - 2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$AB + CD = BC + AD$$

$$AC = 12, \quad BD = BO + OD = 2 + 10$$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

черновик

№ 6

$$1) \begin{cases} x^2 - 4x + 1 = 0 \\ y = -(x^2 - 4x + 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 1 &= 1 - 2x \\ x^2 - 2x &= 0 \\ x(x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(x^2 - 4x + 1) &= (-2x + 4)x + a^2 - 1 \\ x^2 - 4x + 1 &= 2x^2 - 8x + 4 - a^2 + 1 \\ x^2 - 2ax + a^2 &= 0 \Rightarrow (x - a)^2 = 0 \Rightarrow x = a \text{ — одно решение.} \end{aligned}$$

$$2) \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 0 \\ 3y^2 - 2xy + x^2 = 0 \end{cases}$$

$$0 = 4x^2 = 4 \cdot 3 \cdot x^2 = 4x^2 - 12x^2 < 0 \text{ — не равно } 0.$$

$$3) y = 2x - 1$$

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= (-2x + 4)x + a^2 - 1 \\ -2x + 1 + (-2x + 4)x + a^2 - 1 &= 0 \\ (-2x + 2)x + a^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$-2(a - 1)x = -a^2 \Rightarrow 2(a - 1)x = a^2$$

$$\begin{aligned} (x^2 - 4x + 1 + (-2x + 4)x + a^2 - 1) &= 0 \\ x^2 - 2ax + a^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = a \\ 2(a - 1)x = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 2(a - 1)a &= a^2 \\ 2a^2 - 2a &= a^2 \\ a^2 - 2a &= 0 \\ a(a - 2) &= 0 \\ a &= 0 \text{ и } a = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ и } x = 2$$

$$y_1 = -1 + 2x = 1$$

$$y_2 = -1 + 4 = 3$$

$$y_1 = -1$$

$$y_2 = 4 - 1 = 3$$

(0; 1)
(2; 3)

$$\Rightarrow y \text{ и } a = 0 \text{ и } a = 2.$$

$$x = a \text{ и } x = \frac{a^2}{2(a - 1)}$$

$$1 \quad \frac{1}{2}$$