



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a = 101 \cdot 11 \cdot a, \quad 1 \leq a \leq 9$$

простое

простое

$100 \leq B \leq 999$

$10 \leq C \leq 99$

$$A \cdot B \cdot C = n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

$A : 11$

$A : 101$

$$\begin{cases} n^2 : 11 - \text{простое} \\ n^2 : 101 - \text{простое} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2 : 11^2 \\ n^2 : 101^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B : 101, \quad C : 11$$

У Б хотят быть одна 1

B может быть: $101, 202, \dots, 909$

У С хотят быть одна 5

C может быть: $11, 22, \dots, 99$

$$A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 5 \cdot a = n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a : 5, \quad \text{но т.к. } 1 \leq a \leq 9 \Rightarrow a = 5$$

$$A = 5555, \quad B = 101, \quad C = 55$$

$$\text{Ответ: } (5555; 101; 55)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{*1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$1) \quad x+y+1=0$$

$$y = -x - 1$$

~~или~~ x, y -некомплементарные

$$y \Rightarrow \emptyset$$

$$2) \quad x+y+1 \neq 0$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy - 3y + 3x - 9$$

$$x = y + 3 \quad (\text{если } y \neq 0, \text{ т.к. } x > 0 \Rightarrow \text{вариант подходит})$$

$$x^3 - y^3 - 3xy = (y+3)^3 - y^3 - 3(y+3)y = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 -$$

$$-y^3 - 9y^2 - 27y = 27$$

Ответ: 27

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \sin \pi x = 2 \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos \pi x$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z} \quad y = t \quad (-t + \frac{1}{2} + 2k; t), t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cos \pi x - \sin\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \sin \pi x = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3x - y = \frac{1}{2} + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = t \quad x = \frac{t + \frac{1}{2} + 2n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\left(\frac{t + \frac{1}{2} + 2n}{3}; t \right), t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: а) $(-t + \frac{1}{2} + 2k; t); \left(\frac{t + \frac{1}{2} + 2n}{3}; t \right), t \in \mathbb{R}, k, n \in \mathbb{Z}$

б)

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} < 2\pi \Rightarrow \text{исключаем, когда} \\ \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases} \quad (\arccos(-1) = \pi)$$

$$1) y = -3$$

$$-t + \frac{1}{2} + 2k = 0 + 1 + 2k = 10 + 2k = -4 \Rightarrow k \neq -8$$

$$2) y = -3$$

$$\frac{t + \frac{1}{2} + 2n}{3} = \frac{-3 + 1 + 2n}{3} = \frac{-8 + 2n}{3} = -4$$

$$\frac{-8 + 2n}{3} = -12 \Rightarrow n \neq -2$$

Ответ: б) $(-t + \frac{1}{2} + 2k; t); \left(\frac{t + \frac{1}{2} + 2n}{3}; t \right), t \in \mathbb{R}, k, n \in \mathbb{Z}, k \neq -8, n \neq -2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n -число одногруппчиков
 x -число билетов, которое добавили к 4.

$$\text{Вероятность в начале: } P_1 = \frac{\binom{n}{4} \cdot \binom{4}{n-2}}{\binom{n}{n}} = \frac{\frac{4!}{x!} \cdot (n-2)! \cdot 4! \cdot \cancel{(n-x)!}}{2! \cdot \cancel{(n-x)!} \cdot n!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-2)!}{2 \cdot n!} = \frac{24(n-2)!}{n(n-1)}$$

Вероятность после новых билетов:

$$P_2 = \frac{\binom{x+4}{4+x} \cdot \binom{4}{x} \cdot \binom{4+x}{n-4}}{\binom{n}{n}} = \frac{(x+4)(x+3)(n-2)!(4+x)(n-4-x)!}{2(x+4)(x+3)(x+2)!(n-x-4)!(n-1)!} = \frac{(x+4)(x+3)}{4(n-1)}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 3,5$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(x+4)^2(x+3)^2(n^2-n)}{2(n^2-n) \cdot 72} = \frac{(x+4)^2(x+3)^2}{288 \cdot 144} = \frac{7}{2}$$

$$2(x^2 + 8x + 16)(x^2 + 6x + 9) = 70 \cdot 7 \cdot 144$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(x+4)(x+3)(n^2-n)}{(n^2-n) \cdot 12} = \frac{x^2 + 13x + 12}{12} = \frac{7}{2}$$

$$x^2 + 7x + 12 = 42$$

$$x^2 + 7x - 30 = 0$$

$$\textcircled{1} = 49 + 120 = 169$$

$$x = \frac{-7 \pm 13}{2} \quad \begin{cases} x = 3 > 0 \\ x = -16 < 0 \end{cases}$$

$$x = 3$$

В конце месяца было выделено $(x+4) - (3+4) = 7$ билетов

Ответ: 7.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} \text{ - внутр. часть окр. } w_1((0;0); 3)$$

$$\begin{aligned} x &= 2\cos\alpha \\ y &= 2\sin\alpha \quad A(\underbrace{\cos\alpha}_{x_0}; \underbrace{\sin\alpha}_{y_0}) \\ \Rightarrow A &\in w_2((0;0); 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1: x &= 2\cos\alpha \\ l_2: y &= 2\sin\alpha \\ l_1 \perp l_2 \quad l_2 \cap w_1 &= \{B; C\} \end{aligned}$$

$$D(-\sqrt{9-y_0^2}; y_0) \quad E(\sqrt{9-y_0^2}; y_0)$$

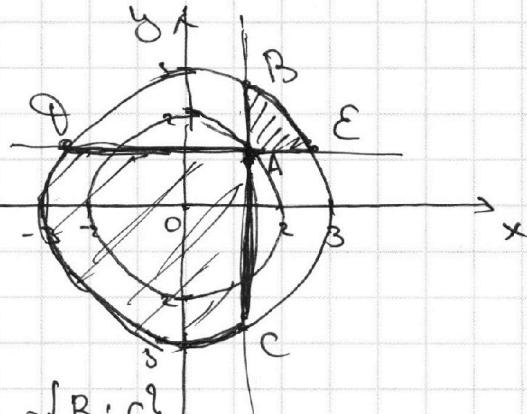
$$\begin{aligned} l_1 \perp l_2 \Rightarrow \angle DAC = \angle CAE = \angle EAB = \angle DAB = 90^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\overarc{DB} + \overarc{CE}}{2} = 80^\circ \Rightarrow \frac{\overarc{BE} + \overarc{DC}}{2} = 80^\circ \Rightarrow \overarc{DC} + \overarc{BE} = 180^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow \overarc{DC} + \overarc{BE} = 2\pi \cdot \frac{180^\circ}{360^\circ} = \pi \cdot 8 = 3\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= DE + BC + DC + BE = 2\sqrt{9-y_0^2} + 2\sqrt{9-x_0^2} + 3\pi \\ x_0^2 + y_0^2 &= 4 \\ y_0^2 &= 4 - x_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= 2\left(\sqrt{9-4+x_0^2} + \sqrt{9-x_0^2}\right) + 3\pi = 2\sqrt{x_0^2+5} + 2\sqrt{9-x_0^2} + 3\pi \\ t &= x_0^2, t \geq 0 \end{aligned}$$

$$f(t) = 2\sqrt{t+5} + 2\sqrt{9-t} + 3\pi$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t+5}} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{9-t}} = \frac{1}{\sqrt{t+5}} - \frac{1}{\sqrt{9-t}} = \\ &= \frac{\sqrt{9-t} - \sqrt{t+5}}{\sqrt{t+5} \cdot \sqrt{9-t}} = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} l_1 \cap w_1 &= \{B; C\} \\ B(x_0; \sqrt{9-x_0^2}) \\ C(x_0; -\sqrt{9-x_0^2}) \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} t > 0 \\ \sqrt{3-t} - \sqrt{t+5} = 0. \\ \Rightarrow \text{не более} \\ \text{одного корня} \\ t = 2 + \end{aligned}$$

Graph of $y = \sqrt{3-t}$ and $y = \sqrt{t+5}$ showing their intersection at $t = 2$.

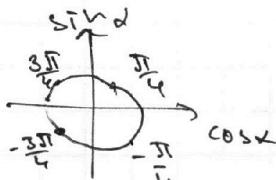
$$f(2) = 2\sqrt{2+5} + 2\sqrt{3-2} + 3\sqrt{1} = 4\sqrt{7} + 3\sqrt{1}$$

$$t = x_0^2 = (2\cos\alpha)^2 = 2$$

$$\text{т.к. } 4\cos^2\alpha = 2$$

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha &= \frac{1}{2} \\ \cos\alpha &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &\in \pm\frac{\pi}{4} \\ \alpha &= \frac{\pi}{n} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



Ответ: макс. $M = 4\sqrt{7} + 3\sqrt{1}$, при $\alpha = \frac{\pi}{n} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Перечня QR-кода недопустима!



S - сечение через высоту пирамиды и вершину основания

$$SO_1 = H$$

$$\frac{R_2}{H-h} = \frac{R_1}{H} \Leftrightarrow R_2 H = R_1 H - r_1 h$$

$$H = \frac{R_1 h}{R_1 - R_2}$$

$$\tan \alpha = \frac{SO}{AO_1} = \frac{H}{R_1} = \frac{R_1 h}{(R_1 - R_2) R_1} = \frac{h}{R_1 - R_2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 + R_2} \quad \angle A SO = 90^\circ - \alpha$$

$$\sin \alpha \cos A SO = \frac{AO_1}{SO_1} = \frac{R_1}{H-x} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + R_1^2}}{\frac{R_1 h}{R_1 - R_2} - x} = \frac{\sqrt{x^2 + R_1^2}}{\frac{R_1 h}{R_1 - R_2} - \frac{h}{2} + \frac{R_2^2}{2h} + \frac{R_1^2}{2h}} = \frac{\sqrt{R_1^2 + R_1 R_2 + \frac{R_2^4 - 2R_1^2 R_2^2 + R_1^4}{16R_1 R_2} + \frac{R_2^2 - R_1^2}{2^2}}}{2h(R_1 - R_2)}$$

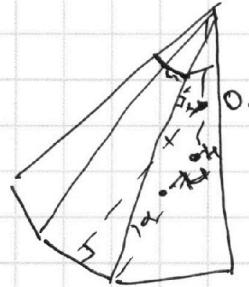
$$= \frac{2h(R_1 - R_2) \sqrt{16R_1^3 R_2 + 16R_1^2 R_2^2 + R_2^4 - 2R_1^2 R_2^2 + R_1^4 + 8R_1 R_2^3 - 8R_1^3 R_2}}{(R_1 h^2 + R_2 h^2 + R_1^3 - R_1 R_2^2 - R_1^2 R_2 + R_2^3) \cdot \sqrt{16R_1 R_2}} = \\ = \frac{2\sqrt{R_1 R_2} (R_1 - R_2) \sqrt{R_1^4 + 8R_1^3 R_2 + 14R_1^2 R_2^2 + 8R_1 R_2^3 + R_2^4}}{(4R_1^2 R_2 + 4R_1 R_2^2 + 8R_1^3 - R_1 R_2^2 - R_1^2 R_2 + R_2^3) 4\sqrt{R_1 R_2}} = \\ = \frac{(R_1 - R_2) \sqrt{(\frac{R_1}{R_2} + 1)^2 \cdot (\frac{R_1}{R_2})^3 + 6\frac{R_1}{R_2} + 1} \cdot R_2^4}{2(R_1^3 + 3R_1^2 R_2 + 3R_1 R_2^2 + R_2^3)} = \\ = \frac{(R_1 - R_2)(R_1 + R_2) \sqrt{R_1^2 + 6R_1 R_2 + R_2^2}}{2(R_1 + R_2)^3} = \frac{(R_1 - R_2) \sqrt{R_1^2 + 6R_1 R_2 + R_2^2}}{2(R_1 + R_2)^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

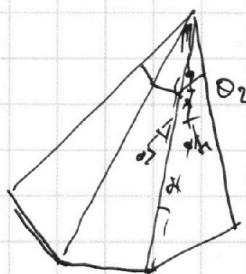
СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\Omega(O_1; R_1)$$

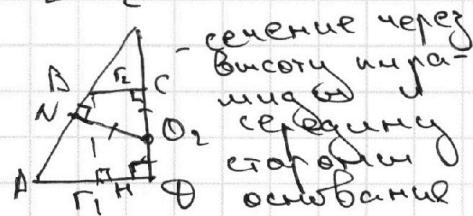
R_1 - радиус ^{вписанной} большего основания
 R_2 - радиус ^{вписанной} меньшего основания



$$W(O_2; R_2)$$

h - высота усеченной пирамиды

$$R_2 = \frac{h}{2}$$



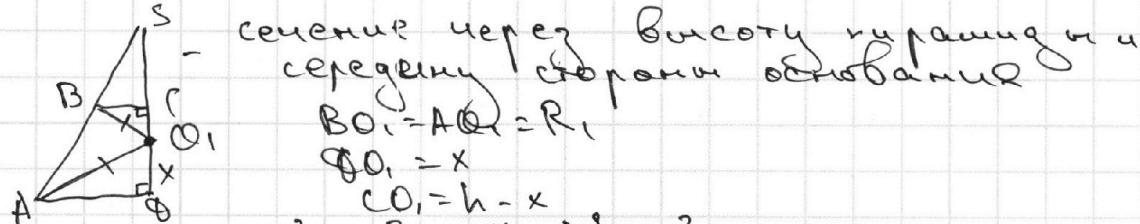
$$\begin{aligned} NO_2 &= O_2D = O_2C \\ \angle ANO_2 &= \angle ADO_2 = \angle BSC_2 \\ BC_2 &\text{- общая высота } \triangle NO_2 \text{ и } \triangle SC_2 \\ AO_2 &\text{- общая высота } \triangle AD_2 \text{ и } \triangle DC_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \triangle NBO_2 \sim \triangle CBS_2 \\ \triangle ADO_2 \sim \triangle ADC_2 \end{cases} \Rightarrow BN = BC_2 = R_2 \\ AH = AD_2 = R_1$$

$$H: H \in AD, BH \perp AD$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$(R_1 + R_2)^2 = h^2 + (R_1 - R_2)^2 \Rightarrow h^2 = 4R_1 R_2$$



$$\begin{aligned} x^2 + R_1^2 &= (h-x)^2 + R_2^2 \\ x^2 + R_1^2 &= h^2 - 2hx + x^2 + R_2^2 \Leftrightarrow x = \frac{h^2 + R_2^2 - R_1^2}{2h} \end{aligned}$$

$$x = \frac{h}{2} + R_2 \frac{\frac{R_2^2}{2h} - \frac{R_1^2}{2h}}{\frac{R_2^2}{2h}} = \frac{\frac{h\sqrt{R_1 R_2}}{2} + \frac{R_2^2}{4\sqrt{R_1 R_2}} - \frac{R_1^2}{4\sqrt{R_1 R_2}}}{\frac{R_2^2}{4\sqrt{R_1 R_2}}} \Leftrightarrow x = \sqrt{R_1 R_2} + \frac{R_2^2 - R_1^2}{4\sqrt{R_1 R_2}}$$

$$R_1^2 = x^2 + R_1^2 = R_1^2 + R_1 R_2 + \frac{R_2^4 - 2R_1^2 R_2^2 + R_1^4}{16 R_1 R_2} + \frac{\sqrt{R_1 R_2} \cdot (R_2^2 - R_1^2)}{2\sqrt{R_1 R_2}} =$$

$$= R_1^2 + R_1 R_2 + \frac{R_2^4 - 2R_1^2 R_2^2 + R_1^4}{16 R_1 R_2} + \frac{R_2^2 - R_1^2}{2}$$

$$S\theta = H \Rightarrow \frac{R_2}{H-h} = \frac{R_1}{H} \Leftrightarrow R_2 H = R_1 H - R_1 h \Leftrightarrow H = \frac{R_1 h}{R_1 - R_2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА
_____ ИЗ _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos \alpha \\
 & t^4 + 8t^3 + 14t^2 + 8t + 1 = 0 \quad | : t^2 \\
 & t^2 + 8t + 14 = 0 \\
 & t^2 + 8t + 14 = 0 \\
 & t^2 + 8t + 14 = 0 \\
 & (t+6)(t+2) = 0 \\
 & t_1 = -6, t_2 = -2 \\
 & AP = \frac{16}{5} \\
 & BP = 2 \\
 & AC = 4 \\
 & AB = \frac{26}{5} \\
 & BC = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha} \\
 & S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} \\
 & AL = \frac{104}{25} \\
 & BC = R_1 \\
 & = \frac{26}{5} \sqrt{2 - 2 \cos 2\alpha} \\
 & = \frac{52}{5} \sin \alpha \\
 & = (\frac{R_1}{2} + \frac{R_2}{2})^2 \\
 & A \cdot B \cdot C = m^2, m \in \mathbb{Z}^N \\
 & A = \overline{aaaa} \\
 & B = \overline{bcd} \\
 & C = \overline{ef} \\
 & A^3 \equiv 4a^3 \equiv a \\
 & B^3 \equiv bcd \equiv c+d \equiv x+y+1 \\
 & C^3 \equiv e+f \equiv e+5 \equiv z+2 \\
 & A \cdot B \cdot C \leq a(x+y+z) \cdot (z+2) \leq 0 \\
 & xy = (x-3)(y+3) \\
 & x-y = 3 \\
 & x = y+3 \\
 & x^2 + R_1^2 = h^2 - 2hx + x^2 + R_2^2 \\
 & x = \frac{h^2 + R_1^2 - R_2^2}{2h} \\
 & (y+3)^2 - y^2 - 9(y+3)y = \\
 & = y^2 + 6y^2 + 27y + 27 - y^2 - 9y^2 - 27y = \\
 & = 27 \\
 & (R_1 + R_2)^2 = h^2 + (R_1 - R_2)^2 \\
 & h^2 = R_1^2 + 2R_1 R_2 + R_2^2 - R_2^2 - R_1^2 + 2R_1 R_2 \Rightarrow h = \sqrt{2R_1 R_2} \\
 & \frac{R_1}{h-x} = \frac{2R_1 R_2}{R_1 R_2 - \sqrt{R_1 R_2} - \frac{R_2^2 - R_1^2}{4R_1 R_2}}
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{1) } & \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \quad \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ \text{2) } & -\sin \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} \right) \sin \pi x + \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} \right) \cos \pi x = 0. \\ & \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = 0 \\ & \cos \left(\frac{\pi(3x-y)}{2} \right) = 0. \\ & 3x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ & 1849 - 1600 - 280 < 0. \\ & x^2 - 41x + 470 = 0 \quad D=520-50=470 \\ & x_1 = 1, x_2 = 43 \\ & x^2 + x(5-2n) + (20n-50) = 0. \quad n>5 \\ & 2x + 5 - 2n = 0 \\ & x = \frac{2n-5}{2} > 0. \quad 540 \\ & x^2 - 31x + 350 = 0 \quad D=961-1800=-839 \\ & x = 31 - 1400 < 0 \\ & x^2 - 41x + 450 = 0 \quad D=1681-1800=-119 \\ & x = 3 + 17 \quad x = 10 \\ & (x+17)(x-10) = 0 \quad x = -7 \\ & x^2 - 45x + 490 = 0 \quad 2000-40=1960 \\ & D=2025-1960=65 \\ & 1 - \frac{C_{n-2}^4}{C_n^4} \\ & 1 - \frac{n!(n-2)!}{n(n-1)(n-3)(n-4)!} = \\ & = 1 - \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)} = \\ & = \frac{n^2 - n - (n^2 - 3n + 20)}{n^2 - n} = \\ & = \frac{8n - 20}{n^2 - n} \\ & 1 + \frac{2x n - 8x - x^2}{8n - 20} = 3,5. \quad 2,5 = \frac{5}{2} \\ & 4x n - 18x - 2x^2 = 40n - 100 \\ & 2x^2 + 18x - 4xn + 40n - 100 = 0. \\ & x^2 + x(9-2n) + (20n-50) = 0. \\ & D = 4n^2 - 36n + 81 - 80n + 200 = \\ & = 4n^2 - 116n + 281 \\ & D = 58^2 - 4 \cdot 281 = \end{aligned}$$

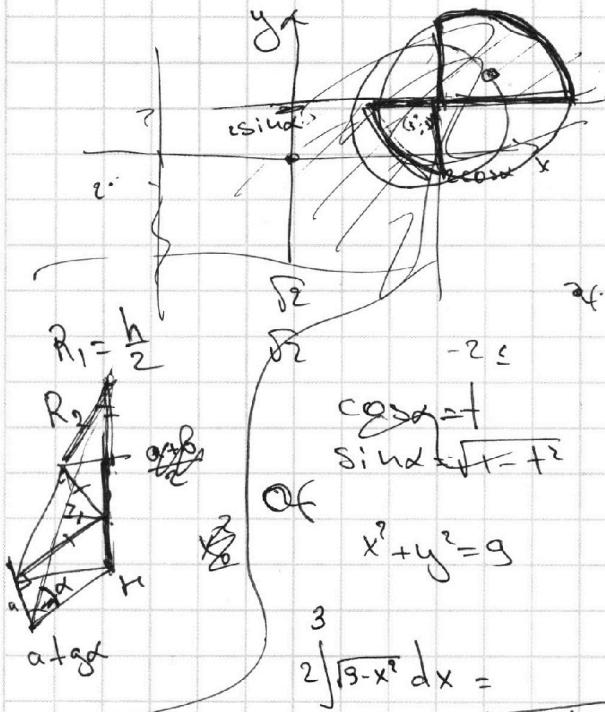


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

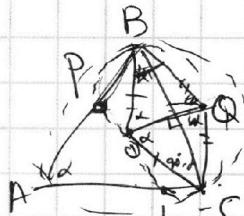
СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$



$$t = x_0 \quad y_0 = \sqrt{4t - t^2} \quad + 2\sqrt{9 - (4-t)^2} =$$



$$\text{B)} R_1^2 + R_1^2 + 2R_1^2 \cos 2\alpha = R^2$$

$$R_1^2 (2 + 2 \cos 2\alpha) = R^2$$

$$BC^2 = R^2 (2 + 2 \cos 2\alpha) = R^2 (2 + 2 \cos 4\alpha)$$

$$\frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5} = 4 \cdot x$$

$$x = \frac{104}{25}$$

$$(2+2\cos 2x)(2-2\cos 2x) = 2-2\cos 4x$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (\cos 4\alpha + 1)$$

$$\cos 4\alpha = 1 \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$2(1-\cos^2 x) = 1 - \cos 4x$$

$$\begin{aligned}2(1-\cos^2\alpha) &= 1-\cos 4\alpha \\2(1+\cos 4\alpha) &= 1-\cos 4\alpha\end{aligned}$$

$$81(10) + 2k = -4$$

$$\cos(2x) = 1 - \cos^2 x$$

$$1 + \cos(\omega t) = 1 - e$$

$$\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) = 1 - \cos 4\alpha$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$133,3 = 101 \cdot 11$$

~~100-7=93~~

$$a = 101 \cdot 11$$

$$B = 101 \quad 101 \cdot 202 \cdot 303 \dots 809$$

$$C = 11 \quad B = 101$$

$$C = 55$$

$$5 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 11 \cdot a = m^2$$

$$\underline{a = 5}$$

8

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 34 \\ \hline 112 \\ 84 \\ \hline 952 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 27 \\ \hline 196 \\ 56 \\ \hline 756 \end{array}$$

$$\frac{C_{n-2}^2 \cdot C_n^2}{C_n^4}$$

$$\frac{C_4^2 \cdot C_{n-2}^2 \cdot C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 28 - 3 \cdot 30 - 300}{8 \cdot 28 \cdot 20} = \frac{30(56 - 9 - 30)}{204} = \frac{30 \cdot 27}{204} = \frac{5}{2} + \frac{1}{12}$$

$$640 = \frac{4 \cdot 3}{2}$$

$$2 \cdot 11 \cdot 85 - 9 \cdot 11 - 11^2 = n(4x - 40) = 2x^2 + 18x - 100$$

$$8 \cdot 85 - 20.$$

$$\frac{11(170 - 9 - 11)}{660} = \frac{11 \cdot 150}{660}, \frac{5n}{2} = \frac{x^2 + 9x - 50}{2x - 20}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{19}{2} + \frac{70}{1-10}$$

$$x^2 + 7x - 30 = \frac{3}{10} + \frac{15}{2} - 10 = 11 - 10 = 1.$$

$$\Theta = 49 \pm \frac{5}{2} + \frac{19}{2} + \frac{70}{1-10} - 168 = 40.$$

$$\frac{11}{2} + \frac{19}{2} + \frac{70}{1} = 85.$$

$$n = \frac{2x^2 + 18x - 100}{4x - 40}$$

$$n \geq 5.$$

$$x^2 + 9x - 50 = \frac{2x - 20}{2x - 20}$$

$$22 + 96 = \frac{19}{2} + \frac{140}{2x - 20} = 168$$

$$n = \frac{x}{2} + \frac{19}{2} + \frac{70}{x-10}.$$

$$x^4 + 14x^3 + 39x^2 + 168x + 144 = 772$$

$$x^4 + 14x^3 + 39x^2 + 168x - 360 = 0$$

$$n+1 \quad 58-5$$

$$x^2 + x(7-2n) + (20n-30) = 0.$$

$$\vartheta =$$

$$x^2 + 47x + 580 = 0$$

$$\textcircled{D} = 21992209 - 2190 = 189289169$$

$$x = \frac{47 \pm 13}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 60 \\ x = 17 \end{array} \right.$$

$$n = 28$$

$$\frac{1}{2} C^2$$

$$8 \cdot 28 + 2 \cdot 28 \cdot 7 - 20 - 9 \cdot 7 - 289 =$$

$$= \frac{160 + 64 + 952 - 20 - 153 - 289}{756} = \frac{1114}{114} = \frac{114}{168} - 360$$

$$= \frac{204 + 952 - 153 - 20 - 442}{756}$$

$$\frac{2 \cdot 28 \cdot 17 - 9 \cdot 17 - 289}{8 \cdot 28 - 20} = \frac{756 - 289}{160 + 64 - 20} =$$

$$= \frac{314}{204}$$

$$= \frac{30(56 - 9 - 30)}{204} = \frac{30 \cdot 27}{204} = \frac{5}{2} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{x^2 + 9x - 50}{x^2 - 10x} = \frac{2x - 20}{x^2 - 10x}$$

$$\frac{19x - 50}{19x - 190} = \frac{140}{140}$$

$$n = \frac{x}{2} + \frac{19}{2} + \frac{70}{x-10}.$$