



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = 2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -8$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a-b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{5}$.
6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1)(x^2 - 3xy + 4y^2)(y + x - 1) = 0, \\ y = (2a + 1)x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω в точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 4$, $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$, $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$, $CN = 2\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

] $f(x) = x^2 + ax + b$. Тогда, $f(x) = 2x^2$; $-x^2 + ax + b \geq 0$ имеет ровно 1 решение $\Rightarrow D = a^2 + 4b \geq 0$. $f(x) = -8$; $x^2 + ax + (b+8) = 0$ имеет ровно 1 решение $\Rightarrow D = a^2 - 4b - 32 \geq 0$.

$$\begin{cases} a^2 + 4b \geq 0 \\ a^2 - 4b - 32 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} & 8b = -32, \quad b = -4. \quad a^2 + 4b = a^2 - 16 \geq 0 \Rightarrow a = \pm 4. \\ & \text{Будем проверять. Если } a = 4, \text{ то} \end{aligned}$$

$f(x) = x^2 + 4x - 4$. По т. Виета сумма корней равна -4 .

Если $a = -4$, то $f(x) = x^2 - 4x - 4$. По т. Виета сумма корней равна 4 .

Ответ: ± 4 .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если $n: x$, то $x = 2^a \cdot 3^b$, где $0 \leq a \leq 401$, $0 \leq b \leq 500$,
а и b — целые. Тогда, $y = \frac{n}{x} = \frac{2^{401} \cdot 3^{500}}{2^a \cdot 3^b} = 2^{401-a} \cdot 3^{500-b}$. Чтобы y делилось

на x должно выполняться система: $\begin{cases} 401-a \geq a \\ 500-b \geq b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 401 \geq 2a \\ 500 \geq 2b \end{cases};$

$\begin{cases} 200 \frac{1}{2} \\ 200 \geq a \\ 250 \geq b \end{cases}$ Тогда, a может быть от 0 до 200, а b от 0 до 250.

У а 201 вариант, у b — 251. $201 \cdot 251 = 50451$.

Ответ: 50451.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $x > 0$ и $y > 0$, т.к. они не могут быть в основании логарифмов. При этом они не могут быть равны 1 $\Rightarrow x > 1$ и $y > 1$.

Рассмотрим первое ур-ние: $\log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} 16 \geq 0$;

$$\log_x 2 + 9 \log_y 2 - 16 \log_{xy} 2 \geq 0. \quad \frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 xy} \geq 0;$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 x + \log_2 y} \geq 0. \quad \log_2 x = a, \log_2 y = b. \quad \frac{1}{a} + \frac{9}{b} - \frac{16}{a+b} \geq 0;$$

$$\geq 0; \quad \frac{ab + b^2 + 9a^2 + 9ab - 16ab}{ab(a+b)} \geq 0 \Rightarrow b^2 - 6ab + 9a^2 \geq 0; \quad (b-3a)^2 \geq 0. \quad b \geq 3a.$$

$\log_2 y \geq 3 \log_2 x \Rightarrow y \geq x^3$. Теперь рассмотрим 2-е ур-ние:

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7} = \frac{3(x^3-1)}{7(x^3+1)} = \frac{3}{7} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}, \quad \frac{x-1}{x+1} > 0, \text{ т.к. } x > 1. \Rightarrow$$

$$1 > \frac{3x^2+3x+3}{7x^2-7x+7}. \quad \text{Ур-ие } x^2-x+1 \geq 0 \text{ не имеет корней, т.к. } D = 1-4 = -3 < 0$$

$$0 \Rightarrow x^2-x+1 > 0 \text{ при всех } x \Rightarrow 7(x^2-x+1) > 0 \text{ при всех } x. \text{ Тогда,}$$

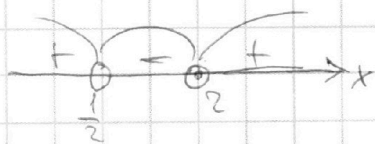
$$4x^2-10x+4 > 0, \quad (2x^2-5x+2) > 0. \text{ Решим ур-ие } 2x^2-5x+2 \geq 0. \quad D = 25-16 = 9.$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \frac{1}{2}; 2. \text{ Тогда, } 2(x-\frac{1}{2})(x-2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2; +\infty).$$

Значит, нам подходят все пары $(x; x^3)$ при $x > 2$. Получается 28 пар.

Ответ: все пары вида $(x; x^3)$ при целых x от 3 до 31 29.

* - рассмотрим метод интервалов:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☒☐☐☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\exists a \leq b. \text{ Тогда } 3 \cdot \max(a, b) = \text{НОК}(a, b); \quad 3b = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)} \Rightarrow a = 3 \cdot \text{НОД}(a, b).$$

$$\exists b = k \cdot \text{НОД}(a, b) \Rightarrow k \geq 3, \text{ т.к. } b \geq a, \quad 12 \cdot \text{НОД}(a, b) = 3 \cdot (\text{НОД}(a, b))^2 \cdot (3-k)^2.$$

$$4 = \text{НОД}(a, b) \cdot (3-k)^2. \text{ Замечим, что } k \leq 6, \text{ т.к. при } k \geq 6 \quad (3-k)^2 \geq 4.$$

$$\text{Если } k=3, \text{ то } 4=0, \text{ что не правда. Если } k=4, \text{ то } \text{НОД}(a, b)=4 \Rightarrow a=12,$$

$$b=16, \quad 4 \cdot 12 = 3 \cdot (16-12)^2 \text{ и } 3 \cdot 16 = \text{НОК}(12, 16) = 48. \text{ Если } k=5, \text{ то}$$

$$\text{НОД}(a, b)=1 \Rightarrow a=3, \quad b=5. \quad 4 \cdot 3 = 3 \cdot (3-5)^2; \quad 3 \cdot 5 = 15 = \text{НОК}(3, 5).$$

Аналогично при $a > b$ получаются пары $(16, 12)$ и $(5, 3)$, т.к. $a \leq b$ не подходит

Ответ: $(3, 5); (5, 3); (12, 16); (16, 12)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $\frac{452}{5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим 1^ю ур-ние: $(y-x^2-x-1)(x^2-3xy+4y^2)(y+x-1)=0$. Из него

следует, что $\begin{cases} y=x^2+x+1 & (1) \\ x^2-3xy+4y^2=0 & (2) \\ y+x=1-x & (3) \end{cases}$ Рассмотрим (2). $x^2-3xy+4y^2=0$.

$D=9y^2-16y^2=-7y^2 \leq 0$. Это при $y=0$. При $y=0$, x тоже равен 0.

Тогда, $0=-a^2+1 \Rightarrow a=\pm 1$. Если $y=x^2+x+1$, то $x^2+2ax+1=(2a+1)x-a^2+1$;

$x^2-2ax+a^2=0$; $(x-a)^2=0$; $x=a$. В этом случае мы всегда имеем,

что $y=a^2+a+1$. Значит, у нас всегда будет ровно 1 решение в

этом случае для любого a . Теперь, пусть $y=1-x$. Тогда, $(1-x=2a+1)x$

$-a^2+1 \Rightarrow x=\frac{a^2}{2a+2}$, при $a \neq -1$. $y=\frac{2a+2-a^2}{2a+2}$. Замечим, что решение

в (1) и (3) случае совпадает со (2) не могут, т.к. при $a=1$ у

(1) и (3) случае решения будут $(1,3)$ и $(\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$, а у (2) решение

$(0,0)$. Если $a=-1$, то (3) случай не существует, в (1) получается

пара $(-1,1)$, а в (2) также $(0,0)$. Теперь осталось посмотреть,

когда совпадают 1^{ый} и 3^{ий} случаи; $x^2+x+1=1-x$; $x(x+2)=0$;

$x=0$ или $x=-2$. Если $x=0$, то для 1^{ого} случая и для 3^{его} случая

$a=0$. Если $x=-2$, то для 1^{ого} случая и для 3^{его} $a=-2$. Значит,

при $a=0$ и $a=-2$ у нас будет 1 решение, при $a=1$ у нас будет

3 решения, во всех остальных будет ровно 2 решения.

Ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$

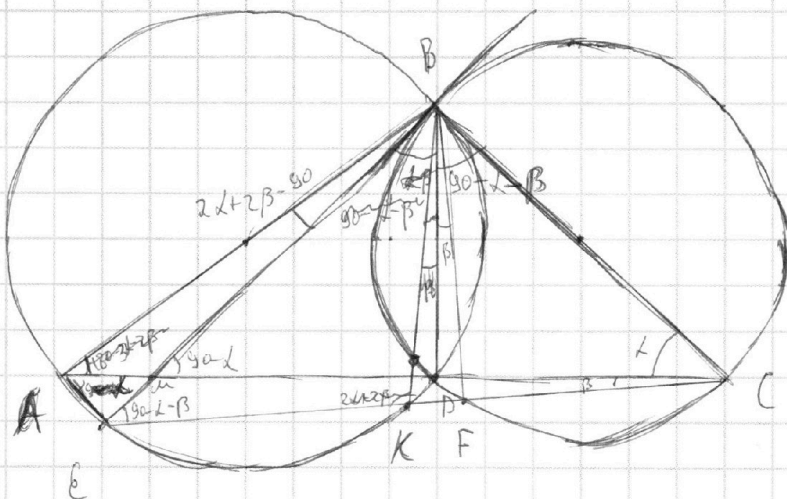


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle KBD = 2\alpha - 90^\circ + \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$$

$$90^\circ - \alpha = 180^\circ - 3\alpha - 2\beta$$

$$2\alpha + 2\beta = 90^\circ$$

$$BD = BE \cdot \sin \alpha$$

$$BF = BC \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

α, β

$$\angle BMC = 90^\circ - \alpha$$

$$\frac{BE}{BD} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$

$$\angle EBD = \alpha$$

$$\angle EAD = \alpha$$

$$\angle EKB = 2\angle ECB = 2\alpha + 2\beta$$

$$\angle BAE = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$$

$$\angle BAD = 180^\circ - 3\alpha - 2\beta$$

$$180^\circ - 3\alpha - 2\beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\alpha + \beta = 45^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

$$f(x) + 8 \geq 0$$

$$f(x) - 2x^2 \geq 0$$

$$x^2 + ax + (b + 8) \geq 0$$

$$-x^2 + ax + b \geq 0$$

$$D \geq a^2 - 4b - 32 \geq 0$$

$$D \leq a^2 + 4b \leq 0$$

$$\begin{cases} a^2 + 4b \leq 0 \\ a^2 - 4b - 32 \geq 0 \end{cases}$$

$$n = xy$$

$$x = y$$

$$8b = -32$$

$$x = 2 \cdot \frac{a}{3} \rightarrow y = 2 \cdot \frac{401 - a}{3}$$

$$b = -4$$

$$\begin{cases} a \geq 401 - a \\ b \geq 500 - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 200 \\ b \geq 250 \end{cases}$$

$$a \geq \pm 4$$

$$b \geq 250, 251, \dots, 500 \geq 251$$

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$$

$$a = 201, 202, \dots, 401 = 201$$

$$\begin{array}{r} \times 251 \\ 201 \\ \hline 251 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 502 \\ 50451 \\ \hline \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 3x + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(x+4)$$

$$D = 9 - 16$$

$$x^2 - 3xy + 4y^2 \geq 0$$

$$D = 9y^2 - 16y^2 = -7y^2$$

$$(0; 0)$$

$$-a^2 + 1 \geq 0$$

$$a = \pm 1$$

$$-2 \geq \frac{a^2}{2a+2}$$

$$\frac{a^2}{2a+2} \geq$$

~~2a+2~~

$$a \neq -1, 1$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3x^3-3}{2x^3+2}$$

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{2} \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$1 > \frac{3x^2+3x+3}{2x^2-2x+2}$$

$$4x^2 - 10x + 4 \geq 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 \geq 0$$

$$y \geq x^2 + x + 1 \text{ или } y \leq 1 - x$$

$$x^2 - 2ax + a^2 \geq 0$$

$$1 - x = (2a+1)x \Leftrightarrow -a^2 + 1$$

$$D \leq 4a^2$$

$$(2a+2)x = a^2$$

$$(x-a)^2 \geq 0$$

$$x = \frac{a^2}{2a+2}$$

$$x = a$$

$$a = -1$$

$$y \geq a^2 + a + 1$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

при всех a

при всех a , кроме -1

$$\log_x z = \frac{1}{\log_2 x}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \frac{1}{2}, 2$$

$$x^a \geq 2$$

$$\frac{1}{3} > \frac{21}{63} = \frac{1}{3}$$

$$x = 2^{\frac{1}{a}}$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{1}{\log_2 x + \log_2 y} = 0$$

$$\log_2 x = a$$

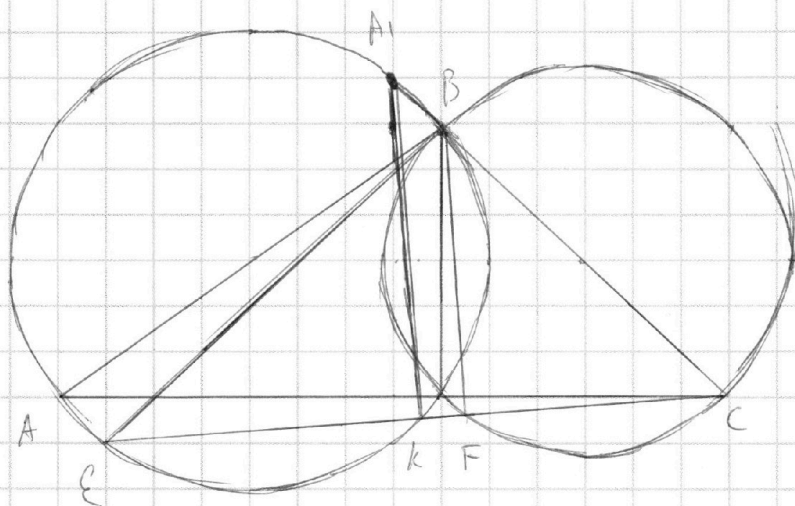


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{4}{3}$$

$$A, B = \frac{5}{3}x$$

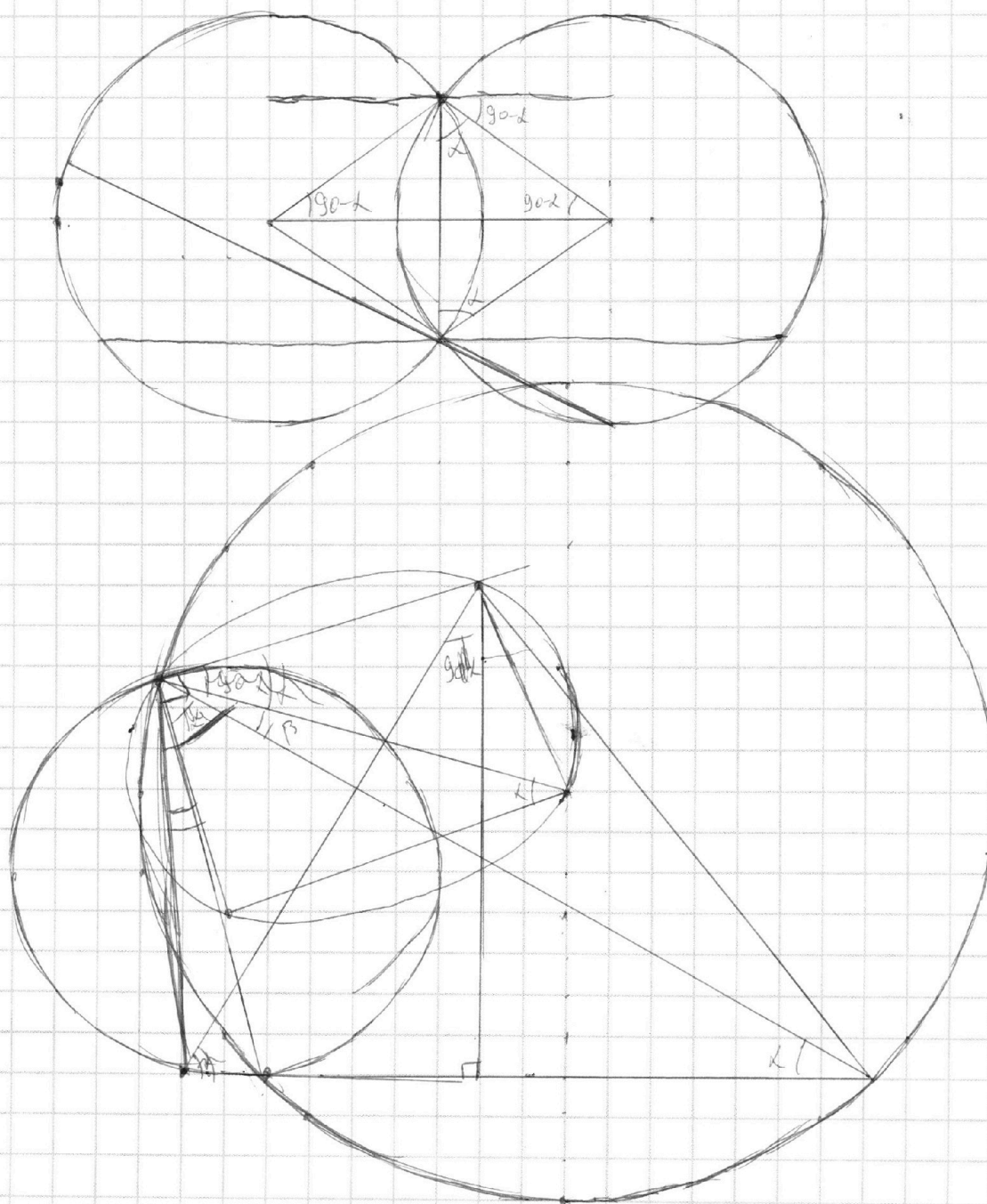


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$a < b$$

$$a \geq 0$$

$$4a = 3(a-b)^2$$

$$y = x+1$$

$$3b \geq \frac{ab}{\text{НОД}(a,b)} \Rightarrow a \geq 3 \text{НОД}(a,b)$$

$$y = 1-x$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 1$$

$$4 \cdot \text{НОД}(a,b) = (a-b)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 - x - 1 = x \geq 0$$

$$b \geq k \text{НОД}(a,b)$$

$$4 \geq \text{НОД}(a,b) (3-k)^2$$

$$k \leq 1 \Rightarrow \text{НОД}(a,b) \leq 1 \Rightarrow a \geq 3; b \geq 1$$

$$k \geq 3$$

$$k=4 \quad \text{НОД}(a,b) = 4 \Rightarrow a \geq 12; b \geq 16$$

$$4 \cdot 12 = 3 \cdot 4^2 \quad \checkmark$$

$$3 \cdot 16 = 48 \quad \checkmark$$

$$k=5 \quad \text{НОД}(a,b) = 1; \Rightarrow a \geq 3; b \leq 5$$

$$4 \cdot 3 = 3 \cdot 2^2$$

$$3 \cdot 5 = 15$$

