

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



- [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = -2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -6$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.
- [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y , где y делится на x ?
- [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3 \log_x 27 + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0, \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1}, \\ y \leq 24. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

- [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D . Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC , а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1 . Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos \angle BCE = \frac{3}{4}$.

- [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

- [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписана сфера ω . Луч с началом в точке A пересекает ω точках P и Q , а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N . Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC , если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 11$, $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $AQ = 2\sqrt{5}$, $CM = 4\sqrt{5}$, $CN = 5\sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$f(x) = x^2 + bx + c$; известно, что $f(x) = -2x^2$ имеет 1 решение и $f(x) = -6$ имеет 1 решение.

$$x^2 + bx + c = -2x^2$$

$$3x^2 + bx + c = 0, \text{ т.к. корень, то } \Delta = 0.$$

$$\Delta = 0; b^2 - 12c = 0.$$

$$x^2 + bx + c = -6$$

$$x^2 + bx + c + 6 = 0, \text{ т.к. корень, то } \Delta = 0$$

$$\Delta = 0; b^2 - 4c - 24 = 0.$$

тогда переходим к системе: $\begin{cases} b^2 - 4c - 24 = 0 \\ b^2 - 12c = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} b^2 = 12c \\ 12c - 4c - 24 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} b^2 = 12c \\ c = 3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} b^2 = 36 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 6 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} b = -6 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = x^2 + bx + 3 = 0$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 3 = 0$$

по теореме Виета $x_1 + x_2 = -b$, тогда $\begin{cases} x_1 + x_2 = -6 \\ b = 6 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ b = -6 \end{cases}$

Ответ: $x_1 + x_2 = \pm 6$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N2.

$n = 5^{151} \cdot 7^{600}$, т.к. 5 и 7 простые числа, то $n = x \cdot y$,

где x и y это произведение 5 и 7 в некотором степенях $\alpha; \beta; \varphi; \gamma$, где $\alpha, \beta, \varphi, \gamma \in \mathbb{Z}$, но $\alpha, \beta, \varphi, \gamma \geq 0$.

т.к. $y : x$, то пусть $y = 5^\alpha \cdot 7^\beta$, а $x = 5^\varphi \cdot 7^\gamma$ причем $\alpha \geq \varphi$ и $\beta \geq \gamma$.

$$x \cdot y = 5^{151} \cdot 7^{600}; \quad 5^{\alpha+\varphi} \cdot 7^{\beta+\gamma} = 5^{151} \cdot 7^{600}.$$

$\begin{cases} \alpha + \varphi = 151 \\ \beta + \gamma = 600 \end{cases}$ количество способов подачи суммы двух положительных причем $\alpha, \beta, \varphi, \gamma = 46$, т.к. можно разбить на пары видов:

φ	α
0	151
1	150
...	...
44	47
45	46

аналогично и для $\beta + \gamma = 600$

β	γ
600	0
599	1
...	...
300	300

количество способов 301.

тогда представить число $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$, можно $301 \cdot 46$ различными способами.

Ответ: 22876.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & N_3 \\ \left\{ \begin{array}{l} 3 \log_x 2x + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0 \quad (1) \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{2x+x}{x-1} \quad (2) \\ y \leq 24. \quad (3) \end{array} \right. \end{aligned}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ xy > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq 1 \\ xy \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq 1 \\ xy \neq 1 \end{cases}$

~~(1)~~: (1): $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} + \frac{1}{\log_{xy} \frac{1}{9}} = 0$; ~~решение~~.

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{16}{\log_3 x + \log_3 y}, \text{ т.к. } \log_3 x = a, \log_3 y = b.$$

$$\frac{9b+a}{ab} = \frac{16}{a+b}, \quad 9ab + 9b^2 + a^2 + ab = 16ab, \\ a^2 - 6ab + 9b^2 = 0 \\ (a - 3b)^2 = 0 \\ a = 3b.$$

$$\log_3 x = 3 \cdot \log_3 y$$

$$\log_3 x = \log_3 y^3$$

$$x = y^3.$$

$$\begin{matrix} 2 \\ y \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ 3 \end{matrix}$$

$$(2): \frac{3y+3}{y-1} < \frac{4y^3+x}{y^3-1}, \quad \frac{3y+3}{y-1} - \frac{4y^3+x}{y^3-1} < 0 \\ \frac{(3y+3)(y^2+y+1) - (4y^3+x)}{(y^3-1)} < 0$$

$$\frac{3(y+1)(y^2+y+1) - 4(y+1)(y^2-y+1)}{(y^3-1)} < 0$$

$$\frac{(y+1)(3y^2+3y+3 - 4y^2+4y-x)}{(y^3-1)} < 0$$

$$\frac{-2(y+1)(y-2)(y-\frac{1}{2})}{(y^3-1)} < 0; \quad \text{заменим на возвратжение этого же знака}$$

$$\frac{(y+1)(y-2)(y-\frac{1}{2})}{y-1} > 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{c} + - + - + \\ \hline -1 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 2 \quad y \end{array} ; \quad y \in (-\infty; -1) \cup (\frac{1}{2}; 1) \cup (2; +\infty).$$

возвращаясь к (3) неравенству и пересекая с ОДЗ. получаем, что

$$y \in (0; -1) \cup (\frac{1}{2}; 1) \cup (2; 24].$$

к каждому y принадлежит только одно значение x ,
тогда сколько значений y , то столько и решений.

на промежутке $(0; -1)$ нет целых y

на промежутке $(\frac{1}{2}; 1)$ нет целых y

на промежутке $(2; 24)$ y имеет 22 целых значения

Ответ: 22 пары, в которых $x, y \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a-b)^2 \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b) \end{cases}$$

Лучше не удалять обозначение $a > b$, тогда

$$\begin{cases} 4 \cdot b = 5a^2 - 10ab + 5b^2 \quad (1) \\ 5a = \text{НОК}(a; b) \quad (2). \end{cases}$$

(1): $5a^2 - 10ab + 5b^2 - 4b = 0$, рассматривая как кв. ур. относительно a .

$$\Delta = 100b^2 - 100b^2 + 80b = 80b.$$

$$a = \frac{10b \pm \sqrt{80b}}{10} ; b \pm \frac{2\sqrt{5b}}{5} ; \text{т.к. } a > b, \text{ то}$$

$$a = b + \frac{2\sqrt{5b}}{5} ; \text{ т.к. } b, a \in \mathbb{N}, \text{ то } \frac{2\sqrt{5b}}{5} \in \mathbb{N}.$$

$$\text{тогда } b = 5k^2, \text{ где } k \in \mathbb{N}.$$

$$a = 5k^2 + 2k ; b = 5k^2.$$

$$(2) : 5k(5k+2) = \text{НОК}(k(5k+2); 5k^2).$$

$\text{НОК}(k(5k+2); 5k^2) = 5 \cdot k \cdot c$, т.к. b ~~делит~~ ^{делит} ~~делится~~ ^{делится} на k , значит b ~~делит~~ ^{делится} ~~делится~~ ^{делится} на $5k$, тогда b ~~делит~~ ^{делится} ~~делится~~ ^{делится} на $5k^2$, значит ~~делит~~ ^{делится} ~~делится~~ ^{делится} $c = \text{НОК}(5k+2; k)$.

$$\text{тогда } 5k(5k+2) = 5k \cdot c \quad | : 5k ; k \neq 0.$$

$$5k+2 = c$$

$$5k+2 = \text{НОК}(5k+2; k). \Rightarrow 5k+2 : k. ; \dots$$

$$5k+2 \geq 0 ; 5k \geq 0, \text{ тогда } 2 \geq 0 ; k = 1 \text{ иначе } 2 \nmid k \\ k = 2.$$

$$\begin{cases} a = 5 \cdot 1 + 2 = 7 ; k = 1 \\ b = 5 \cdot 1 = 5 \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} a = 5 \cdot 2 + 2 = 12 ; k = 2 \\ b = 5 \cdot 2 = 10 \end{cases}$$

аналогичное решение при $a < b$, мы рассмотрим кв. ур. относительно b , на b будут такие же ~~же~~ ограничения, как на a в случае $a > b$.

~~Если $a > b$, то $(a-b)^2 \geq 0$, значит $\min(a; b) = 0$.~~

Если же $a = b$, то $(a-b)^2 = 0$, тогда $\min(a; b) = 0$, значит $a = b = 0$ тогда $a, b \in \mathbb{N}$.

Ответ: $(24; 20) ; (4; 5) ; (20; 24) ; (5; 4)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0 & (1) \\ y = (-2a + 4)x + a^2 - 1 & (2) \end{cases}$$

(2) : зависимость линейная, тогда ^{также} ^{также} решение ур.

$$(1): \begin{cases} y + x^2 - 4x + 1 = 0 & (3) \\ x^2 - 2xy + 3y^2 = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + x^2 - 4x + 1 = 0 & (5) \\ x^2 - 2xy + 3y^2 = 0 & (6) \end{cases}$$

$$(4): x^2 - 2xy + 3y^2 = 0 ; (x^2 - 2xy + y^2) + 2y^2 = 0 ; (x - y)^2 + 2y^2 \geq 0$$

равенство достигается только при $y = 0$ и $x = y$.

записать $x = y = 0$. подставив эти значения

$$в \text{ систему} ; \quad \begin{cases} (3) \cancel{x=0} \neq 0 ; \cancel{(4)} & (2): a^2 = 1 \\ (5) \neq 0 & a = \pm 1. \end{cases}$$

$$(2) \cancel{y = a^2} \cancel{x = 2a} \cancel{y = 2a}$$

при ~~подстановке в (3)~~, ~~также~~ ~~также~~ ~~решение~~: при ~~подстановке в (3)~~ ~~также~~ ~~также~~ ~~решение~~ в ~~подстановке в (3)~~ ~~также~~ ~~также~~ ~~решение~~

$$б (3) подставляем (2): -2ax + 4x + a^2 - 1 + x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$(x - a)^2 \geq 0, \text{ равенство возможно}$$

$$\text{только } x = a. ; y = -a^2 + 4a - 1.$$

$$б (5) подставляем (2): -2ax + 4x + a^2 - 1 - 2x + 1 = 0$$

$$2x(1-a) + a^2 = 0$$

$$x = \frac{-a^2}{2(1-a)}.$$

$$y = \frac{2a^3 - 4a^2}{2(1-a)} + a^2 - 1 = \frac{a^2 + a + 1}{a - 1}.$$

при $a = 0$, решения (3) и (5) совпадают. $a = -1$, у нас 3 решения

при $a = 1$ (5) не имеет решений $a = 0$; 1 решение

при $a = \pm 1$ у (4) есть 1 решение. $a = +1$, 2 решения.

Ответ: ~~Решат~~ $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a > b$, тогда $\begin{cases} 4b = 5a^2 - 10ab + 5b^2 \quad (1) \\ 5a = \text{НОК}(a; b) \quad (2) \end{cases}$.

(1). $5a^2 - 10ab + 5b^2 - 4b = 0$. относительно a .

$$0 = 100b^2 - 100b^2 + 80b = 80b.$$

$$a = \frac{10b \pm \sqrt{80b}}{10} = b \pm \frac{2\sqrt{5b}}{5}; \text{ если } a = b - \frac{2\sqrt{5b}}{5}, \text{ то } a < b. \text{ Число не целое.}$$

$$a = \frac{b + 2\sqrt{5b}}{5}, \text{ но } a \in \mathbb{N},$$

$$\text{тогда } \frac{2\sqrt{5b}}{5} \in \mathbb{N};$$

$$b = k^2 \cdot 5, \text{ где } k \in \mathbb{N}.$$

$$a = 5k^2 + 2k = k(5k+2).$$

$$b = k^2 \cdot 5.$$

$$\therefore (2). 5k(5k+2) = \text{НОК}(k(5k+2); 25)$$

$$25k^2 + 10k = \text{НОК}(5k^2 + 2k; 5k^2).$$

$$(5k+2) \cdot 5.$$

$$k=1. \text{ НОК}(4; 5) = 20. ; 25+10=35.$$

$$k=2; \text{ НОК}(24; 20) = \cancel{48} \quad \overset{8 \cdot 3 \cdot 5=120}{120} = 20 \cdot 4 + 20.$$

$$48=6 \cdot 8$$

$$8 \cdot 3$$

$$k=3; \text{ НОК}(15+2; 5k) = \cancel{2}.$$

$$\text{НОК}(17; 15) = 5$$

$$\text{НОК}(2(10+2) + 2 \cdot 2 \cdot 5) = \cancel{2} \cancel{2} \cancel{5} \cdot 5K \cdot 2^7 \cdot 3$$

$$K; 5K+2$$

$$5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17.$$

$$2; 12; 2^7 \cdot 3.$$

$$5K+2 = \text{НОК}(5K+2; K);$$

$$3; 15+2=17.$$

$$5K+2 \vdots K.$$

$$5K+2 \equiv 0 \quad ; \quad K=1; \\ \cancel{5} \cancel{2} \equiv 0. \quad K=2.$$

K=1;
K=2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

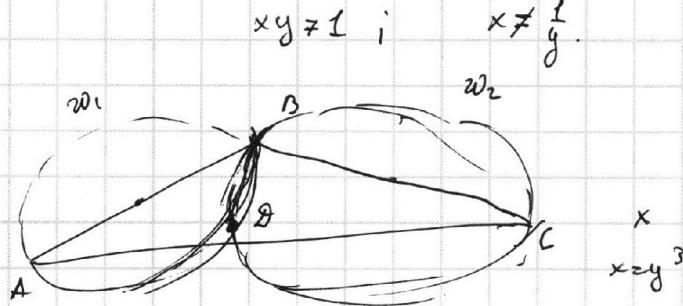
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

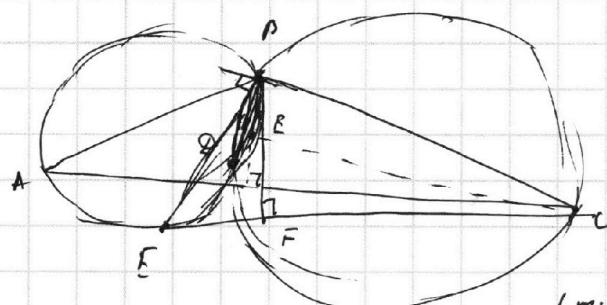
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$xy \neq 1 \quad i \quad x \neq \frac{1}{y}.$$

$$x = y^3$$

$$\begin{aligned} & 2a^3 - 4a^2 + 2a^2 - 2a^3 - 2 + 2a \\ & - 2a^2 + 2a - 2 \\ & 2a^2 - 2a + \\ & \frac{a^2 - a + 1}{a - 1} \end{aligned}$$

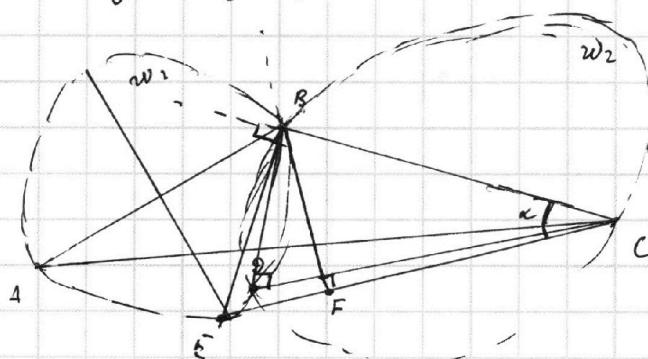


$$-4y^2 + 10y - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} & -(4 \cdot 2y^2 - 5y + 2) \\ & \Delta = 25 - 16 = 9 \\ & y = \frac{5+3}{4} = 2 \quad y = 2 \\ & x = 1 \end{aligned}$$

BE касается w_1 в точке B.

$$\cos \alpha = \frac{3}{4}$$



$\alpha = 1$ решения (5) НЕТ.

$\alpha = 0$ или $\alpha = 2$ решения

(3), (5) изображены

$$\alpha = 1;$$

$y = 2x$; одно решение.

$y = 6x$ одно решение.

$$x^2 - 4x^2 + 4x^2 + 4x^2 = 0$$

(3) и (5) v

$$\begin{aligned} & \triangle BEC; \cos \alpha = \frac{BC}{BE} = \frac{3}{4} \\ & \triangle BEC; \cos \alpha = \frac{BC}{CE} = \frac{3}{4} \\ & 24 - 2 = 22 \\ & (1; 5) \quad \frac{BC}{CE} = \frac{EC}{BC} = \frac{3}{4} \\ & 2345 \\ & 5-1 \quad n^2 = EC \cdot EC \end{aligned}$$

$$(y^3 - 1) = (y - 1)(y^2 + y + 1)$$

$$\alpha = \pm 1 \quad (3) \quad \times \frac{301}{46}$$

$$\begin{aligned} & -2(y^3 + 1) = 4(y + 1)(y^2 - y + 1) \\ & x^2 - 6x + 9 = 0 \\ & x^2 + 2x + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha = 1; \\ & x^2 - 6x + 9 = -2x \\ & 3x^2 - 6x + 3 = 0 \\ & x^2 + 2x + 1 = 0 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$4a = 5a^2 - 10ab + 5b^2$$

$$5a^2 - a(10b + 4) + 5b^2 = 0$$

$$\Delta = 100b^2 + 80b + 16 - 40b^2 = 60b^2 + 80b + 16$$

$$40b^2 + 80b + 16 = 4(10b^2 + 20b + 4)$$

$$(10b+2)^2 = 0$$

$$4b = 5a^2 - 10ab + 5b^2$$

$$5a^2 - 10ab + 5b^2 - 4b = 0$$

$$\Delta = 100b^2 - 100b^2 + 80b = 80b$$

$$a = \frac{10b \pm \sqrt{80b}}{10}$$

$$(1): 4a = 5a^2 - 10ab + 5b^2$$

$$a = \text{НОК}(a; b)$$

$$a: b$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5$$

$$b = 5; a = ?$$

$$5 \cdot a = \text{НОК}(a; b)$$

$$5 \cdot 4 = \text{НОК}(4; 5); 4 \cdot 5;$$

$$b = 20; a = 28.$$

$$2 \cdot 5 \cdot 28 = \text{НОК}(20; 28)$$

$$8 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 7.$$

$$5 \cdot 7 \cdot 4.$$

$$\text{НОК}(a; b) = 5a.$$

$$B = 5 \cdot K, K = ?.$$

$$B = K \cdot 5^2, \text{ где } K \in \mathbb{N};$$

$$\text{НОК}(5K^2; a) = 5a. ; a = b + \frac{2\sqrt{5b}}{5} \Rightarrow K^2 5 + 2K$$

$$\text{НОК}(5K^2; 5K+2) = 5(5K+2). a = K(5K+2).$$

$$\text{НОК}(5K^2; 5K+2) = 25K+10; 5K^2 \leq 5K+2;$$

Б. с. а.

НОК(9; 25)

НОК(6; 18) · 3;
6; 18. НОК(3;

6 · НОК(1; 5) · 3 · 5.
6 · 3 = 18 (НОК 3; 5).

НОК(6; 21)

3 · НОК(2; 7)

$\sqrt{80b} \in \mathbb{N}: 3 \cdot 14;$

$$\sqrt[2]{\sqrt{20b}}$$

$$\frac{10b \pm 4\sqrt{5b}}{10}; b \pm \frac{2\sqrt{5b}}{5};$$

$$\frac{\sqrt{5b}}{5} \in \mathbb{N}.$$

$$b = 5; b = 4 \cdot 5; b = 16 \cdot 5$$

$$a = 5 \pm 2 = 4. b = 16 \cdot 5$$

$$24 - 3 + 1 \quad a = 45 + 8 = 28.$$

$$a = 16 \cdot 5 +$$

$$a = 4 \cdot 5 + 4 = 24; b = 20$$

$$5 \cdot 24 = \text{НОК}(20; 24)$$

$$5 \cdot 2^2 \quad 6 \cdot 2^2 \\ \hline 5 \cdot 4 \quad 6 \cdot 4$$

$$8 = 80; a = 80 + 8 = 88. \\ 2^4 \quad 2^3 \\ 2 \cdot 5 \quad 2^3 - 11.$$

$$2^4 \cdot 5 \cdot 11 = 2^4 \cdot 55.$$

$$5588.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$4 \cdot \min(a; b) = 5(a - b)^2$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$\max(a, b) = \text{НОК}(a, b)$$

$$\text{НОК}(5; 4) = 5 \cdot 4$$

$$\text{НОК}(6; 3) = 2 \cdot 3, \quad ; \quad 3$$

$$5 \cdot \max(a, b). \quad \text{Получаем } a > b.$$

$$\begin{cases} 5 \cdot a = \text{НОК}(a, b) \\ 5 \cdot b = 5 \cdot (a - b)^2 \end{cases} \quad \text{если } \text{НОК}(a, b) = 5 \cdot a.$$

$$\cancel{\text{БезББ}} \quad b : 5.$$

$$b = 5k.$$

$$4 \cdot 5k = 5(a - b)^2$$

$$4 \cdot k = (a - b)^2.$$

$$f(x) = x^2 + bx + c. \quad N_1 \quad V$$

$$f(x) = -2x^2 - \text{ег. решение}, \quad f(x) = -6 - \text{ег. реш.}$$

$$f(x) = 0?$$

$$x^2 + bx + c = -2x^2$$

$$3x^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 12c = 0, \quad \text{т.к. ег. решение.}$$

$$x^2 + bx + c = -6$$

$$x^2 + bx + c + 6 = 0$$

$$\Delta = 0; \quad b^2 - 4c - 24 = 0.$$

$$\begin{cases} b^2 - 12c = 0 \\ b^2 - 4c - 24 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 36 - 36 = 0 \\ 36 - 12 - 24 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$b^2 = 12c; \quad 12c - 4c - 24 = 0$$

$$8c = 24$$

$$c = 3$$

$$\cancel{\text{ББ}} \quad \begin{cases} c = 3 \\ b = 6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} c = 3 \\ b = -6 \end{cases}$$

$$b^2 = 12 \cdot 3 = 36; \quad b = \pm 6.$$

$$x_1 + x_2 = \pm 6.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N₃

$$\begin{cases} 3 \log_x 2x + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{5} = 0 \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{xx+x}{x-1} \\ y \leq 24 \end{cases}$$

N₂ ✓

$$n = 5^{151} \cdot 7^{600}, \quad n = xy, \text{ причем } y \mid x.$$

$n = 5^{157} \cdot 7^{600}$, а 5, 7 простые числа, то

и x, y должны быть $x = 5^a \cdot 7^b$ и $y = 5^c \cdot 7^d$.

причем $\begin{cases} a+b=157 \\ c+d=600 \end{cases}$.

$y \mid x, \quad y \geq x$.

когда $\varphi \geq \alpha$ и $\varphi \geq \beta$.

тогда как. в представить

$$600 = \varphi + \beta, \text{ где } \varphi \geq \beta.$$

~~и~~, $\alpha, \beta, \varphi, \gamma \in \mathbb{N}$,

$$0+600$$

д. кв. $\alpha+\beta=157$

$\alpha, \beta, \varphi, \gamma \geq 0, \in \mathbb{Z}$.

$$1+599$$

$$0+157$$

0, 1, 2, 3, 4,

$$2+598$$

$$1+156$$

4-0, +1.

$$\dots$$

$$2+149$$

5.

$$299+301$$

$$\dots$$

$$300+300$$

$$45+45$$

кал: $300-0+1=301$

кал: $75-0+1=76$.

γ

кал кал 301-76.

φ

N₆ ✓

$$\begin{cases} (y+x^2-4x+1)(x^2-2xy+3y^2)(y-2x+1)=0 \quad (1) \\ y = (-2a+4)x + a^2 - 1 \quad (2) \end{cases} \text{ решений?}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 301 \\ \hline 301 \\ \hline 46 \\ \hline 000 \\ \hline 228 \end{array}$$

решения (1) y_n

$$\begin{cases} y+x^2-4x+1=0 \\ x^2-2xy+3y^2=0 \\ y-2x+1=0 \end{cases} ; \quad (2).$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 301 \\ \hline 301 \\ \hline 46 \\ \hline 000 \\ \hline 228 \\ \hline 22846 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Получаем ищем общность $a > b$.

$$4 \cdot b = 5(a - b)^2$$

$$5 \cdot a = \text{НОК}(a, b), \quad ; \quad b = 5 \cdot k.$$

~~тогда~~

$$4k = 5(a - b)^2$$

$$k : 5;$$

~~$$20ab = \text{НОК}(a, b) \cdot 5(a - b)^2$$~~

~~$$4ab = \text{НОК}(a, b) \cdot (a - b)^2$$~~

~~$$\text{НОК}(a, b) \cdot (a^2 - 2ab + b^2)$$~~

$$\frac{1}{b} = 3^{-2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \log_x 2x + \log_y 3 + 8 \log_{xy} \frac{1}{9} = 0 \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{2x+7}{x-1} \\ y \leq 2x \end{array} \right.$$

$$\text{ОГЭ}: \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ xy > 0 \\ y \neq 1 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\log_{2x^3} x} + \frac{1}{\log_3 y} + \frac{1}{\log_{xy} 8xy} = 0$$

$$\frac{1}{3 \log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{18}{\log_3 xy} = 0$$

$$\frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{18}{\log_3 xy}, \quad ; \quad \frac{9 \log_3 y + \log_3 x}{\log_3 x - \log_3 y} = \frac{18}{\log_3 xy}.$$

~~$\log_3 y + \log_3 x$~~

$$\log_3 x + \log_3 y.$$

$$\frac{9b+a}{ab} = \frac{18}{a+b}.$$

$$9ab + 9b^2 + a^2 + ab = 18ab.$$

~~$$a^2 - 8ab + 9b^2 = 0$$~~

~~$$\Delta = 64b^2 - 36b^2 - 18b^2 =$$~~

$$1 - 8\left(\frac{b}{a}\right) + 9\left(\frac{b^2}{a^2}\right) = 0, \quad ; \quad \frac{b}{a} = t$$

$$9t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$\Delta = 64 - 36 = 28$$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{18}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 64 \\ -36 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 9 \\ -8 \\ \hline 1 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \begin{cases} y \\ x^2 - 2xy + y^2 = 0 \\ -(2x+4)x + a^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + 2y^2 > 0.$$

$$(x-y)^2 + 2y^2 \geq 0. \text{ только тогда, когда } y=0=x.$$

$$\begin{array}{l} x=0 \\ y=0. \end{array} ; \quad (2) : 0 = a^2 - 1. ; a = \pm 1.$$

также можно одно решение \Rightarrow ~~решение~~. и $\begin{array}{l} x \neq 0 \\ y \neq 0. \end{array}$

$$\text{тогда } x^2 - 2xy + 3y^2 > 0.$$

$$a) -2ax + 4x + a^2 - 1 + x^2 - yx + 1 = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

уравнение $\Delta > 0$

$$4a^2 - 4a^2 = 0. \text{ Всегда}$$

$$\Delta = 0$$

$$-a^2 + 4a - 1 = \frac{a^2 + a - 1}{a-1}$$

$$x = a$$

$$-2a^2 + 2a - 2$$

$$-\frac{(a^2 + a - 1)}{1-a} = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$y = -2a^2 + 4a + a^2 - 1$$

$$y = -a^2 + 4a - 1$$

$$y = \frac{2a^3 - 4a^2}{2(1-a)} + a^2 - 1$$

$$\frac{2a^3 - 4a^2 + 2a^2 - 2a^2}{-2 + 2a} = 0$$

$$b) -2ax + 4x + a^2 - 1 - 2x + 1 = 0$$

$$2x - 2ax + a^2 = 0$$

$$\cancel{\text{реш}} \quad 2x(1-a) + a^2 = 0$$

$$x = \frac{-a^2}{2(1-a)} ; \quad y = -\frac{(-2a+4) \cdot a^2}{2(1-a)} + a^2 - 1.$$

$$x = \frac{-a^2}{2(1-a)}$$

$$y = \frac{a^3 - 2a^2}{(1-a)} + a^2 - 1. ; \quad 1-a \neq 0$$

$$a \neq 1.$$

$$a^3 - 2a^2 + a^2 - a^3 - 1 + a \neq 0$$

$$16 - 16$$

$$\text{если } a = -1, \text{ то}$$

$$-a^2 + a - 1 \neq 0$$

$$4 - 1 = 3.$$

$$3 \text{ решения.}$$

$$a^2 - a + 1 \neq 0 \text{ не равна нулю}$$

$$a \neq 0$$

$$a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

$$\cancel{x \neq 0} \quad a = \frac{-a^2}{2(1-a)} ; \quad a \neq 1.$$

$$\begin{array}{l} y = -1 \\ y = -1. \end{array}$$

$$a \leq 0 \text{ и } a \geq 5$$

решение (4,5)

$$2a - 2a^2 = -a^2$$

$$2a - a^2 = 0$$

$$a(2-a) = 0$$

$$\begin{array}{l} a \leq 0 \\ a = 2 \end{array}$$

$a = 0$
решения (3) и (5)
совпадают.