

$$bc = (rb + rc)^2$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} \left(\frac{a^2}{4} + r^2 \right) = r^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$2a \cdot \frac{b+c}{4} = \left(\frac{b+c}{2} \right)^2$$

$$2a = b+c$$

$$c^2 + b^2 = 4a^2$$

$$\frac{c^2 + b^2}{2bc} = \frac{4a^2}{2a^2}$$

$$c^2 + b^2 = 2a^2$$

МОСКОВСКИЙ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ

ИНСТИТУТ

25-944

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"

ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

$$\sin \frac{3\pi}{4} \left(\frac{a^2}{4} + r^2 \right) = r^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$r^2 \cdot \sin \frac{3\pi}{4} + r^2 \cdot \frac{b}{2} - 2 \sin \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{a^2}{4} = 0$$

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел (A, B, C) такие, что

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел (x, y) такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Илья и Вася вычислили, что вероятность им обоим выиграть билет на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AC в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{3}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют системе неравенств

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N1) Пусть числа имеют вид: $A = \overline{aaaa}$

Тогда ≥ 1 цифра числа B
равна 2.(1)

$$B = \overline{xyz} \quad (0, x, m \neq 0)$$

$$C = \overline{mn}$$

≥ 1 цифра числа C равна 3.(2)

$$A \cdot B \cdot C = t^2, t \in \mathbb{N}.$$

$A = a \cdot 1000 + a \cdot 100 + a \cdot 10 + a = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$.
 a — это цифра от 1 до 9. Заметим, что 101 — простое число и $A \cdot B \cdot C = t^2$. В A 101 входит в 1ой степени ($a \cdot 101, a \leq 9$). В C 101 входит в нулевой степени, т.к. $1 \leq C \leq 99 < 101$. В t^2 101 входит в четной степени, т.к. это квадрат. Следовательно получаем, что в разложении числа B на множители 101 входит в четной степени $\Rightarrow$ хотя бы в 1ой $\Rightarrow$

$$\Rightarrow B \div 101$$

$$100 \leq B \leq 999$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B=101 \\ B=202 \\ B=303 \\ B=404 \\ B=505 \\ B=606 \\ B=707 \\ B=808 \\ B=909 \end{cases}$$

Воспользуемся условием (1).
Получаем, что B однозначно равно $202 = 2 \cdot 101$.

$$A \cdot B \cdot C = (a \cdot 11 \cdot 101) \cdot (2 \cdot 101) \cdot C = t^2$$

$$2a \cdot 11 \cdot C = \left(\frac{t}{101}\right)^2 = x^2$$

Аналогичным рассуждением, получаем, что $x^2 \div 11 \Rightarrow$
 $B \cdot \frac{x^2}{11} = 2a \cdot C$ 11 входит в четной степени $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{хотя бы в 1ой} \Rightarrow \begin{cases} 2a \cdot C \div 11 \\ 2 \nmid 11 \end{cases}$$

$$a \nmid 11, \text{ т.к. } 1 \leq a \leq 9$$

$$\Rightarrow C \div 11.$$

Продолжение на обороте.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1 Прогноз: $C: 11$
 C -сбалансированное
в числе C есть
хотя бы 1 цифра 3 } $\Rightarrow$ число C
оригинально
равно 33.

Итого, $C = 33$, $A = 11 \cdot 101 \cdot d$, $B = 202$.

$$A \cdot B \cdot C = 3 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 101 \cdot d \cdot 2 \cdot 101 = 3 \cdot 2 \cdot d \cdot (11 \cdot 101)^2 = t^2$$

$$3 \cdot 2 \cdot d = \left(\frac{t}{11 \cdot 101} \right)^2 = y^2$$

Тогда в d 3 и 2 входят в четных степенях $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ хотя бы в первую $\Rightarrow \begin{cases} d : 6 \\ d - \text{натуральное} \\ \text{число от } 1 \text{ до } 9 \end{cases} \Rightarrow d = 6$

Значит, получаем. $C = 33$
 $B = 202$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot 6 = 1111 \cdot 6 = 6666$$

Итак, тройка существует и она одна

Ответ: $(6666; 202; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2) $xy > 0$. По условию:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \quad x \neq 1$$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{(x-1) + (y+1) + 2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} \quad \left| : (x+y+2) \neq 0, \text{ так } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow x+y+2 > 2 \right.$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-1)(y+1)}$$

$$xy = xy + x - y - 1$$

$$x = y + 1$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1) = \\ &= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3(а) Пусть $\alpha = \pi x$ (*)
 $\beta = \pi y$

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \sin \beta \sin \alpha = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta$$

$$(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \sin \beta \sin \alpha - \cos \alpha \cos \beta = 0$$

$$(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha) = 0$$

$$\cos(2\alpha) + \cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$2 \cos \frac{3\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \cos \frac{3\alpha + \beta}{2} = 0 \\ \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k_1 \\ \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k_2 \end{cases}, \text{ где } k_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = \pi + 2\pi k_1 \\ \alpha - \beta = \pi + 2\pi k_2 \end{cases}$$

(*)

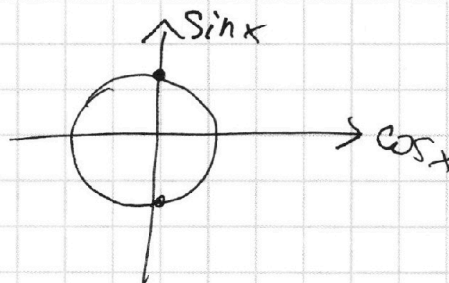
$$\Rightarrow \begin{cases} 3\pi x + \pi y = \pi + 2\pi k_1 \\ \pi x - \pi y = \pi + 2\pi k_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 + 2k_1 \\ x - y = 1 + 2k_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k_1 + 1 - y}{3} \\ x = y + 1 + 2k_2 \end{cases}$$

Получаем, что нам подходит пара чисел

$$\left(\frac{2k+1-t}{3}, t \right) \text{ и } (t+1+2k, t), \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\left(\frac{2k+1-t}{3}, t \right) \text{ и } (t+1+2k, t), \text{ где } k \in \mathbb{Z} \text{ и } t \text{ действительное}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(5). \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \arcsin t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ \arccos t \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \arcsin t + \arccos p < \frac{3\pi}{2}$$

равенство достигается только в случае (тогда равенство)

$$\left\{ \begin{array}{l} \arcsin t = \frac{\pi}{2} \\ \arccos p = \pi \end{array} \right. \Rightarrow \text{Никогда не выполняется}$$

Все пары чисел (x, y) кроме $1 = \sin \frac{\pi}{2}$

$$\text{таким: } \left\{ \begin{array}{l} \arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \\ \arccos \frac{y}{4} = \pi \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{5} = 1 \\ \frac{y}{4} = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ y = -4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{2} + 10\pi k_1 \\ y = 4\pi + 8\pi k_2 \end{array} \right. \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ y = -4 \end{array} \right. \quad \text{только такая пара не покрывается}$$

x и y разной четности, значит, покрывает под решение любого уравнения (*)

$$x = \pi \left(\frac{5}{2} + 10k_1 \right) \quad \text{выбираем шаг } \neq 0, \text{ т.к. } \frac{5}{2} \neq 10k_1, \text{ т.к. левая часть не делится на } (-10k_1) \text{ - целое}$$

$\Rightarrow x$ - иррациональное. Видно, как x генерируется от начального условия с этим первым иррациональным

$$\text{Пары чисел } (t+1+2k, t) \text{ или пары } (x, y) \text{ с условием } \left(\frac{2k+t-t}{3}, t \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x+y=1+2k_1 \\ x-y=1+2k_2 \end{array} \right. \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x+y=1+2k_1 \\ x-y=1+2k_2 \end{array} \right. \quad (*) \Rightarrow x \text{ и } y \text{ разной четности. Значит, или покрывает все пары чисел } x \text{ и } y \text{ разной четности.}$$

Ответ: бесконечно много - 1 = бесконечно много.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14) Пусть всего учеников было x . А в конце месяца было выдано n билетов, где $n > 4 \Rightarrow n \geq 5$. ($n, x \in \mathbb{N}$). $x \geq 2$. (Ната и Васа).

Вероятность того, что Ната и Васа оба

пойдут на концерт $\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4}$ (это в начале месяца).

Т.к. C_x^4 — количество способов распределить 4 билета между x учениками, чтобы каждому раздалось не более 1 билета.*

(* — так мне ответил на вопрос по условию!)

А C_{x-2}^2 — распределить между всеми кроме Ната и Васа оставшиеся 2 билета.

В конце месяца вероятность будет $\frac{C_{x-2}^{n-2}}{C_x^n}$.

По условию: $\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{C_{x-2}^{n-2}}{C_x^n}$. Найдем n .

$$\frac{(x-2)! \cdot (x-4)! \cdot 4! \cdot 5}{(x-4)! \cdot 2! \cdot x! \cdot 2} = \frac{(x-2)! \cdot (x-n)! \cdot n!}{(n-2)! \cdot (x-n)! \cdot x!}$$

$$\frac{5 \cdot 3!}{x(x-1)} = \frac{n(n-1)}{x(x-1)}$$

$$5 \cdot 6 = n(n-1)$$

$$30 = n(n-1)$$

$f(n) = n^2 - n$ возрастает при $n \in \mathbb{N}$, т.к.

$$f'(n) = 2n - 1 > 0 \text{ при } n \geq 1$$

$f(6) = 30 \Rightarrow$ единственное подходящее n — это $n = 6$

Ответ: 6 билетов.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N6) $(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$ (1)
 $x^2 + y^2 \leq 25$ (2)

(2) $x^2 + y^2 - 25 = 0$ - уравнение окружности с центром в $(0,0)$ и радиусом 5. Тогда ^{второй} первую удовлетворяют точки круга с центром в $(0,0)$ и радиусом 5.

(1) $(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$

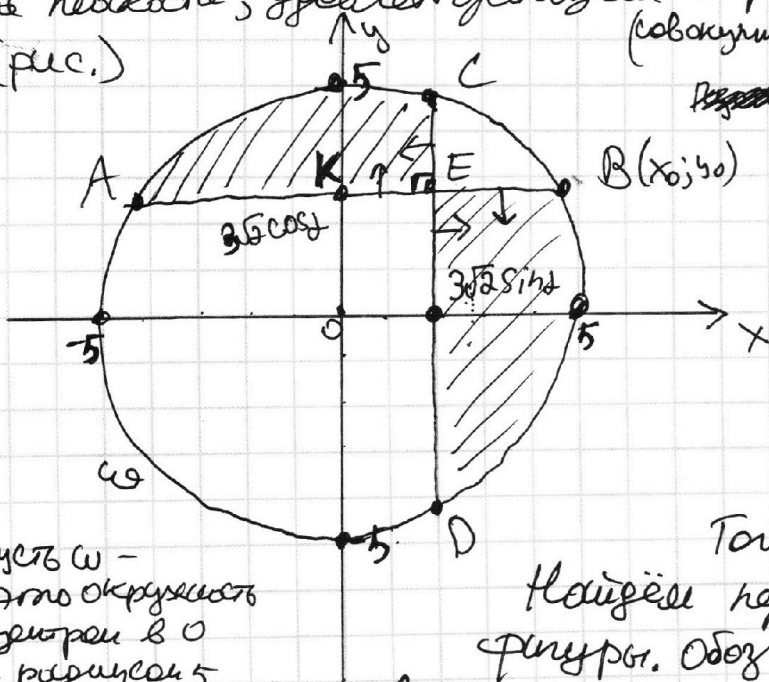
(*) $\begin{cases} x - 3\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha > 0 \\ x - 3\sqrt{2} \sin \alpha > 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha < 0 \\ x - 3\sqrt{2} \sin \alpha = 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha = 0 \end{cases}$ $(-1)3\sqrt{2} \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha \leq 3\sqrt{2} \cdot 1$
 $3\sqrt{2} \leq 5, \text{ так } \alpha \leq 25.$

Тогда

$-5 \leq -3\sqrt{2} \leq 3\sqrt{2} \leq 5.$

Значит, точки $(3\sqrt{2} \sin \alpha, 0)$ и $(0, 3\sqrt{2} \cos \alpha)$ лежат внутри круга.

Нарисуем фигуру, состоящую из всех точек на плоскости, удовлетворяющих неравенствам (совокупности (*)) (рис.)



Мы нарисовали фигуру, состоящую из всех точек на рисунке области.

Рисками l - это прямая $y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$ и m - прямая $x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$.

Тогда $l \perp m$.

Найдем периметр данной фигуры. Обозначим:

$l \cap \omega = \{A, B\}$ (смотрим рисунок)
 $m \cap \omega = \{C, D\}$
 $l \cap m = E$

Пусть ω - это окружность с центром в O и радиусом 5

Пусть $AB \cap \omega = K$

Продолжение на следующей листе →



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 Продолжение Найдём сумму длин дуг AC и BD окр. ω , примыкающих $\varphi(\alpha)$.

$$\angle AEC = 90^\circ \Rightarrow \frac{AC + BD}{2} = 90^\circ \Rightarrow \overset{\text{дуга дуги}}{AC} + \overset{\text{радиус } \omega}{BD} = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overset{\text{дуга дуги}}{AC}| + |\overset{\text{радиус } \omega}{BD}| = \pi \cdot r = \pi \cdot 5 = 5\pi.$$

Теперь найдём длину отрезка AB ($AE + EB$).

Пусть (x_0, y_0) — координаты точки B . Тогда

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 25 \\ y_0 = 3\sqrt{2} \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow x_0^2 = 25 - 18 \cos^2 \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = \pm \sqrt{25 - 18 \cos^2 \varphi}$$

т.к. B находится в четверти $x > 0, y > 0$.

$$\text{Тогда } KB = x_0 = \sqrt{25 - 18 \cos^2 \varphi} \stackrel{\text{из симметрии относительно } O_y}{=} AK$$

$$\text{Получаем, что } AB = 2KB = 2\sqrt{25 - 18 \cos^2 \varphi}.$$

$$\text{Аналогично, получим, что } CP = 2\sqrt{25 - 18 \sin^2 \varphi}.$$

Итого, получаем периметр $\varphi(\alpha)$.

$$|\overset{AB}{AC}| + |\overset{CD}{BD}| + \underbrace{AE + EB}_{AB} + \underbrace{CE + ED}_{CP} = 5\pi + 2\sqrt{25 - 18 \cos^2 \varphi} +$$

$$+ 2\sqrt{25 - 18 \sin^2 \varphi} = f(\varphi). \text{ Мы хотим найти максимальное значение функции } f(\varphi) \text{ и при каких } \varphi \text{ оно достигается.}$$

Продолжение на обороте $\rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6 Прогрессивное, Часть 2

$$\sin^2(2\alpha) \leq 1.$$

$$4\cos^2\alpha \sin^2\alpha \leq 1.$$

$$18^2 \cos^2\alpha \sin^2\alpha \leq 9^2$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \downarrow \quad 25^2 - 25 \cdot 18 + 18^2 \cos^2\alpha \sin^2\alpha \leq 9^2 + 25^2 - 25 \cdot 18.$$

$$(25 - 18\cos^2\alpha)(25 - 18\sin^2\alpha) \leq 9^2 + 25 \cdot 7$$

т.к. $\cos^2\alpha \leq 1$ ≥ 0 т.к. $\sin^2\alpha \leq 1$

$$2\sqrt{(25 - 18\cos^2\alpha)(25 - 18\sin^2\alpha)} \leq 2\sqrt{81 + 175}$$

$$25 \cdot 2 - 18(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + 2\sqrt{(25 - 18\cos^2\alpha)(25 - 18\sin^2\alpha)}$$

$$\left(\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha} + \sqrt{25 - 18\sin^2\alpha}\right)^2 \leq 2 \cdot 16 + 32$$

$\uparrow$
 $2 \cdot 16 + 32 = 64$

$$\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha} + \sqrt{25 - 18\sin^2\alpha} \leq 8$$

$$5\pi + 2\left(\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha} + \sqrt{25 - 18\sin^2\alpha}\right) \leq 5\pi + 16$$

- это максимум $f(\alpha)$, При этом он достигается только, если во всех предыдущих неравенствах - равенства. То есть из наших преобразований тогда и только тогда, когда $\sin^2(2\alpha) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: макс. $M = 5\pi + 16$

достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$



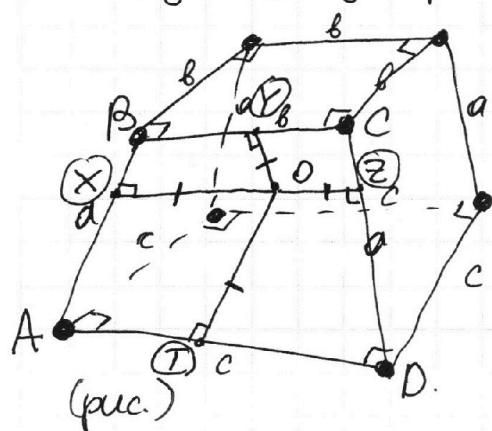
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА 1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N7) Прямая правильная $\Rightarrow$ основания -
 ~~квадраты~~ ^{правильные} ~~многоугольники~~ ^{треугольники} - равнобедренные треугольники.
 Пусть b и c - стороны верхнего и нижнего
 основания (по условию $b < c$), a - боковая
 сторона рб трапеции (боковой грани пирамиды).
 Пусть O - центр шара Ω .



Рассмотрим одну из
 боковых граней - грань ABCD
 (см. рис.)

Пусть O_1 - проекция O на
 плоскость ABCD.

Пусть X, Y, Z, T - точки
 касания шара Ω и ребер
 AB, BC, CD, DA соответственно.

$$OX = OY = OZ = OT.$$

ΔXO_1O - прямоугольный ($OO_1 \perp (ABCD) \Rightarrow OO_1 \perp O_1X$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow XO_1 = \sqrt{OX^2 - OO_1^2}. \text{ Аналогично найдем, что}$$

$$YO_1 = \sqrt{OY^2 - OO_1^2}, ZO_1 = \sqrt{OZ^2 - OO_1^2}, TO_1 = \sqrt{OT^2 - OO_1^2}.$$

$$\text{Т.к. } OX = OY = OZ = OT \Rightarrow XO_1 = YO_1 = ZO_1 = TO_1.$$

$O_1 \in (ABCD)$

$OO_1 \perp (ABCD)$ по т.т.п.

OX - радиус $\Rightarrow O_1X \perp AB$. Аналогично,

$OX \perp AB$

$O_1X \perp BC, CD, AD$

$\Rightarrow O_1$ - центр вписанной окружности ^{трапеции} ABCD $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ трапеция описанная $\Rightarrow AB + CD = BC + AD \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2a = b + c. (*)$$

Если то, что центр основания
 для удобства.

Всего у нас n -угольное ~~многоугольное~~ ^{основание}.

Продолжение

на ~~следующей~~ ^{следующей} листе



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

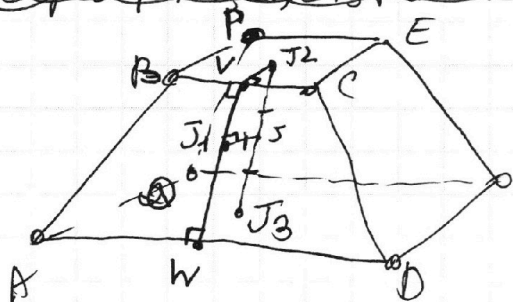
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА **2** из **3**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7 Продолжение. Часть 2 ~~Положим, что T равноудален~~

~~от ребер AB, BC, EF, FD тетраэдра $ABCEFD$.~~



Соединим T с $(BPCE)$
($ABCP$), ($AQFD$)

Положим J_2, J_1, J_3

(J -это центр шара U)

Тогда $JJ_1 = JJ_2 = JJ_3 = r$ — его радиус.

Соединим J_1 с BC и AP . Получим точки

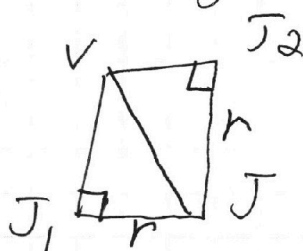
V и W .

~~$JJ_1 \perp (BPCE)$
 $JJ_2 \in (BPCE)$~~

$JJ_1 \perp (ABCD)$
 $JJ_2 \in (ABCD)$ } по Т.Т.Н
 $JJ_1 \perp BC$ } $\Rightarrow JJ_1 \perp BC$

$JJ_1 \perp BC$.

$JJ_2 \perp (BPCE)$ } по Т.Т.Н
 $JJ_2 \in (BPCE)$ } $\Rightarrow JJ_2 \perp BC$



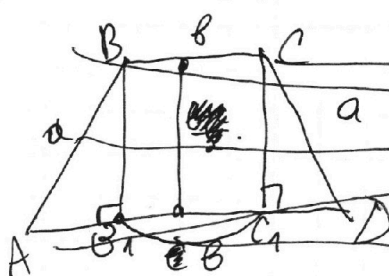
UV
 $\Delta VJ_1J_2 = \Delta VJ_2J$
по катету
и гипотенузе $\Rightarrow$

$\Rightarrow JJ_1V = VJ_2$. Аналогично, $JJ_1W = JJ_3W \Rightarrow$

$\Rightarrow JJ_1V + JJ_1W = VW = VJ_2 + JJ_3W$

Продолжим на следующей странице.

~~Положим, что T равноудален от ребер AB, BC, EF, FD тетраэдра $ABCEFD$.~~



$$S_{ABCEFD} = \frac{b+c}{2} \cdot \frac{b+c}{2} = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$$

$$4S_{ABCEFD} = (b+c)^2$$

$$= \frac{AD^2 + BC^2}{2} = \frac{c^2 + b^2}{2}$$

Положим $BB_1 \perp AD, CC_1 \perp AD$

$C_1, B_1 \in AD$

$B_1C_1 = BC = b, AB_1 = C_1D =$

по Т.Пифагора $BB_1 = \sqrt{AB^2 - AB_1^2}$

продолжим на следующей странице



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7 Продолжение. Часть 2. Пусть r_B и r_C — радиусы вписанных окружностей верхней и нижней граней.

Тогда $VW = \sqrt{J_2^2 + J_3^2}$

J_2 — радиус впис. окр. в боковую грань $\Rightarrow$

$\Rightarrow J_2$ равноудалено от сторон верхней грани $\Rightarrow$

$\Rightarrow J_2$ — центр впис. окр. в верхнюю грань $\Rightarrow$

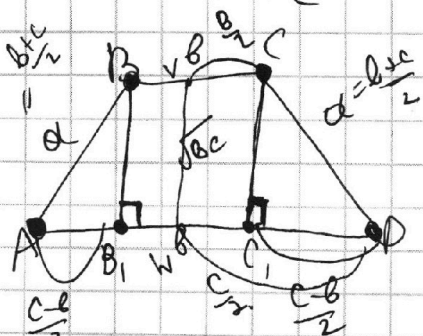
$\Rightarrow J_2 V = r_B$.

$$VW = r_B + r_C.$$

Мы хотим найти центр тяжести n -кой боковой грани.

$$M = \frac{n \cdot S_{ABCD}}{S_{нижней\ грани}} \cdot \text{Снижней грани} = \frac{S_{нижней\ грани} \cdot r_C}{r_C} = \frac{c \cdot h}{2} \cdot r_C.$$

$$M = \frac{2n \cdot S_{ABCD}}{c \cdot h \cdot r_C} = \frac{2 \cdot S_{ABCD}}{c \cdot r_C} \cdot ?$$



Пусть B_1 и C_1 — перпендикуляры

из B и C на AD . $B_1C_1 = b = B_1C_1$, $B_1D_1 = C_1D_1 = \frac{c-b}{2}$.

$$AB_1^2 = a^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 = VW^2 = (r_B + r_C)^2.$$

По Теореме Пифагора

$$AB_1^2 = a^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 = VW^2 = (r_B + r_C)^2.$$

$$a^2 - \left(\frac{2a-2b}{2}\right)^2 = (r_B + r_C)^2.$$

$$a^2 - (a-b)^2 = (r_B + r_C)^2$$

$$2ab - b^2 = (r_B + r_C)^2$$

$$(b+c)b - b^2 = (r_B + r_C)^2 \Rightarrow bc = (r_B + r_C)^2$$

$$S_{ABCD} = \frac{b+c}{2} \cdot h = \frac{(b+c)(r_B + r_C)}{2}$$

$$M = \frac{(b+c)(r_B + r_C)}{c \cdot r_C} \cdot ?$$

$$M = \frac{(b+c)\sqrt{bc}}{c \cdot r_C} \cdot ?$$

Для $VWDE$:
 $CP = \sqrt{VE \cdot WP} = \sqrt{\frac{bc}{2}} = \frac{b+c}{2}$
 $\Rightarrow b+c = \sqrt{bc}$

$\frac{r_B}{b} = \frac{r_C}{c}$
 $r_B + r_C = \sqrt{bc}$
 $\frac{b+c}{2} = \sqrt{bc}$
 $b+c = 2\sqrt{bc}$
 $\sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$
 $k=1 \Rightarrow b=c, r_B=r_C$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА ~~1~~ ИЗ 1

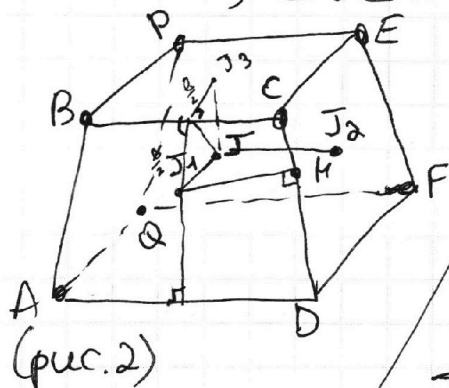
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Поря QR-кода недопустима!

17. Приращение Структуры О на оставшихся

3 боковых грани. Из симметрии получаем, что O от них равноудален, т.к. у этих 4 граней из их равенства равен радиус вписанной, равно расстояние от O до ребер этих граней $\Rightarrow$ по Теореме Пифагора равно расстояние до боковых граней.

Докажем, что O также является центром шара ω . Пусть это не так и T -его центр.

~~Вывод: введем~~ Структуры T и соединим грани (боковые)



(рис. 2)

с боковыми ребрами CD (см. рис. 2) Найдем точки J_1 и J_2 . $TJ_1 = TJ_2$.

Пусть H -основание перпендикуляра из T_1 на CD .

$TJ_1 \perp (ABCD)$ по Т.Т.П.
 TJ_1 -линия $\Rightarrow TJ_1 \perp CD$
 $T_1H \perp CD$
 $T_1 \in (ABCD)$

~~$TJ_2 \perp (CDEF)$~~
 ~~$T_2 \in (CDEF)$~~
 ~~T_2H -линия~~
 ~~$T_2H \perp CD$~~

по Т.Т.П.

$\Rightarrow T_2H \perp CD$

$$\Rightarrow TJ_1 = \sqrt{TJ_1^2 + T_1H^2} \Rightarrow TJ_1 = \sqrt{2}r, \text{ где } r - \text{радиус шара } \omega.$$

Продолжим вычисления



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Н7 Продолжение. Задача 2

$$BB_1 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2} = VW = \frac{b+c}{2} = \text{высота трапеции.}$$

$$a^2 - \frac{(c-b)^2}{4} = \frac{(b+c)^2}{4} \quad | \cdot 4.$$

$$4a^2 - c^2 - b^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$4a^2 = 2b^2 + 2c^2$$

$$b^2 + c^2 = 2a^2$$

$$\text{из (*) } 2a = b+c$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = 2\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$$

$$b^2 + c^2 = \frac{(b+c)^2}{2} \Rightarrow 2b^2 + 2c^2 = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$b^2 + c^2 = 2bc.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

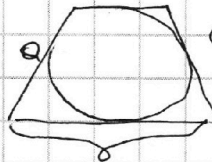
СТРАНИЦА

___ ИЗ ___

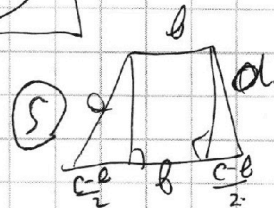
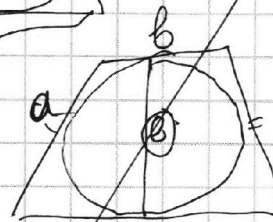
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

ребер a, m_1

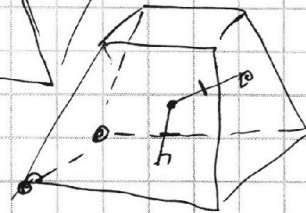
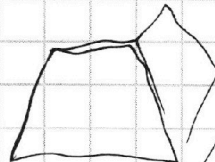
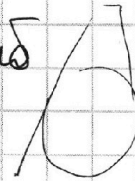


$$b+c=2a$$



Определить

в центр сферы
окр.



$$2a - b^2 = b^2$$
$$a = b^2 \quad b = a$$

$$h = \sqrt{a^2 - b^2 + 2ab} =$$

$$= \sqrt{2ab - b^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 b}{(2a-b)^3}}$$

$$S = \frac{\sqrt{2ab - b^2}}{2} (b+c)$$

$$\frac{4a\sqrt{b}\sqrt{2a-b}}{c^2}$$

$$\frac{4a\sqrt{b}}{(2a-b)\sqrt{2a-b}}$$

$$\frac{\sqrt{2ab - b^2} (b+c)}{c^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(5) $\sin x$

$$(t+1+2k, t)$$

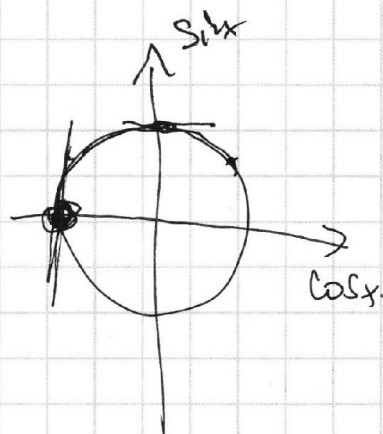
$$\left(\frac{2k+1-t}{3}, t\right)$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

~~8π~~ ~~8π~~ ~~8π~~ ~~8π~~

6π $-\frac{\pi}{2}$ 8π $\frac{\pi}{2}$

0 8π 8π



$$(1, 0)$$

$$\cos k = \frac{5\pi}{2}$$

$$(t+1+2k, t)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$x \neq 0$

$2k+1$

$0, 2$

$$\cos(30+60) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$90+60 - 30$$

$$\cos 30 + \cos 60 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} = 2$$

$$\cos 45 \cos 15$$

$$\cos 30 + \cos 90 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \cos 60 \cdot \cos 30 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$9x+y$

$x-y$

$x:2 \Rightarrow y:2$

$x:2 \Rightarrow y:2$

be map pg 2000



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

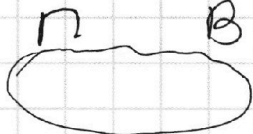
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

на
Гибера.

сир.
24

чернов

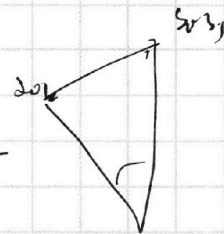


x дугей



h(?)

$$\frac{C_x^2}{C_x^4} \cdot 2,5 = \frac{C_x^{h-2}}{C_x^h}$$

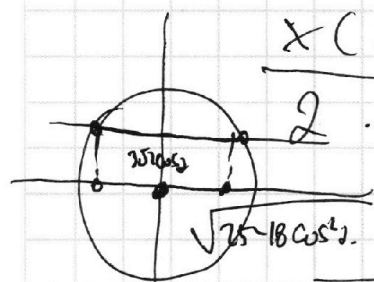


$$18 \cos^2 \alpha + 20^2 = 25$$

$$x_0^2 + y_0^2 = 25$$

$$y_0 = 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\frac{x(x-1)}{2} : \frac{x!}{4!(x-4)!} \cdot \frac{5}{2} = \frac{x!}{(x-4+2)!(h-2)!} : \frac{1}{(h-2)!}$$



$$\frac{x(x-1) \cdot 4! \cdot 5}{2 \cdot x(x-1)(x-2)(x-3) \cdot 2} = \frac{(x-h)! \cdot h!}{(x-(h-2))! (h-2)!}$$

$$\frac{4! \cdot 5}{4(x-2)(x-3)} = h(h-1)(x-h)(x-(h-1))$$

$$\frac{2\sqrt{25-18\cos^2 \alpha}}{2\sqrt{25-18\sin^2 \alpha}}$$

$$\frac{(5-3)!}{(x-2)(x-3)} = h(h-1)(x-h)(x-(h-1))$$

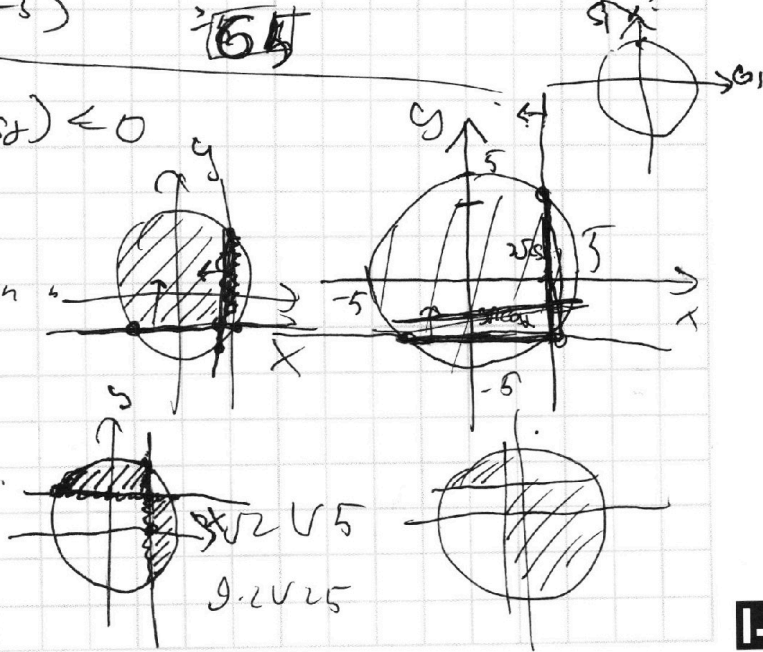
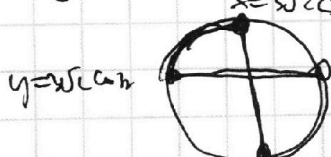
$$(x-3\sqrt{2}\sin \alpha)(y-3\sqrt{2}\cos \alpha) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

MAX M норма Фн б д н

$$x \leq 3\sqrt{2}\sin \alpha \leq 3\sqrt{2}$$

$$y \geq 3\sqrt{2}\cos \alpha \geq 3\sqrt{2}$$



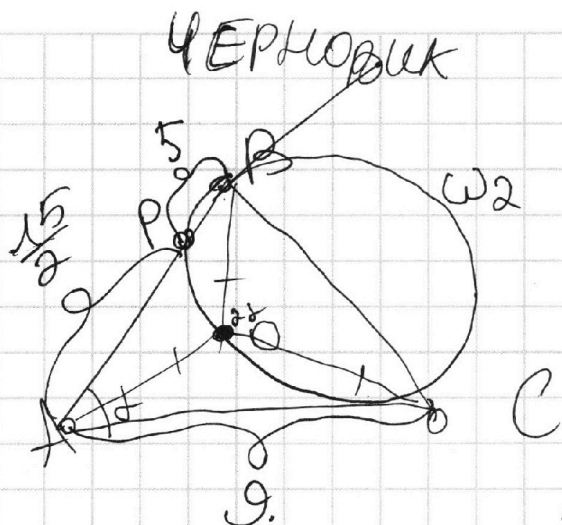


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



61

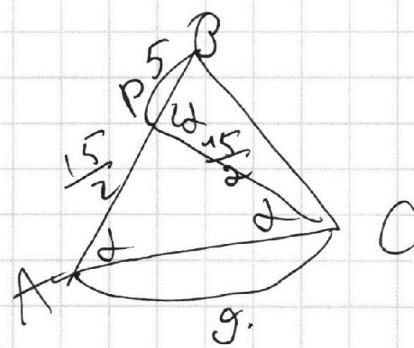
$S_{\triangle ABC} = ?$

$(x-1)$
 $y+1$

$(t+2k+1, t)$

$(t+2k+1, t)$

$(t+2k+1, t)$



$x, y > 0$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{x+y} = k$$

$$x^3 - y^3 - 3xy = ?$$

$x \rightarrow x-1$
 $y \rightarrow y+1$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = k$$

$(x \neq 1)$

$$\frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{y+x+2}{xy}$$

> 0

$(x+y+2)$

$$(x-1)(y+1) = xy$$

$$xy + x - y - 1 = xy$$

$$(x=y+1) \quad (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1) \cdot y = 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

(A; B; C)

$$A = \overline{aaaa} = (1000 + 100 + 10 + 1) \cdot a = 1111a = 11 \cdot 101a$$

$$B = \overline{uuu} \geq 2 \text{ группы } 2 = 202$$

$$C = \overline{uu} \geq 1 \text{ группа } 3$$

$$A \cdot B \cdot C = t^2$$

11
22
(33)
44

$$\overline{uu} = 2$$

101
102
203
304
405
506
607
708
809
900

sin(2α)

1. α + β

101 + 1000

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$2 \cdot 101^2 \cdot 11 \cdot \overline{uu} = t^2$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$C = 33$$

$$2 \cdot 11 \cdot a \cdot 3 \cdot 11 = t^2$$

$$a = 2 \cdot 3 \cdot k^2$$

(x; y) to

$$\frac{px}{py} = \frac{q}{r}$$

$$(\sin(\pi x) + \sin(\pi y)) \sin(\pi x) = \cos(\pi x) (\cos \pi x + \cos \pi y)$$

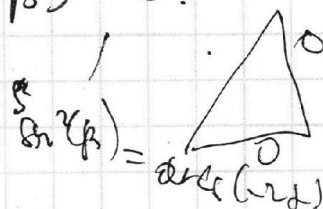
$$\sin^2 x + \sin x \sin y = \cos^2 x + \cos x \cos y$$

$$(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = \cos y$$

$$\cos y (\cos x - \sin x) = 0$$

$$(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + \cos y) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = \cos x \\ \sin x + \cos x = -\cos y \end{cases}$$



$$1 + \sin(2\alpha) = \cos^2 \beta$$

$$\sin^2 \beta + \sin(2\alpha) = 0$$

$$\sin^2 \beta = -\sin(2\alpha)$$

$$\arcsin(-\sin(2\alpha)) = \arcsin(\sin(2\alpha))$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(2\alpha) = 0$$

$$2 \cos \frac{3\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$$