МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12

1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = -2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -6$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.

2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y, где y делится на x?

3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3\log_x 27 + \log_y 3 + 8\log_{xy}\dfrac{1}{9} = 0, \\ \dfrac{3y+3}{y-1} < \dfrac{7x+7}{x-1}, \\ y \leqslant 24. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a-b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D. Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC, а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1. Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos\angle BCE = \frac{3}{4}$.

6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0, \\ y = (-2a+4)x + a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписана сфера ω. Луч с началом в точке A пересекает ω точках P и Q, а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC, если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 11$, $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $AQ = 2\sqrt{5}$, $CM = 4\sqrt{5}$, $CN = 5\sqrt{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть $f(x) = x^2 + ax + b$. Тогда по условию $x^2 + ax + b = -2x^2$

$\Leftrightarrow$ $3x^2 + ax + b = 0$ — имеет ед. решение $\Leftrightarrow$ $D = 0 = a^2 - 4 \cdot b \cdot 3$

$\Leftrightarrow$ $a^2 - 12b = 0$ $\Rightarrow$ $a^2 = 12b$ (1) Также по условию $x^2 + ax + b = -6$

$\Leftrightarrow$ $x^2 + ax + b + 6 = 0$ — имеет ед. решение $\Leftrightarrow$ $D = 0 = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (b+6) = 0$

$\Rightarrow$ $a^2 = 4(b+6)$ (2). Тогда с учётом (1) и (2) $\Rightarrow$ $a^2 = 12b = 4b + 24$

$\Rightarrow$ $b = 3$ $\Rightarrow$ $a^2 = 36$ $\Rightarrow$ $a = \pm 6$ (причём оба варианта подходят)

1) $b = 3$, $a = 6$ $\quad x^2 + 6x + 3 = -2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2$; корень -1

$x^2 + 6x + 3 = -6 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$; корень -3

2) $b = 3$, $a = -6$ $\quad x^2 - 6x + 3 = -2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$; корень 1

$x^2 - 6x + 3 = -6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$; корень 3

$f(x) = 0 = x^2 + ax + b$. $D = a^2 - 4b = 36 - 4 \cdot 3 = 24 > 0$ $\Rightarrow$ корни есть при $a^2 = 36$, тогда по т. Виета $x_1 + x_2 = -a$. Значит сумма корней либо 6, либо -6 $(\mp a)$

Ответ: ± 6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть $5^{151} \cdot 7^{600} = x \cdot y$; $y \vdots x \Leftrightarrow y = Kx$ $(y, k, x \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow$ $5^{151} \cdot 7^{600} = Kx^2$, т.е. необходимо найти все такие x, что

$5^{151} \cdot 7^{600} \vdots x^2$ $(x \in \mathbb{N})$. Очевидно, что $x = 5^{\alpha} \cdot 7^{\beta}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{Z} \geq 0$

тогда $5^{151} \cdot 7^{600} \vdots 5^{2\alpha} \cdot 7^{2\beta}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} 151 \geq 2\alpha \\ 600 \geq 2\beta \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} 75 \geq \alpha \geq 0 \\ 300 \geq \beta \geq 0 \end{cases}$

т.е. подходящих значений α равно $75+1=76$

а подходящих значений β равно $300+1=301$

и т.к. α и β могут быть выбраны независимо, то всего подходящих пар α и β будет равно $76 \cdot 301 = 22876$

Ответ: $76 \cdot 301 = 22876$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 3\log_x 27 + \log_y 3 + 8\log_{xy}\frac{1}{9} = 0 \quad (1) \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1} \quad (2) \\ y \le 24 \quad (3) \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{Z}$$

т.к. $x, y \in \mathbb{Z}$ и лежат в основании логарифмов, то $x > 1$; $y > 1$

р-м (1): $3\log_x 3^3 + \log_y 3 + 8\cdot\log_{xy}\cdot 3^{-2} = 0 \Leftrightarrow$

$9\log_x 3 + \log_y 3 = \frac{16}{\log_3 xy} = \frac{16}{\log_3 x + \log_3 y} \Leftrightarrow$

$(9\log_x 3 + \log_y 3)(\log_3 x + \log_3 y) = 16 \Leftrightarrow 9\log_3 x\cdot\log_x 3 + 9\log_x 3\log_3 y +$

$+ \log_y 3\cdot\log_3 x + \log_y 3\cdot\log_3 y = 9 + 9\log_x y + \log_y x + 1 = 16$

$\Leftrightarrow \log_y x + \frac{9}{\log_y x} = 6 \Leftrightarrow \log_y^2 x - 6\log_y x + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$(\log_y x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \log_y x = 3 \Leftrightarrow y^3 = x$

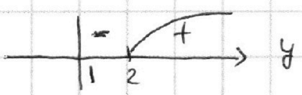
р-м (2): $\frac{3y+3}{y-1} < \frac{7(y^3+1)}{y^3-1} = \frac{7(y+1)}{y-1}\frac{(y^2-y+1)}{(y^2+y+1)}$

т.к. $y > 1$, то $\frac{y+1}{y-1} > 0 \Rightarrow$ на него можно сократить, не теряя корней

и не меняя знака $\Rightarrow 3 < 7\frac{y^2-y+1}{y^2+y+1} \Leftrightarrow 3(y^2+y+1) < 7(y^2-y+1)$

(домножили, т.к. $y^2+y+1 > 0$, при $y > 1$) $\Leftrightarrow 4y^2 - 10y + 4 > 0$

$\Leftrightarrow 2y^2 - 5y + 2 = (2y-1)(y-2) > 0$



$\Rightarrow$ подходят все $y > 2$

и т.к. $y \le 24$, то подходят $y \in [3; 24]$ ← 22 варианта.

$x = y^3$ восстанавливается однозначно (и очевидно тоже > 1)

Ответ: 22 пары

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4\min(a;b) = 5(a-b)^2 \\ 5\max(a;b) = \text{НОК}(a;b) \end{cases}$$

заметим, что если пара $(a;b)$ – решение, то $(b;a)$ – тоже, т.к. $(a-b)^2 = (b-a)^2$; $\min(a;b) = \min(b;a)$; $\max(a;b) = \max(b;a)$; $\text{НОК}(a;b) = \text{НОК}(b;a)$. Поэтому, не теряя общности, можно рассматривать только пары $(a;b)$ упорядоченные $(a > b)$, а остальные получать отражением (заменой a на b и b на a)

$a > b$; $\Leftrightarrow \begin{cases} 4b = 5(a-b)^2 & (1) \\ 5a = \text{НОК}(a;b) & (2) \end{cases}$

т.к. $a;b \in \mathbb{N}$, то из (1) следует что $4b \vdots 5$, т.е. $b \vdots 5$, пусть $b = 5b'$ $\Leftrightarrow$ $4\cdot 5b' = 5(a-5b')^2 \Leftrightarrow 4b' = (a-5b')^2$ – из этого равенства следует что b' – квадрат. Пусть $b = 5x^2$ $(1) \Rightarrow$

$4\cdot 5x^2 = 5(a-5x^2)^2 \Leftrightarrow 4x^2 = (a-5x^2)^2 \Rightarrow \pm 2x = a - 5x^2$

т.е. a имеет вид либо $a = 5x^2 + 2x$, либо $a = 5x^2 - 2x$

1) $b = 5x^2$; $a = 5x^2 + 2x$ $(x \in \mathbb{N})$

$$5\cdot(5x^2+2x) = \text{НОК}(5x^2+2x; 5x^2) = \text{НОК}(5x+2; 5x)\cdot x$$

$\Leftrightarrow 5(5x+2) = \text{НОК}(5x+2; 5x)$

1.1) $x = 2x'$, $x' \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow 5\cdot(10x'+2) = \text{НОК}(10x'+2; 10x') =$
$= 2\,\text{НОК}(5x'+1; 5x') = 2(5x'+1)\cdot 5x'$ (т.к. 2 последовательных числа всегда взаимопросты) $\Rightarrow 10(5x'+1) = 10x'(5x'+1) \Leftrightarrow x' = 1 \Rightarrow x = 2$

1.2) $x = 2x'+1$, тогда если $5x+2 \vdots p$ и $5x \vdots p \Rightarrow 5x+2 \equiv 0 \equiv 5x \pmod p$ $\Rightarrow 2 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow 2 \vdots p \Rightarrow p = 2$ но $5x \not\vdots 2 \Rightarrow 5x+2$ и $5x$ взаимопросты $\Rightarrow$ их НОК это их произведение.

$\Rightarrow 5(5x+2) = \text{НОК}(5x+2; 5x) = 5x(5x+2) \Rightarrow x = 1$

Т.е подойдут пары $(5;7)$; $(7;5)$; $(20;24)$; $(24;20)$ (с учётом отражения)

2) $b = 5x^2$; $a = 5x^2 - 2x$ $(x \in \mathbb{N})$, но тогда $a < b \Rightarrow \varnothing$

~~$\Leftrightarrow 5(5x-2) =$~~

Ответ: $(a;b) = (5;7)$; $(7;5)$; $(20;24)$; $(24;20)$

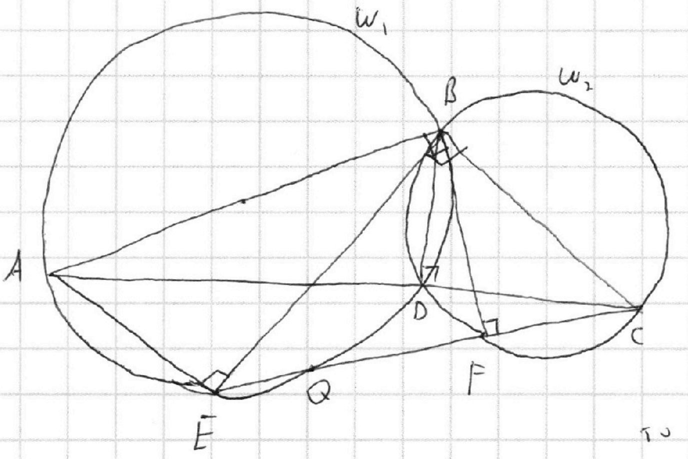
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Во-первых, пусть EC пересекает ω_2 в точке F', тогда $\angle BF'C = 90°$, т.к. опирается на диаметр BC, т.е. $BF' \perp EC$, $F' \in \omega_2$, но тогда $F' \equiv F$ (прямая совпадает с точкой F из условия). Пусть центр ω_2 точка O_2, а центр ω_1 – точка O_1, тогда $BF \perp O_1B$ (как касательная) $\Rightarrow AB \perp BF$. $BE \perp BC$ (по условию) $\Rightarrow BE \perp BO_2 \Rightarrow BE$ – касательная к ω_2. $\angle BDC = 90°$ (т.к. опирается на BC) $\angle BDA = 90°$ (т.к. опирается на AB) $\Rightarrow$ $\angle BDC + \angle BDA = 180° \Rightarrow A, D, C$ – лежат на одной прямой.



$\angle BCE = \alpha$

$\cos\alpha = \frac{3}{4}$

$AB \perp BF$, $EC \perp BF$

$\Rightarrow AB \parallel EC$

пусть EC пересекает вторично ω_1 в точке Q.

т.к. $\triangle EBC$ – прямоуг.

то $\angle BEC = \angle BEQ = 90 - \alpha$

т.к. $EQ \parallel AB$, то $\breve{AE} = \breve{BQ}$ (малые дуги), т.е. их градусные меры равны, т.е. $\angle ABE = \angle BEQ = 90 - \alpha$. $\triangle ABE$ – прямоуг. $\Rightarrow \angle A = \alpha = \angle C$; т.к. $AB \parallel EC$, то $\angle ABC = 180 - \angle BCE = 180 - \alpha$. $\angle AEC = 360 - (\alpha + \alpha + (180 - \alpha)) = 180 - \alpha$. т.е. $ABCE$ – параллелограмм. Причём $EB \perp AE$. тогда $AE = BC$

пусть d – диаметр ω_2; D – диаметр ω_1; тогда $\cos\angle A = \cos\alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{d}{D} = \frac{3}{4}$. По т. косинусов для $\triangle ABC$ и стороны AC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(180 - \alpha) = D^2 + d^2 + 2Dd\cos\alpha$$

$$= D^2\left(1 + \frac{9}{16} + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) = D^2 \cdot \frac{43}{16}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

по т. косинусов для ΔABC и $\angle BCA$:

$$BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos\angle BCA = AB^2$$

$$\Rightarrow \cos\angle BCA = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \frac{d^2 + D^2 \cdot \frac{43}{16} - D^2}{2d \cdot \frac{\sqrt{43}}{4} \cdot D} =$$

$$= \frac{\left(\frac{d}{D}\right)^2 + \frac{27}{16}}{2\frac{d}{D} \cdot \frac{\sqrt{43}}{4}} = \frac{\frac{9}{16} + \frac{27}{16}}{2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{43}}{4}} = \frac{6}{\sqrt{43}} = \cos\angle BCD$$

$$\Rightarrow \sin\angle BCD = \sqrt{\frac{7}{43}} \quad ; \quad \sin\angle BCF = \sin\angle BCE = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Тогда $\frac{BF}{BD} = \frac{\frac{BC}{(\sin\angle BCF)^{-1}}}{\frac{BC}{(\sin\angle BCD)^{-1}}} = \frac{(\sin\angle BCD)^{-1}}{(\sin\angle BCF)^{-1}} = \frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle BCD}$

(т.к. $BF = BC \cdot \sin(\angle BCF) = \frac{BC}{(\sin\angle BCF)^{-1}}$. Аналогично с BD)

$$\Rightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}}} = \frac{\sqrt{43}}{4}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{43}}{4}$

В этом случае в ответ идёт ещё $\vee\ a = 1$, $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

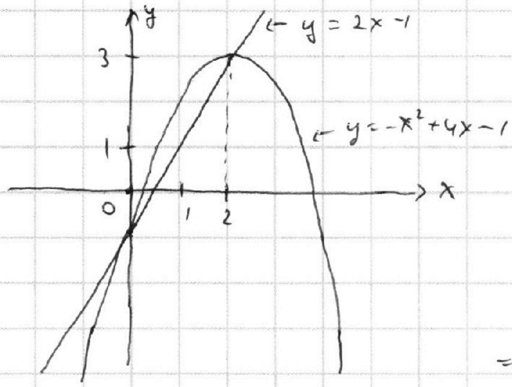
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (y + x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2xy + 3y^2)(y - 2x + 1) = 0 \quad (1) \\ y = (-2a+4)x + a^2 - 1 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow$ $(y - (-x^2 + 4x - 1))((x-y)^2 + 2y^2)(y - (2x-1)) = 0$

решениями являются все точки на параболе $y = -x^2 + 4x - 1$; точки, где $(x-y)^2 + 2y^2 = 0$, т.е. точка $(0;0)$ и прямая $y = 2x - 1$

прямая $2x-1$ пересекает параболу $-x^2+4x-1$ $\Rightarrow$ $2x - 1 = -x^2 + 4x - 1$ $\Leftrightarrow$ $2x = -x^2 + 4x$ $\Rightarrow$ в точках $(0;-1)$ и $(2;3)$.



•) Когда прямая из уравнения (2) пересекает параболу? $\Rightarrow$

$(-2a+4)x + a^2 - 1 = -x^2 + 4x - 1$

$\Leftrightarrow$ $-2ax + a^2 = -x^2$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2 = 0$

$\Rightarrow$ $x = a$ – ед. решение. Т.е. (2) – это уравнение касательной к параболе $-x^2+4x-1$ в точке с абсциссой a.

1) Когда прямая (2) проходит через $(0;0)$? $0 = 0 + a^2 - 1$ $\Rightarrow$ $a = \pm 1$. При $a = 1$ (2) имеет вид $y = 2x$ $\Rightarrow$ $\parallel$ прямой $2x-1$.
т.е. эта прямая проходит через $(0;0)$ и касается с параболой – 2 решения, $a = 1$ подходит. Если $a = -1$, то $y = 6x$, и не параллелен $2x-1$ $\Rightarrow$ имеет точку пересечения $(x = -\frac{1}{4};\ y = -\frac{3}{2})$ тогда в решение подойдут три точки, не подходит.

2) Если $a \neq \pm 1$, то (2) не параллельна $2x-1$ (т.к. $-2a+4 = 2$ $\Rightarrow$ $a = 1$, уже рассмотрено.) Если точка пересечения лежит на параболе (т.е. точки $(2;3)$; $(0;-1)$) то будет только одно решение, и т.к. (2) – касательная параболы в точке $(a; -a^2+4a-1)$, то $a = 0$, $a = 2$ – не подходят. В остальных случаях, когда $a \neq -1$, $a \neq 1$, $a \neq 0$, $a \neq 2$ (2) – касается с параболой, пересекает $2x-1$ не на параболе, и не проходит через $(0;0)$ $\Rightarrow$ есть ровно 2 решения.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Тогда $\frac{O_2L}{BO} = \frac{R}{2} = \frac{CO_2}{BC} = \frac{10}{\sqrt{121+4}} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (в силу подобия $\triangle CO_2L \sim \triangle COB$)

$\Rightarrow R = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow AA_1 = \frac{8}{\sqrt{5}} = 2R$

$$S_{ABCD} = \underbrace{11\cdot 2\cdot \tfrac{1}{2}}_{S_{COB}} + \underbrace{11\cdot 2\cdot \tfrac{1}{2}}_{S_{COD}} + \underbrace{2\cdot 1\cdot \tfrac{1}{2}}_{S_{BOA}} + \underbrace{2\cdot 1\cdot \tfrac{1}{2}}_{S_{DOA}} = 24$$

$$\Rightarrow V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = 24\cdot \frac{8}{\sqrt{5}} = S_{ABCD}\cdot AA_1 = \frac{192}{\sqrt{5}}$$

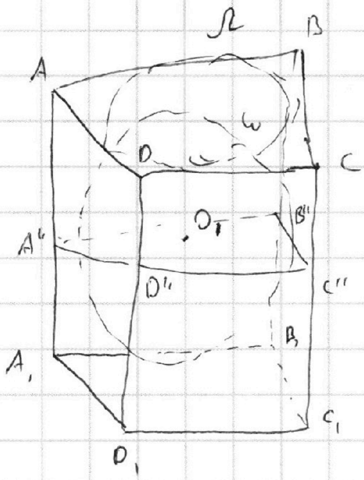
Ответ: $V = \frac{192}{\sqrt{5}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Степень точки A относительно сферы ω это $\sqrt{AP\cdot AQ}=\sqrt{4}=2$. Аналогично степень точки C относительно ω будет $\sqrt{CM\cdot CN}=\sqrt{5\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5}}=10$. Пусть O_1 — центр сферы ω, R — её радиус.

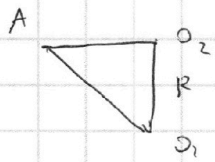
Тогда $AO_1^2-R^2=AP\cdot AQ=4$ (степень точки A), и $CO_1^2-R^2=CM\cdot CN=100$

Проведём через O_1 пл-ть $\alpha \parallel ABCD$.

Очевидно, что в α от сферы остается окружность с радиусом R и центром в O_1. Если сделать проекцию O_1 на ABA_1B_1 (точка Q) то $O_1Q \perp ABA_1B_1 \Rightarrow O_1Q \parallel A_1B_1C_1D_1 \Rightarrow O_1Q \in \alpha$. С другой стороны α вырезает из призмы четырёхугольник $A''B''C''D''$ который полностью равен $ABCD$, и т.к. вырезанная из сферы окружность касается всех боковых граней, она касается и сторон $A''B''$, $B''C''$, $C''D''$, $D''A''$ (т.к. точки касания $\in \alpha$).

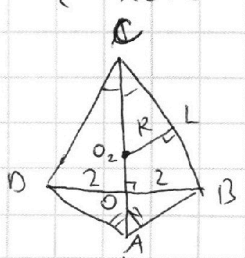
Это означает что $ABCD$ — ~~вписан~~ четырёхугольник, в который можно вписать окружность радиуса R. Назовём её Ω. Она же является проекцией ω на $ABCD$. Пусть её центр O_2

р-м $\triangle AO_1O_2$



$$AO_2^2=AO_1^2-O_1O_2^2=AO_1^2-R^2=4$$
$$\Rightarrow AO_2=2$$

Аналогично $CO_2=10$. ($O_1O_2=R$, т.к. $\rho(ABCD;O_1)=\rho(A_1B_1C_1D_1;O_1)=R$, а O_2 — проекция O_1). Но тогда $CO_2+AO_2=12=AO+CO$ $\Rightarrow$ O_2 лежит на AC. Но если O_2 — центр описаной окр.



то AC — диагональ и биссектриса $ABCD$

$\Rightarrow ABCD$ — дельтоид. $\Rightarrow DB \perp AC$

$BO=OD=2$.

L — точка касания Ω и BC

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$f(x) = x^2 + ax + b = -2x^2$ $a^2 = 12b$ $b = 3$

$2a^2 = 3 \cdot 4 \cdot b^3$ $a = \pm 6$

$x^2 + ax + b = -6 \Rightarrow x^2 + ax + b + 6 = \cancel{(x - x_1)^2}$

$\Rightarrow D = 0 = a^2 - 4(b+6) = 0 \rightarrow a^2 = 4(b+6)$

$x^2 + ax + b = 0$

$-a = \pm 6$

$x^2 + 6x + 3 = -2x^2$

$x^2 + 6x + 3 = -6$

$y : x \Rightarrow y = kx$

$k = 5^{151} \cdot 7^{600}$ $= xy = kx^2$

$x^2 + 6x + 3 = 0$

$\cancel{36 - 12 = 24}$

$5^{2k} \cdot 7^{2m}$

$76 \cdot 301$

$x + y \leq 21$

$$\begin{cases} 3\log_x 27 + \log_y 3 + 8\log_{xy} \frac{1}{3} = 0 \\ \frac{3y+3}{y-1} < \frac{7x+7}{x-1} \\ y \leq 24 \end{cases}$$

$y \leq 24$

$x, y > 1$

$\frac{1}{\log_3 x + \log_3 y}$

$\log_y x = 1$

$9\log_x 3 + \log_y 3 = 16\log_{xy} 3$

$\log_y x + 9\log_x y$

$9\log_x 3 + \log_y 3 = \frac{16}{\log_3 x + \log_3 y}$

$\cancel{9} + \log_y 3 \cdot \log_3 x$

$+ 9\log_x 3 \cdot \log_3 y + \cancel{1} = \cancel{16}\ 6$

$t + \frac{9}{t} = 6$ $\cancel{t^2 - 6t + 1 = 0}$

$3; 24$

$\cancel{36 - 4}$

$t^2 - 6t + 9 = 0$

$(t-3)^2 = 0 \Rightarrow t = 3$ $\log_y x = 3 \Leftrightarrow y^3 = x$

$\frac{3y+3}{y-1} < 7$ $\frac{3(y+1)}{y-1} < \frac{7(y^3+1)}{y^3-1} = \frac{7(y+1)(y^2-y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}$

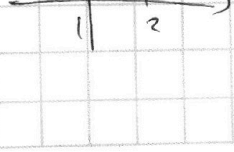
$3(y^2+y+1) < 7(y^2-y+1)$

$0 < 4y^2 - 10y + 4$

$2y^2 - 5y + 2 > 0$

$\cancel{25 - 16}$

$(2y-1)(y-2) > 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$4 \cdot \min(a;b) = 5(a-b)^2$

$5\max(a;b) = \text{НОК}(a,b)$

$a \geq b$

$4b = 5(a-b)^2$

$5a = [a;b]$

$\cancel{4b = 5a^2 - 10ab + 5b^2}$

$\cancel{b = 5b'}$

$4b' = (a-b)^2$

$b = 5x^2$

$2x = |a - 5x^2|$

$2x = a - 5x^2 \Rightarrow a = 5x^2 + 2x$

$5x(5x+2) = [5x^2; 5x^2+2x] = x[5x; 5x+2]$

$5(5x+2) = [5x; 5x+2]$ $25x(5x+2)$ $\left[\begin{array}{l} x \vdots 2 \\ x \nmid 2 \quad x=1 \end{array}\right.$

$x=1$

$x=2$

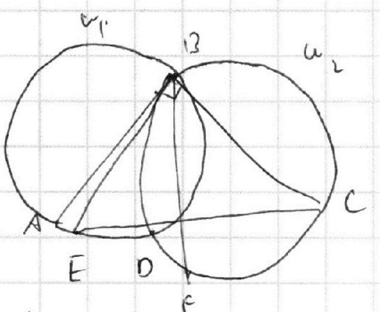
$10x'$

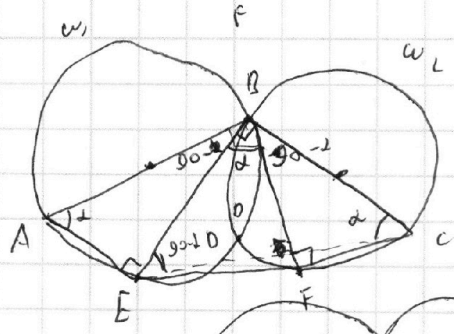
$5 \cdot 2x'; 5 \cdot 2x'+2$

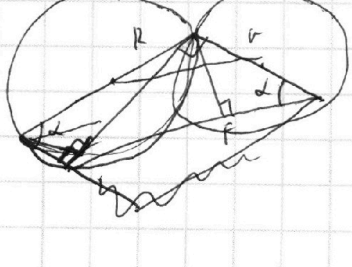
$5x'; 5x'+1$

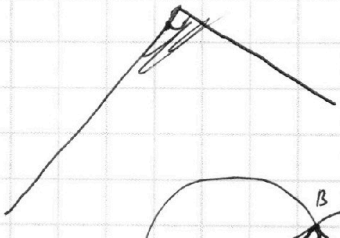
$5(5 \cdot 2x'+2) = 2 \cdot 5x' \cdot (5x'+1)$

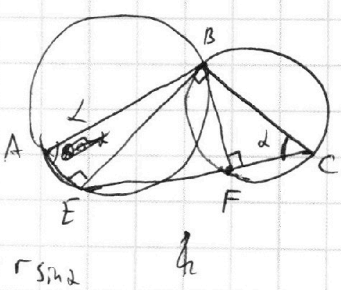
$x'=1$











$BF = r\sin\alpha$

$$\frac{R \cdot r \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{h}{2} \cdot \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

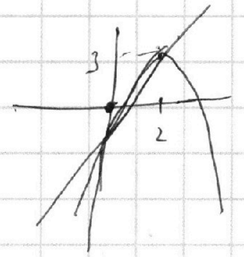
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~$y=x^2$~~

$y=0 \; x=0$

$(y+(x-2)^2-3)\left((x-y)^2+2y^2\right)(y-2x+1)=0$

$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=-(x-2)^2+3 \\ y=(-2a+4)x+a^2-1 \end{cases}$



$a\neq 1$

$2x-1=-(x-2)^2+3$

$2x-1=-x^2+4x-1$

$x^2-2x=0$

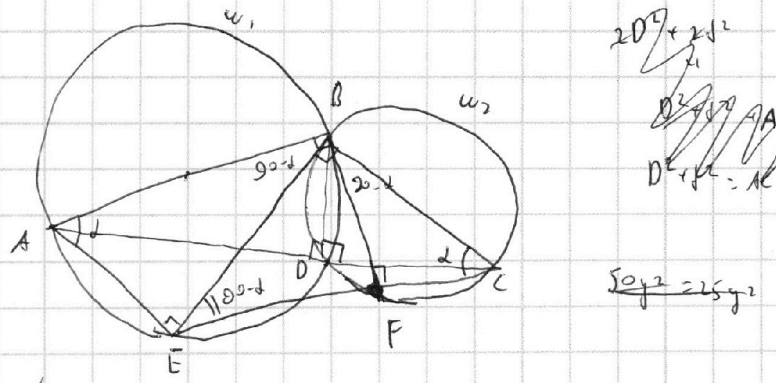
$27+16=43$

$-x^2+\cancel{4x}-\cancel{1}=(-2a+4)x+a^2-\cancel{1}$

$x^2-2ax+a^2=0$

$x=a$

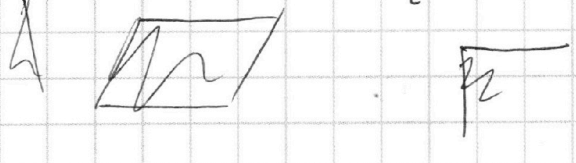
301×76: 1806, 2107, 22876

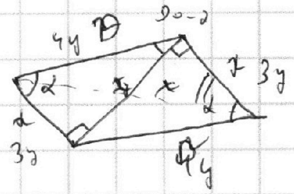


~~$2D^2+2d^2$~~

$D^2+d^2=AC^2$

~~$50y^2=25y^2$~~





$x^2+d^2-2xd\cos\beta=D^2$

$\cos\beta=\dfrac{x^2+d^2-D^2}{2xd}$

~~d^2+D^2~~ $d^2+D^2+2Dd\cdot\frac{3}{4}=x^2$

$d^2+D^2+\frac{3}{2}Dd=x^2$

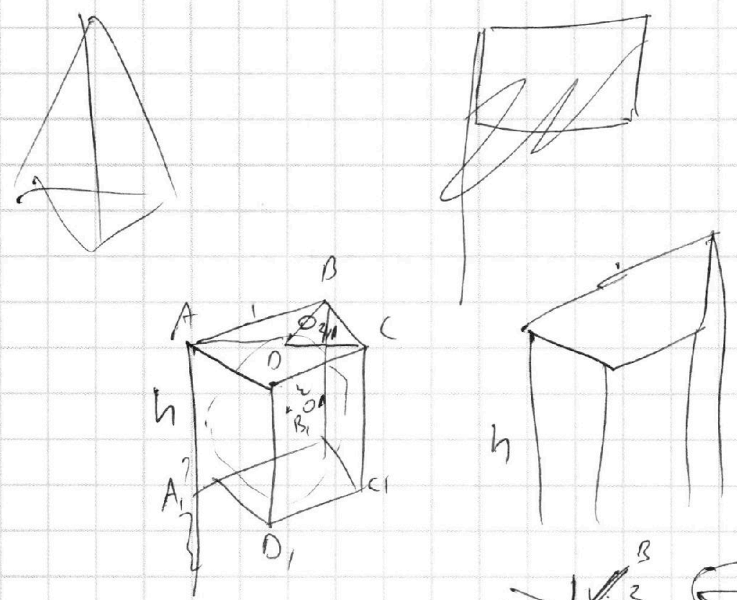
$\dfrac{2d^2+\frac{3}{2}Dd}{2(d^2+D^2+\frac{3}{2}Dd)}=\dfrac{2\cdot\frac{9}{16}+\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}}{2\left(\frac{9}{16}+1+\frac{9}{8}\right)}$

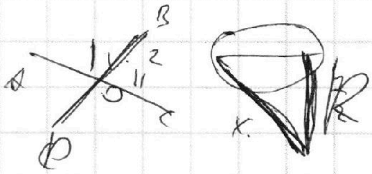
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





$AP \cdot AQ = 4$

$CM \cdot CN = 100$

$x^2 - 2R^2$