

МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



- [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен  $f(x)$  такой, что уравнение  $f(x) = -2x^2$  имеет единственное решение, а также уравнение  $f(x) = -6$  имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения  $f(x) = 0$ .
- [3 балла] Сколькими способами можно представить число  $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$  в виде произведения двух натуральных чисел  $x$  и  $y$ , где  $y$  делится на  $x$ ?
- [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0, \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}, \\ y \leq 24. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел  $(a; b)$  такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

- [5 баллов] На сторонах  $BA$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  с тупым углом  $B$  как на диаметрах построены окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, пересекающиеся в точках  $B$  и  $D$ . Хорда  $BE$  окружности  $\omega_1$  перпендикулярна  $BC$ , а хорда  $BF$  окружности  $\omega_2$  перпендикулярна  $CE$  и касается  $\omega_1$ . Найдите отношение  $BF : BD$ , если  $\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$ .
- [5 баллов] При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

- [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  вписана сфера  $\omega$ . Луч с началом в точке  $A$  пересекает  $\omega$  в точках  $P$  и  $Q$ , а луч с началом в точке  $C$  пересекает  $\omega$  в точках  $M$  и  $N$ . Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABCD$ . Найдите объём призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и расстояние  $\rho$  от центра  $\omega$  до плоскости  $PAC$ , если известно, что  $AO = 1$ ,  $BO = 2$ ,  $CO = 11$ ,  $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $AQ = 2\sqrt{5}$ ,  $CM = 4\sqrt{5}$ ,  $CN = 5\sqrt{5}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $f(x) = x^2 + bx + c$ . Тогда  $f(x) = -2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + bx + c = 0$ .  
По условию у этого ур-ия ровно 1 корень  $\Rightarrow D = 0$ .  $D = b^2 - 12c = 0$ . (1)

$f(x) = -6 \Leftrightarrow x^2 + bx + c + 6 = 0$ . По условию это ур-ие тоже имеет единственное решение  $\Rightarrow D = 0$ .  $D = b^2 - 4c - 24 = 0$ . (2)

Получили систему  $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$ :

$$\begin{cases} b^2 - 12c = 0 & (1) \\ b^2 - 4c - 24 = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow (1) - (2) = -8c + 24 = 0 \Rightarrow c = 3, \text{ подставим } b \text{ в (1):}$$

$$b^2 = 12 \cdot 3 = 36. \quad (3)$$

По теореме Виета сумма корней  $f(x)$  это  $-b$ . Из (3)  $b = \pm 6 \Rightarrow$

сумма корней может быть 6 или  $(-6)$ . Приведем примеры когда так:

1)  $f(x) = x^2 + 6x + 3$

$$f(x) = -2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$f(x) = -6 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3$$

2)  $f(x) = x^2 - 6x + 3$

$$f(x) = -2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f(x) = -6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

Ответ: 6 или  $(-6)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если  $y : x$ , то  $y = kx$ , где  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x, y \in \mathbb{N}$ . Тогда

$n = xy = kx^2$ . По ~~разложению~~  $y$  разложение в  $kx^2$  однозначно получается восстановить  $y$  и  $x$  так представить  $x^2$  в виде  $x \cdot x$  1 способ.

Тогда найдем кол-во способов выбрать  $y$  и  $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$  ~~способ~~  
множитель - квадрат. ~~В~~  $x^2$  содержит в себе все простые множители в четной степени и это квадрат.

выбрать  $y$   $5^{151}$  четное кол-во которое есть 76 способов  $(\frac{150}{2} + 1)$ , так можно взять  $5^0$ . Выбрать четное кол-во 7  $y$  600 штук есть  $301$  способ  $(\frac{600}{2} + 1)$  так можно взять 0. Тогда способов выбрать

$x^2$   $301 \cdot 76$ . Все множители, которые не выбрали, это  $k$ .  
Тогда всего способов

$$\begin{array}{r} 301 \\ \times 76 \\ \hline 1806 \\ 2107 \\ \hline 22876 \end{array}$$

Ответ: 22876



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow 9 \log_x 3 + \log_y 3 - 16 \log_{xy} 3 = 0$$

$x > 0, y > 0$   
 $x \neq 1, y \neq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 xy} = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{16}{\log_3 x + \log_3 y}$$

ОДЗ:  $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$

Пусть  $\log_3 x = a$ ;  $\log_3 y = b$ . Тогда:

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{a+b} \quad | \cdot (a+b) \Leftrightarrow 9 + \frac{9b}{a} + \frac{a}{b} + 1 = 16 \Leftrightarrow \frac{9b}{a} + \frac{a}{b} = 6$$

Пусть  $\frac{b}{a} = t$ . Тогда  $9t + \frac{1}{t} = 6 \quad | \cdot t \Leftrightarrow 9t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (t-3)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = 3 \Leftrightarrow b = 3a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 y = 3 \log_3 x \Leftrightarrow \log_3 y = \log_3 x^3 \Leftrightarrow y = x^3$$

Тк  $\log_3$  монот. на

Тогда  $\frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1} \Leftrightarrow \frac{3(x^3+1)}{x^3-1} < \frac{7(x+1)}{x-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} < \frac{7(x+1)}{(x-1)} \Leftrightarrow \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \left( \frac{3x^2-3x+3}{x^2+x+1} - 7 \right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \left( \frac{3x^2-3x+3-7x^2-7x-7}{x^2+x+1} \right) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (-1; -\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \left( \frac{-4x^2-10x-4}{x^2+x+1} \right) < 0$$

1)  $x^2+x+1 > 0$  для  $\forall x$  тк  $D = 1-4$

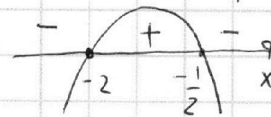
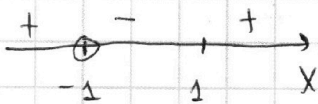
2)  $-4x^2-10x-4 = -2(2x^2+5x+2)$

$D = 25-4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$

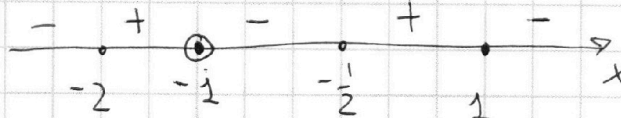
$x = \frac{-5 \pm 3}{4}$

$x_1 = -2$   
 $x_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

3)  $\frac{x+1}{x-1} < 0$



Итого:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Значит нам нужно найти количество таких точек  $(x; y)$ , что  $y = x^3$ ;

$x \in (-\infty; -2) \cup (-1; -\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$ ; что  ~~$x > 0$~~ ;  $x \neq 1$ ;  $y > 0$ ;  $y \neq 1$   
(обратимые на логарифмы), и что  $y \leq 24$ .

Тогда  $x \in (1; +\infty)$

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y \leq 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 \leq 24 \Rightarrow x = 2 & y = 8 \\ x > 1 & \text{или } x \geq 3 \\ x \in \mathbb{Z} & y = x^3 \geq 27 \end{cases}$$

Ответ: пара  $((2; 8))$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Известно~~ Известно, что  $\frac{ab}{\text{НОД}(a;b)} = \text{НОК}(a;b)$

1) Пусть  $a \leq b$ . Тогда 
$$\begin{cases} 4a = 5(a-b)^2 & (1) \\ 5b = \text{НОК}(a;b) & (2) \end{cases}$$

2) (2)  $\Leftrightarrow 5b = \frac{ab}{\text{НОД}(a;b)} \Leftrightarrow 5 = \frac{a}{\text{НОД}(a;b)} \Rightarrow a = 5 \cdot \text{НОД}(a;b)$

(1):  $4a = 5(a-b)^2$ . Пусть  $a_1 = \frac{a}{\text{НОД}(a;b)}$ ;  $b_1 = \frac{b}{\text{НОД}(a;b)}$ . Тогда

(1)  $\Leftrightarrow 4a = 5 \cdot (\text{НОД}(a;b))^2 (a_1 - b_1)^2 \Leftrightarrow 4 \cdot \text{НОД}(a;b) = (\text{НОД}(a;b))^2 (a_1 - b_1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 = \text{НОД}(a;b) \cdot (a_1 - b_1)^2$ . Так  $a, b \in \mathbb{N}$ , то  $\text{НОД}(a;b)$  и  $a_1, b_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  Существует **3** варианта разложения 4 на множители:  $4 \cdot 1 = 4$  Ко-ти  
 $1 \cdot 4 = 4$   
 $2 \cdot 2 = 4$

Один из множителей должен быть равен  $(a_1 - b_1)^2$  он должен быть точным квадратом, т.к.  $a_1 - b_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  осталось 2 варианта

а)  $\text{НОД}(a;b) = 1$ ;  $(a_1 - b_1)^2 = 4 \Rightarrow a_1 = a$ ;  $b_1 = b$ ;  $(a_1 - b_1)^2 = 4 = (a - b)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |a - b| = 2$ . Так  $a \leq b$ , то  $b = a + 2$ . ~~Подставим~~ Если  $\text{НОД}(a;b) = 1$ , то  $\text{НОК}(a;b) = ab$ . Подставим в (2):  $5(a+2) = a(a+2) \Leftrightarrow 5a+10 = a^2+2a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 - 3a - 10 = 0$

$D = 9 + 40 = 49$

$a = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 5, \text{ так } a \in \mathbb{N}, \text{ то } a = 5, b = 5 + 2 = 7, \text{ НОД}(5;7) = 1. \\ a = -2 \end{cases}$  Эта пара подходит

б)  $\text{НОД}(a;b) = 4$ ;  $(a_1 - b_1)^2 = 1 \Rightarrow a_1 = 4a_1$ ;  $b_1 = 4b_1$  и  $|a_1 - b_1| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b_1 = a_1 + 1$  так  $a_1 \leq b_1 \Rightarrow b = 4a_1 + 4 = a + 4$ . Подставим в (2):

$5(a+4) = \frac{a(a+4)}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ 5 = \frac{a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ a = 20 \end{cases}$ , но  $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = 20$ ;  $b = 24$ ;

$\text{НОД}(20;24) = 4$   
Эта пара подходит.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) ~~Система уравнений~~ ~~система~~ ~~уравнений~~

Заметим, что искомая система симметрична относительно  $a$  и  $b$ . То есть если  $(a; b)$  подходит, то  $(b; a)$  подходит тоже. Следовательно если мы нашли все пары, где  $(a_1 \leq b_1)$ , то и все пары ~~(b\_1 > a\_1)~~  $(b_1 \geq a_1)$  тоже подходят. Причем если  $\exists$  решение  $(x_0; y_0)$ , где  $x_0 \geq y_0$ , то тогда мы должны были найти решение  $(y_0; x_0)$  т.к.  $y_0 \leq x_0$ . А значит, что случай 2)  $b \leq a$  аналогичен уже рассмотренному и имеет решение

$$\begin{cases} b = 20 \\ a = 24 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} b = 5 \\ a = 7 \end{cases}$$

Ответ:  $\begin{cases} a = 5 \\ b = 7 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} a = 20 \\ b = 24 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} a = 7 \\ b = 5 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} a = 24 \\ b = 20 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0$ . Это равенство 0, когда хотя бы одна из скобок 0, тогда преобразуем:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 1 & (1) \\ y = 2x - 1 & (2) \\ (x - y)^2 + 2y^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

Рассмотрим (3):  $(x - y)^2 \geq 0$  и  $2y^2 \geq 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (x - y)^2 + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 1 & (1) \\ y = 2x - 1 & (2) \\ y = x = 0 & (4) \end{cases}$$

Теперь рассмотрим второе условие:

$$y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -2ax + 4x + a^2 - 1 = (a - x)^2 - x^2 + 4x - 1$$

То есть  $\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0 \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = (a - x)^2 - x^2 + 4x - 1 & (5) \\ y = -x^2 + 4x - 1 & (1) \\ y = 2x - 1 & (2) \\ y = x = 0 & (4) \end{cases}$$

~~Будем решать эту систему. Ответ~~ Будем решать эту систему. Для этого должно выполняться (5) и что-то из (1); (2); (3). Пусть верно (1).

Если верно (1) и (5), то  $y = (a - x)^2 - x^2 + 4x - 1 = -x^2 + 4x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a - x)^2 = 0 \Leftrightarrow a = x$ . То есть точки  $(a; -a^2 + 4a - 1)$  всегда удовлетворяют системе.

Пусть верно (4) и (5). Тогда  $0 = a^2 - 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$ . Значит при  $a = \pm 1$  системе удовлетворяет точка  $(0; 0)$  или при каких других значениях  $a$  она не удовлетворяет.

~~Решение~~





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть ~~равны~~ верны (2) и (5). Тогда

$$2x - 1 = a^2 + x^2 - 2ax - x^2 + 4x - 1 \Leftrightarrow a^2 = 2ax - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a^2}{2(a-1)}. \text{ Такие точки существуют при всех } a, \text{ кроме } a=1, \text{ при}$$

$$a=1: \Leftrightarrow y = 1 + x^2 - 2x - x^2 + 4x - 1 = 2x \text{ и } 2x \neq 2x - 1 \Rightarrow (5) \neq (2).$$

Значит при всех  $a$ , ~~равных~~ не равных 1 существует решение  $(\frac{a^2}{2(a-1)}, \frac{a^2}{a-1} - 1)$ .

Иных групп решений у системы быть не может, так система выполняется только если верны (1) или (2) и (4) и (5).

Сравнивается, когда решений ровно 2. Возможны возможные решения:

$$(a; -a^2 + 4a - 1); (0; 0) \text{ (при } a = \pm 1); (\frac{a^2}{2(a-1)}, \frac{a^2}{a-1} - 1) \text{ при } a \neq 1.$$

Заметим, что ~~они~~  $(a; -a^2 + 4a - 1)$  никогда не совпадает с  $(0; 0)$ , как и  $(\frac{a^2}{2(a-1)}, \frac{a^2}{a-1} - 1)$  тоже не совпадает с  $(0; 0)$ .

Узнаем при каких  $a$  совпадают решения  $(a; -a^2 + 4a - 1)$  и  $(\frac{a^2}{2(a-1)}, \frac{a^2}{a-1} - 1)$ :

$$a = \frac{a^2}{2(a-1)} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ 1 = \frac{a}{2(a-1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ 2a-2=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$$

~~также~~ Так же при  $a=0$ :  $-a^2 + 4a - 1 = 0 = \frac{a^2}{a-1} - 1$   
при  $a=2$ :  $-a^2 + 4a - 1 = 3 = \frac{a^2}{a-1} - 1$

Значит при любых  $a$ , не равных  $1; -1; 0; 2$  существует ровно 2 решения.

При  $a=0$  и  $a=2$  существует ровно 1 решение (при  $a=0$  это  $(0; -1)$  и при  $a=2$  это  $(2; 3)$ )

При  $a=1$  есть 2 решения  $(1; 2)$  и  $(0; 0)$

При  $a=-1$  есть 3 решения:  $(-1; -6); (0; 0)$  и  $(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2} - 1)$

Ответ:  $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

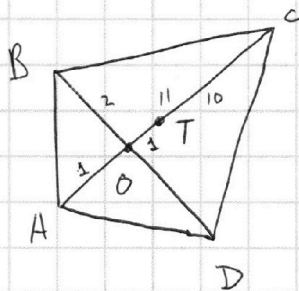
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $T \in \alpha(ABCD)$  и  $T$  — точка касания  $W$  с  $\alpha(ABCD)$ . Тогда в плоскости, проходящей через луч  $AP$  и  $T$  как касательная и секущая  $AT^2 = AP \cdot AQ = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} = 4 \Rightarrow AT = 2$ .

Вспомогательно, через луч  $CM$  и  $T$  как касательные к окружности и секущая  $CT^2 = CM \cdot CN = 4\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{5} = 100 \Rightarrow CT = 10$ .



По условию диагональ  $AC = AO + OC = 12$ . Но  $AT + TC = 10 + 2 = 12 \Rightarrow$  по перпен-ву треугольника  $T \in AC$ , иначе  $AT + TC > AC$ .

~~Пусть W — центр сферы.~~ Пусть  $W$  — центр сферы.

Тк это прямая призма, то  $W \in \alpha(A'B'C'D')$ ,  $\alpha(A'B'C'D') \parallel \alpha(ABCD)$  и точки касания лежат в той же  $\alpha(A'B'C'D')$ . Потому что радиусы  $WX$  в точки касания перпендикулярны боковым катетам, а  $\Rightarrow$  параллельны осям осей.

Рассмотрим  $A'B'C'D'$ ; это четырехугольник  $ABCD$ . Окружность с центром  $W$  касается  $A'B'$ ;  $B'C'$ ;  $C'D'$ ;  $A'D'$ .

Всегда,  $A$  её центр лежит на  $A'C'$  (т.к.  $TE \in AC$ ), а призма прямая. Но раз центр висс. окружности лежит на диагонали, то диагональ  $A'C'$  — биссектриса  $\angle B'C'D'$  и  $\angle B'A'D'$ .

Тогда  $\angle B'C'A' = \angle A'C'D'$ ;  $\angle B'A'C' = \angle C'A'D' \Rightarrow \triangle A'B'C' = \triangle A'D'C'$ . Тогда

$B'O = OD' = 2$  по условию.  $B'A' = A'D'$

рав-ва углов  $\Delta \Rightarrow A'O$  — медиана в равном  $\triangle A'B'D' \Rightarrow A'O \perp B'D'$ . Тогда  $A'B' = \sqrt{5} = A'D'$ ;  $B'C' = 5\sqrt{5} = C'D'$

$S_{A'B'C'D'} = S_{ABCD} = S_{A'B'D'} + S_{C'B'D'} = \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{11 \cdot 4}{2} = 24$ . Пусть  $R$  — радиус сферы. Тк. окружность с радиусом  $R$  висага в  $A'B'C'D'$ , то  $S_{A'B'C'D'} = P \cdot R$ .

$P = \text{колд пер-тр} = 6\sqrt{5} \Rightarrow R = \frac{24}{6\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$ . Тогда  $V_{\text{призмы}} = h \cdot S$ , где

$h = 2R$  тк призма прямая  $\Rightarrow V = 2R \cdot S = \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot 24 = \frac{192}{\sqrt{5}}$



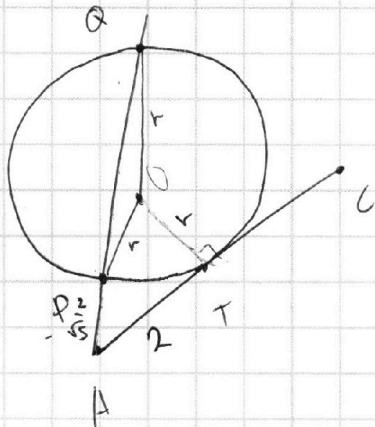
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь нужно найти  $\rho(W; PAC)$ . Рассмотрим  $\Pi$ -ть через  $A$  и  $P$ .



$$AO = 2\sqrt{5} = \text{circled } 2\sqrt{5}$$

$$AP = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{P}{2}$$

$$AQ =$$

Ответ: объем призмы  $\frac{192}{\sqrt{5}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} 3 + \log_{xy} 3 = 0$$

$$\frac{3y+3}{y-3} \leftarrow \frac{7x+7}{x-1}$$

$$y \leq 24$$

$$3 \frac{(y+1)}{(y-1)} < \frac{7(x+1)}{x-1}$$

$$3 \frac{x^3+1}{x^3-1} < \frac{7(x+1)}{x-1}$$

$$3 \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} < \frac{7(x+1)}{x-1}$$

$$\left( \frac{x+1}{x-1} \right) \left( \frac{3x^2-3x+3}{x^2+x+1} - 7 \right) < 0$$

$$\frac{x+1}{x-1} \left( \frac{3x^2-3x+3-7x^2-7x+7}{x^2+x+1} \right) < 0$$

$$\frac{3y+3}{y-3} + \log_3 3 + \log_3 3 + \log_3 3 = 0$$

$$\frac{3}{\log_3 x} + \frac{7}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 xy} = 0$$

$$\frac{3 \log_3 x + \log_3 y + \log_3 y + \log_3 xy}{\log_3 x \log_3 y} = 0$$

$$\frac{3 \log_3 x + \log_3 y + \log_3 xy}{\log_3 x + \log_3 y} = 0$$

$$\frac{3 \log_3 x + \log_3 y + \log_3 xy}{\log_3 xy} = 0$$

$$\log_3 y = 3$$

$$\log_3 y = 3 \log_3 x$$

$$\log_3 y = \log_3 x^3$$

$$y = x^3$$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} - \frac{16}{a+b} = 0$$

$$\frac{9}{a} + \frac{1}{b} = \frac{16}{a+b}$$

$$\frac{9(a+b)}{a} + \frac{a+b}{b} = 16$$

$$9 + \frac{9b}{a} + \frac{a}{b} + 1 = 16$$

$$\frac{9b}{a} + \frac{a}{b} = 6$$

$$9t + \frac{1}{t} = 6$$

$$9t^2 + 1 - 6t = 0$$

$$9t^2 - 6t + 1 = 0$$

$$D = 36 - 36 = 0$$

$$(t-3)^2$$

$$t = 3$$

$$\frac{b}{a} = 3$$

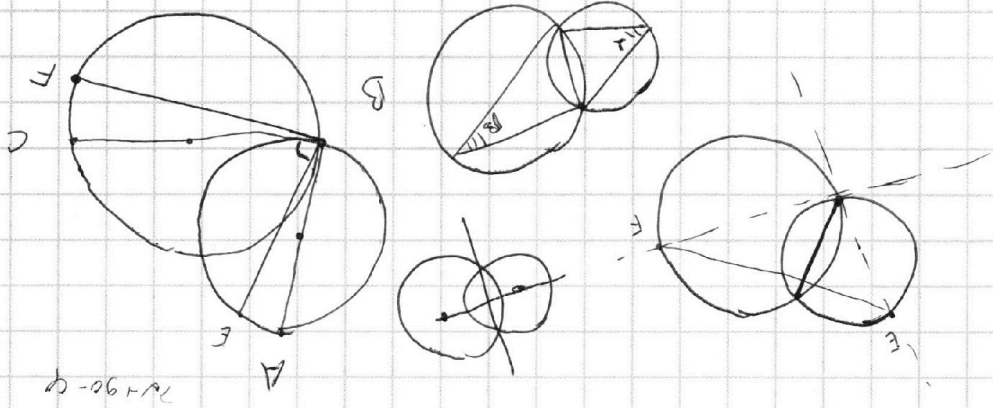


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BE^2 = BF^2 + EF^2$$

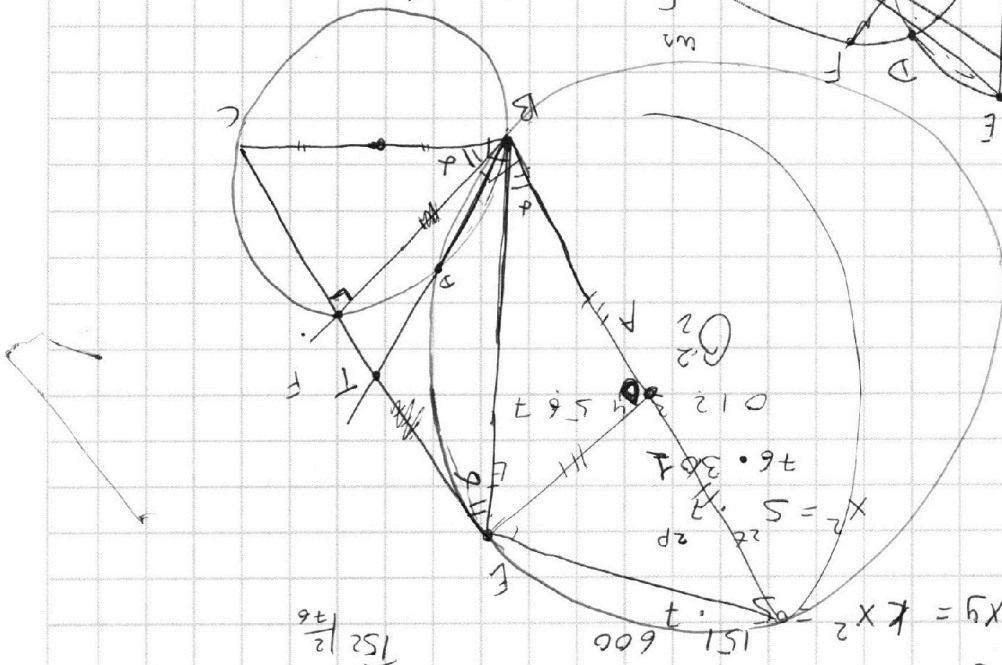
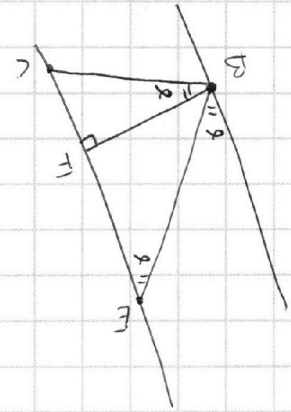
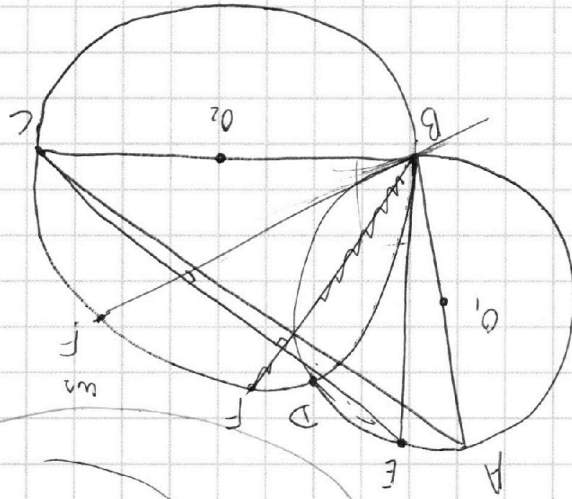
$$(BE^2 - BF^2) = EF^2$$

$$BE^2 - BF^2 = EC^2 - FC^2$$

$$BE^2 - BF^2 = EC^2 - FC^2$$

$$BE^2 - BF^2 = EC^2 - FC^2$$

AB||CE



$$M = XY = kX^2 = 151 \cdot 600$$

$$y : x = k$$

$$M = 151 \cdot 600 \cdot t \cdot 5 = 151 \cdot 600$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical solutions on grid paper, including diagrams and equations:

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$AQ = A$   
 $(x-r)(x+r) = 4$

$AT^2 = AP \cdot AQ$   
 $2^2 = CM \cdot CN$

$AT^2 = \frac{24}{8}$   
 $2 = \frac{CM \cdot CN}{192}$

$4\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{5} = 100$

$(10-R)(10+R) = 100 - R^2$

$S = P \cdot R$   
 $h = 2R$   
 $V = \frac{2}{3} P R^2$

$CT = 10$   
 $AT = 2$

$125 = 5 \cdot 25$

$2 + 2\sqrt{2}$

$S = P \cdot R$   
 $x(x+2R) = 4 - R^2$   
 $(12-x-2R)(12-x) = 100 - R^2$

Diagrams include: a rectangular prism with points A, B, C, D, A2, B2, C2, D2; a sphere with points P, Q, T; a circle with points N, T, M, C; a pyramid with points A, B, C, D, W; a cube with points A, B, C, D, H, G, T; a pyramid with points A, B, C, D, H; and a square with points A, B, C, D, H, G, T.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

$$f(x) = -2x^2 \text{ имеет отрицательное}$$

$$x^2 + bx + c = -2x^2 \quad (1-v)xz = -v$$

$$3x^2 + bx + c = 0 \quad xz = |xz - v|$$

$$D = b^2 - 4c = 0 \quad xz - x = xz - x + v$$

$$b^2 = 12 \quad x - x_1 + x_2 - x_2(x-v) = x - x_2$$

$$c = \frac{b^2}{12} \quad x - v = 0 \quad x_1 + x_2 = -b + \sqrt{D} = -b - \sqrt{D}$$

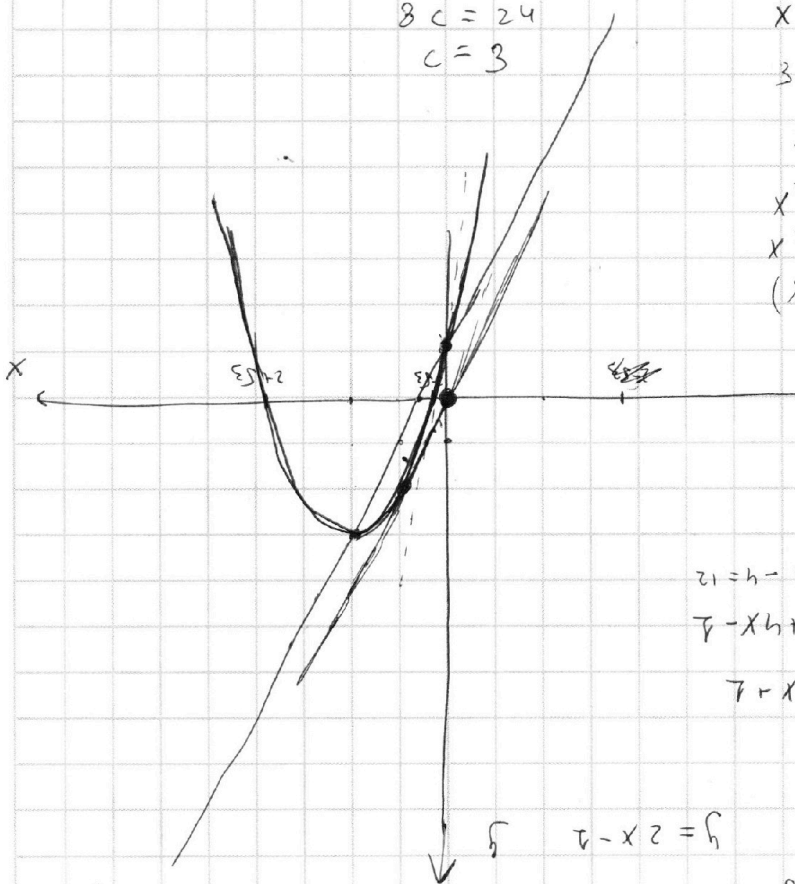
$$f(x) = -6$$

$$x^2 + bx + c + 6 = 0$$

$$D = b^2 - 4c - 24 = 0 = b^2 - 12c$$

$$8c = 24$$

$$c = 3$$



$$x^2 + 6x + 3$$

$$3x^2 + 6x + 3$$

$$3(x+1)^2$$

$$x^2 + 6x + 3 = -6$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(x+3)^2$$

$$x = -3 + 1 = -4$$

$$x = -3 - 1 = -2$$

$$x^2 - 6x + 3$$

$$3x^2 - 6x + 3$$

$$3(x-2)^2$$

$$x^2 - 6x + 3 = -6$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)^2$$

$$x = 2 + 3 = 5$$

$$x = 2 - 3 = -1$$

$$x = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

$$D = 16 - 4 = 12$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$z_1 = 4 - 9 = -5$$

$$y = -x^2 + 4x - 1$$

$$y = x^2 - 4x + 1$$

$$y = (4 - 2a)x + a^2 + 1$$

$$y = 2x - 1$$

$$(x-y)^2 + 2y^2$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2$$

$$0 = (1+x-2)(y-3) + (y-3)^2$$

$$0 = (1+x-2)(y-3) + (y-3)^2$$

$$y = 3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$4 \cdot \min(a; b) = 5(a-b)^2$$

$$5 \cdot \max(a; b) = \text{KOK}(a; b)$$

i)  $a \leq b$

$$5b = \text{KOK}(a; b) \Rightarrow a : 5$$

$$\frac{a \cdot b}{\text{KOD}} = \frac{\text{KOK}}{\text{KOD}}$$

$$\frac{a \cdot b}{\text{KOD}} = 5b$$

$$a = 5 \cdot \text{KOD}$$

$$a = 5 \cdot \text{KOD}$$

$$a - b = \text{KOD}(a_1 - a_2)$$

$$4a = 5(a-b)^2$$

$$4 \text{KOD} = (a-b)^2$$

$$4a = 5a^2 + 5b^2 - 10ab$$

$$4 \text{KOD} = \text{KOD}^2 (b_1 - a_1)^2$$

$$b_1 = \frac{b}{\text{KOD}}$$

$$a_1 = \frac{a}{\text{KOD}}$$

$$4 = \text{KOD} (b_1 - a_1)^2$$

$$4 = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 2}$$

$$\frac{4 \cdot 1}{1}$$

$$1) 4 = (b-a)^2 \Rightarrow b-a=2$$

$$b = a+2$$

$$5a+10 = a(a+2)$$

$$2) b_1 = a_1 + 1$$

$$b = 4b_1 = 4a_1 + 4$$

$$a = 4a_1$$

$$x^2 + x + 1$$

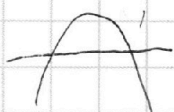
$$D = 1 - 4 < 0$$

$$-2(2x^2 + 5x + 2)$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$$

$$x = \frac{-5 \pm 3}{4} \quad x = -2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = (a-x)^2 - x^2 + 4x - 1 \\ y = 2x - 1 \\ y = -x^2 + 4x - 1 \\ y = 0; x = 0 \end{cases}$$

$x = a$  всегда решение  
или  $a = \pm 1$  точка  $(0; 0)$  подходит  
 $x = \frac{-a^2}{2(1-a)}$  решение или  $a \neq 1$

если  $a = 1$ :  $(1-x)^2 - x^2 + 4x - 1 = 2x - 1$   
 $1 + x^2 - 2x - x^2 + 4x - 1 = 2x - 1$

$0 = -1$   
нет решения

или всех иначе:  
 $a = 0$   
 $a = 2$   
 $a = 1$

$$2x - 1 = a^2 + x^2 - 2ax - x^2 + 4x - 1$$

$$a^2 - 2ax + 2x = 0$$

$$2x(1-a) + a^2 = 0$$

$$x = \frac{-a^2}{2(1-a)} \text{ это решение } \exists \text{ или } \forall a \neq 1$$

$a = 1$

1)  $\frac{-a^2}{2(1-a)} = a$

2)  $\frac{-a^2}{2(1-a)} = 0$

$a = 1$  2 решения

$a = 2$  1 решение

$a = 0$  1 решение

$a = -1$  : 3 решения

$y$  примет всегда 2 решения

если  $a = 0$

а то:  $\frac{-a}{2(1-a)} = 1$

$x = \frac{-1}{4}$

$-a = 2 - 2a$

$a = 1$

$-a = 2 - 2a$

$2 = 2a - a$

$2 = a$

- | 0 | 2