



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a - какая-то цифра ($a \in \mathbb{N}; 1 \leq a \leq 9$) - "3,8", где $A \neq 0$

$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a = 11 \cdot 101 \cdot a$$

П.к. числа 11 и 101 - простые, то, чтобы $A \cdot B \cdot C$ являлось квадратом, необходимо, чтобы произв. $B \cdot C$ содержало множители 11 и 101 в чётной степени (легко видеть, что 11^3 уже не трёхзначное $\Rightarrow$ 11 и 101 содержатся в BC ровно в первой степени)

Если $B \vdots (11 \cdot 101)$, то $B > 1111$, но B - трёхзначное, противоречие

Или более $C \vdots (11 \cdot 101) \Rightarrow$ в одном из чисел B и C содержится множитель 11, а в другом 101

Раз C - двузначное, то именно $C \vdots 11$, а раз одна из его цифр равна 3, то $C = 33$ - единств. вариант

$B \vdots 101 \Rightarrow B$ может быть равно 101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909

Из этих чисел только 202 содержит хотя бы одну цифру 2 $\Rightarrow B = 202$ - единств. вариант

$$BC = 33 \cdot 202 = 11 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 2 = 11 \cdot 101 \cdot 6$$

$$ABC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 6 = (11 \cdot 101)^2 \cdot (6a)$$

Чтобы ABC являлось точным квадратом, $6a$ должно быть квадратом натур. числа $\Rightarrow$ подходит только $a = 6$

$$\text{Итого, } A = 6666 \quad B = 202 \quad C = 33 \quad ABC = (6 \cdot 11 \cdot 101)^2 -$$

- единств. тройка натур. чисел, удовлетворяющих условию

ОТВЕТ: (6666; 202; 33)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \quad x, y > 0$$
$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{(y+1)+(x-1)+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}; x+y+2 \neq 0 \Rightarrow xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy + x - y - 1 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow x - y = 1$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 3xy =$$

$$= (x-y)^3 + 3xy(x-y-1) = (x-y)^3 + 3xy \cdot 0 = (x-y)^3 = 1^3 = 1$$

ОТВЕТ: 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x \quad | \times \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \sin \pi x \cdot \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = \cos \pi x \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2}$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \quad | \times \frac{2}{\pi} \quad -\cos \left(\frac{3\pi x + \pi y}{2} \right) = 0 \quad | \times (-1)$$

$$\frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \quad | \times \frac{2}{\pi}$$

$$x - y = 2k + 1; k \in \mathbb{Z}$$

$$3x + y = 2n + 1; n \in \mathbb{Z}$$

$$y = x - 2k - 1; k \in \mathbb{Z}$$

$$y = -3x + 2n + 1; n \in \mathbb{Z}$$

Подставим первое в второе:

Подставим первое в второе:

$$(x; x - 2k - 1), \text{ где } x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(x; -3x + 2n + 1), \text{ где } x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

$$6) x, y \in \mathbb{Z} \quad \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

ОДЗ:

$$1) x = y + 2k + 1; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\text{По ОДЗ } \arccos \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{4}$$

$$\arcsin \left(\frac{y + 2k + 1}{5} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{4} \right) < \frac{3\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$\arcsin \left(\frac{y + 2k + 1}{5} \right) - \arcsin \frac{y}{4} < \pi$$

Область значений арксинуса - отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$\pi > \arcsin \left(\frac{y + 2k + 1}{5} \right) - \arcsin \frac{y}{4} > -\pi$$

Значит, пер-во всегда выполняется, кроме случая:

$$\begin{cases} \arcsin \left(\frac{y + 2k + 1}{5} \right) = \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \left(\frac{y}{4} \right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y + 2k + 1}{5} = 1 \\ \frac{y}{4} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow y = -4; k = 4 (x = 5)$$

$$y = -3: x = 2k + 1 - 3 = 2k - 2; -5 \leq 2k - 2 \leq 5 \Rightarrow k = -1; 0; 1; 2; 3 \Rightarrow 5 \text{ пер}$$

$$y = -2: x = 2k + 1 - 2 = 2k - 1; -5 \leq 2k - 1 \leq 5 \Rightarrow k = -2; -1; 0; 1; 2; 3 \Rightarrow 6 \text{ пер}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7



СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 y = -1: x = 2k; & -5 \leq 2k \leq 5 \Rightarrow k = -2; -1; 0; 1; 2 \Rightarrow 5 \text{ пар} \\
 y = 0: x = 2k+1; & -5 \leq 2k+1 \leq 5 \Rightarrow k = -3; -2; -1; 0; 1; 2 \Rightarrow 6 \text{ пар} \\
 y = 1: x = 2k+2; & -5 \leq 2k+2 \leq 5 \Rightarrow k = -3; -2; -1; 0; 1 \Rightarrow 5 \text{ пар} \\
 y = 2: x = 2k+3; & -5 \leq 2k+3 \leq 5 \Rightarrow k = -4; -3; -2; -1; 0; 1 \Rightarrow 6 \text{ пар} \\
 y = 3: x = 2k+4; & -5 \leq 2k+4 \leq 5 \Rightarrow k = -4; -3; -2; -1; 0 \Rightarrow 5 \text{ пар} \\
 y = 4: x = 2k+5; & -5 \leq 2k+5 \leq 5 \Rightarrow k = -5; -4; -3; -2; -1; 0 \Rightarrow 6 \text{ пар} \\
 y = -4: x = 2k-3; & -5 \leq 2k-3 \leq 5 \Rightarrow k = -1; 0; 1; 2; 3 \quad (k=4 - \text{не подходит}) \Rightarrow 5 \text{ пар. Всего } 47 \text{ пар}
 \end{aligned}$$

$$2) x = \frac{2n+1-y}{3}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin\left(\frac{2n+1-y}{15}\right) - \arcsin \frac{y}{4} < \pi$$

$$\begin{cases} \frac{2n+1-y}{15} = 1 \\ \frac{y}{4} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+1-y = 15 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow y = -4; n = 5 (x = 5) - \text{не подходит}$$

$$y = -4: x = \frac{2n+5}{3}; -5 \leq \frac{2n+5}{3} \leq 5 \Rightarrow -10 \leq n \leq 5 \Rightarrow \begin{matrix} 15 \text{ пар} \\ -9 \leq n \leq 6 \end{matrix} \quad (n=5 \text{ не подходит})$$

$$y = -3: x = \frac{2n+4}{3}; -5 \leq \frac{2n+4}{3} \leq 5 \Rightarrow 15 \text{ пар}$$

$$y = -2: 16 \text{ пар} \Rightarrow -9 \leq n \leq 6 \Rightarrow 16 \text{ пар}$$

$$\begin{aligned}
 y = -1: 15 \text{ пар} & \quad y = 0: 16 \text{ пар} & y = 1: 15 \text{ пар} & y = 2: 16 \text{ пар} \\
 y = 3: 15 \text{ пар} & y = 4: 16 \text{ пар} & \text{Всего } 139 \text{ пар}
 \end{aligned}$$

$$\text{Всего } 47 + 139 = 186 \text{ пар}$$

$$\text{ОТВЕТ: } f(x; x-2k-1), (x; -3x+2n+1), \text{ где } x \in \mathbb{R}; n, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) 186 \text{ пар}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть есть n одинаковых билетов

Рассмотрим момент времени в начале месяца (k билетов, n человек)

Всего есть C_n^k способов раздать билеты, из них благоприятных C_{n-2}^k (обязательно дать билеты Пете и Васе, а оставшиеся два раздать друг другу C_{n-2}^2 вариантами)

Перебором при малых n убеждаемся в справедливости формулы (при $n=5$: 5 способов раздать билеты (1234, 1235, 1245, 1345, 2345, где цифра - условный номер человека, Пете - номер 1, Васе - номер 2); из них $C_3^2=3$ благоприятных: 1234, 1235, 1245)

Аналогично рассмотрим конец месяца ($k+4$ билетов, n человек, где k - количество дополнительно выданных билетов)

Всего есть C_n^{k+4} способов раздать билеты, из них благоприятных C_{n-2}^{k+2} по аналогичным соображениям

Тогда вероятность Пете и Васе вместе получить билеты в начале мес. равна $\frac{C_{n-2}^k}{C_n^k}$, а в конце месяца - $\frac{C_{n-2}^{k+2}}{C_n^{k+4}}$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}; C_{n-2}^k = \frac{(n-2)!}{k!(n-k-2)!} \Rightarrow \frac{C_{n-2}^k}{C_n^k} = \frac{(n-2)!}{k!(n-k-2)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{2(n-2)!}{2!(n-k-2)!} = \frac{12}{n(n-1)}$$

$$C_n^{k+4} = \frac{n!}{(k+4)!(n-k-4)!}; C_{n-2}^{k+2} = \frac{(n-2)!}{(k+2)!(n-k-4)!} \Rightarrow \frac{C_{n-2}^{k+2}}{C_n^{k+4}} = \frac{(n-2)!}{(k+2)!(n-k-4)!} \cdot \frac{(k+4)!(n-k-4)!}{n!} = \frac{(n-2)!}{(k+2)!} \cdot \frac{(k+4)!}{n!} = \frac{(k+3)(k+4)}{n(n-1)}$$

$$\text{Из усл. } \frac{C_{n-2}^k}{C_n^k} = \frac{2}{5} \cdot \frac{C_{n-2}^{k+2}}{C_n^{k+4}} \Leftrightarrow \frac{12}{n(n-1)} = \frac{2}{5} \cdot \frac{(k+3)(k+4)}{n(n-1)} \Rightarrow (k+3)(k+4) = 30$$

Очевидно, что $k \in \mathbb{N}$

$$k=1: (k+3)(k+4) = 4 \cdot 5 = 20$$

$$k=2: (k+3)(k+4) = 5 \cdot 6 = 30 \quad \text{---} \quad \Rightarrow k=2 \Rightarrow \text{выданы 2 доп. билета} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ всего в конце месяца было выдано $4+2=6$ билетов

ОТВЕТ: 6

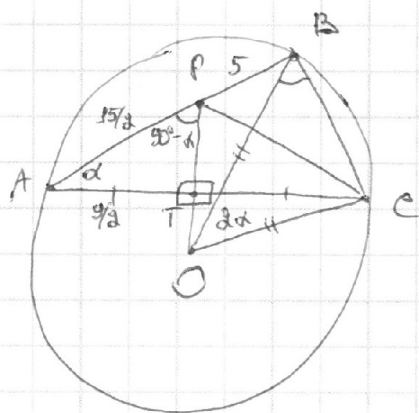


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$P \text{ делит } \text{на отрезке } AB \Rightarrow AB = AP + PB = \\ = \frac{15}{2} + 5 = \frac{25}{2}$$

Пусть $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha$ как центральный.
 $OB = OC = R$, $\Delta BOC - \text{MS}$, т.к. $OB = OC$ или радиусов
 $\Rightarrow \angle OBC = \angle OCB = 90^\circ - \alpha$

$$B, O, C \in \omega_2; P \in \omega_3 \Rightarrow OPBC - \text{вписанный} \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle BPO = 180^\circ - \angle OCB = 90^\circ + \alpha \Rightarrow \angle APO = 180^\circ - \angle BPO = \\ = 90^\circ - \alpha$$

Пусть $OP \cap AC = m. T$

По сумме углов $\Delta ATP \angle ATP = 90^\circ \Rightarrow OP \perp AC$

$AO = OC$ как радиусов $\Rightarrow \Delta AOC - \text{MS}$, OT - высота и основание $\Rightarrow$ она
 также медиана $\Rightarrow AT = CT = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2}$

$$\text{Тогда в } \Delta APT \cos \alpha = \frac{AT}{AP} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha =$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{\frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5}}{2} = \frac{25 \cdot 9 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 5} = 5 \cdot 9 = 45$$

ОТВЕТ: 45



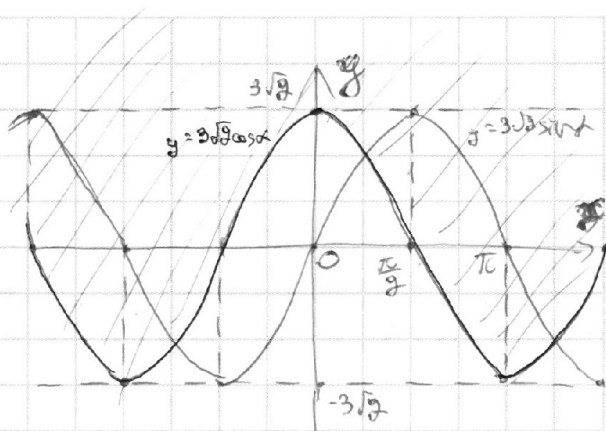
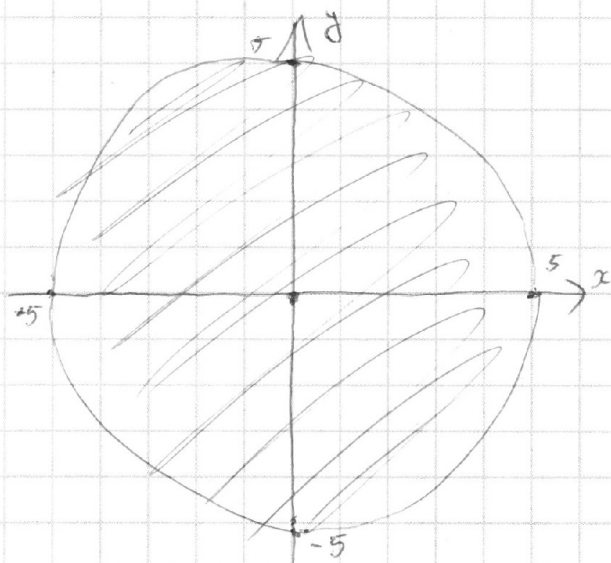
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 - \text{окружность с } P = 5 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \leq 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3\sqrt{2} \\ y \leq 3\sqrt{2} \end{cases} \\ \text{или} \\ \begin{cases} x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y > 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3\sqrt{2} \\ y > -3\sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

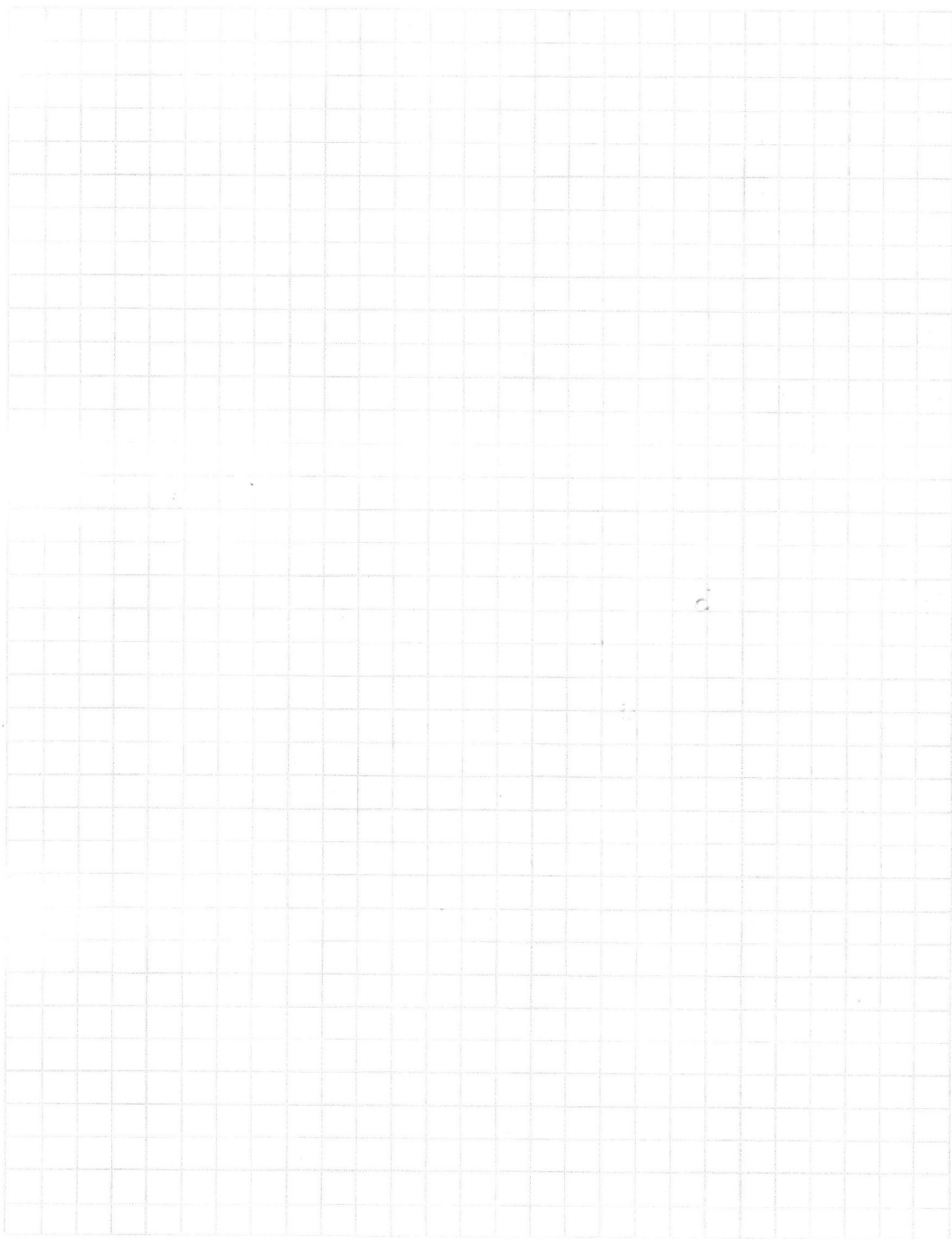
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$(x+y)(x^2-2xy+y^2)+3xy(x+y)=1 \quad x^3+y^3+xy^2=1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 x+y &= 1 & u &= x^3 - y^3 - 3xy = ? & \frac{1}{2} &= \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4} \\
 x^2 + 2xy + y^2 &= 1 & x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 &= 1 \\
 2xy &= \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 &= \frac{1}{2} \\
 (x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = x^4 + 2xy(2x^2 + 2y^2 + 2xy) = x^4 + 2xy(2x^2 + 2y^2 + 2xy) \\
 (x-y)(x^2 + 2xy + y^2) - 3xy &= (x-y)(1-2y) - 3xy = x - x^2y - y + xy^2 - 3xy = x - y + xy(y-x-3) \\
 u+3 &= (x-y-3)(x-y+3) - xy(x-y+3) = (x-y+3)(1-xy) = (x-y+3)(1-xy)
 \end{aligned}$$

по формулам.

$$\begin{aligned}
 & \text{Всего } C_n^k \text{ чисел } \frac{C_n^2}{C_n^1} \\
 & \text{Всего } C_n^k \text{ чисел } \frac{C_n^2}{C_n^1} \\
 & \text{Всего } C_n^k \text{ чисел } \frac{C_n^2}{C_n^1} \\
 & \text{Всего } C_n^k \text{ чисел } \frac{C_n^2}{C_n^1} \\
 & \text{Всего } C_n^k \text{ чисел } \frac{C_n^2}{C_n^1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Всего } C_n^k \text{ чисел } \frac{C_n^2}{C_n^1} \\
 & \text{Всего } C_n^k \text{ чисел } \frac{C_n^2}{C_n^1} \\
 & \text{Всего } C_n^k \text{ чисел } \frac{C_n^2}{C_n^1} \\
 & \text{Всего } C_n^k \text{ чисел } \frac{C_n^2}{C_n^1} \\
 & \text{Всего } C_n^k \text{ чисел } \frac{C_n^2}{C_n^1}
 \end{aligned}$$

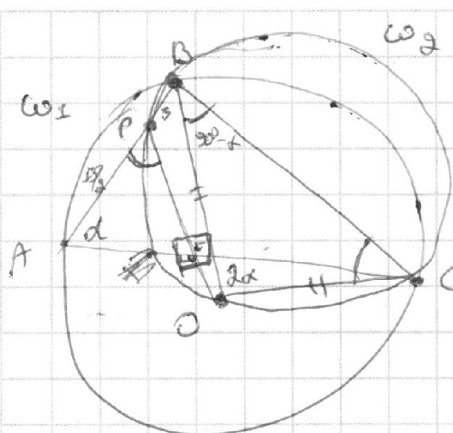


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

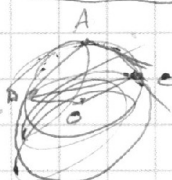
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

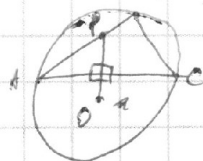
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AP = \frac{15}{2}$ $BP = 5$ $AC = 9$ $S_{APC} = ?$ $\frac{\sin \angle A}{\sin \alpha} = ?$
 $\text{Решение } \triangle APC \sim \triangle BPC \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AP}{5} = \frac{9}{9} \Rightarrow AP = 5$
 $AP \cdot AB = AC \cdot BC \Rightarrow AP = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{9 \cdot 9}{18} = 4.5$
 $AP = \frac{15}{2} + 4.5 = \frac{35}{2}$
 $\frac{AP}{AC} = \frac{35/2}{9} = \frac{35}{18} > 1$



$\text{Решение } \triangle APC \sim \triangle BPC \Rightarrow \angle APC = \angle BPC$
 $\Rightarrow \angle APC = \angle BPC = 90^\circ - \alpha$
 $\angle APC = \angle BPC \Rightarrow \angle APC = \angle BPC = 90^\circ - \alpha$
 $\Rightarrow \angle APC = 90^\circ - \alpha$



$\text{Решение } \triangle APC \sim \triangle BPC \Rightarrow \angle APC = 90^\circ \Rightarrow AT = CT \Rightarrow AP = PC \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle APC = \alpha$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
 $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$
 $\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$
 $\sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$
 $-\cos(\pi x + \pi y) = \cos 2\pi x$
 $\cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y) = 0$ $2 \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \quad | \times \frac{1}{2}$
 $\cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0$ $\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0$

$\frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad | \times 2$

$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad | \times 2$

$3x + y = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$

$x - y = \frac{1}{2} + 2n, n \in \mathbb{Z}$

x, y рациональные

x, y рациональные

$\pi x - \pi y = \pi + 2\pi n$

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x$
 $\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0$ $\sin \pi x \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = \cos \pi x \cos \frac{\pi x - \pi y}{2}$

$2n + 4 - y = 3y + 6 + \beta$

$\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta = 0$

$2n = 4y + 6 \quad n = 2y + 3$

$-\cos \left(\frac{3\pi x + \pi y}{2} \right) = 0$

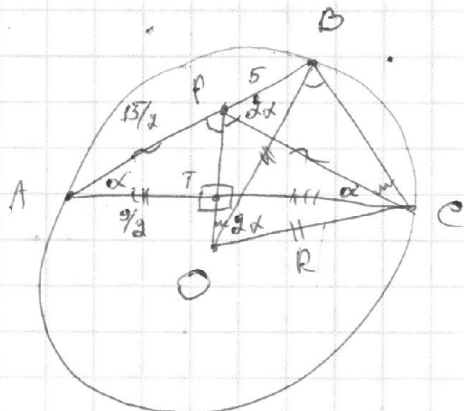
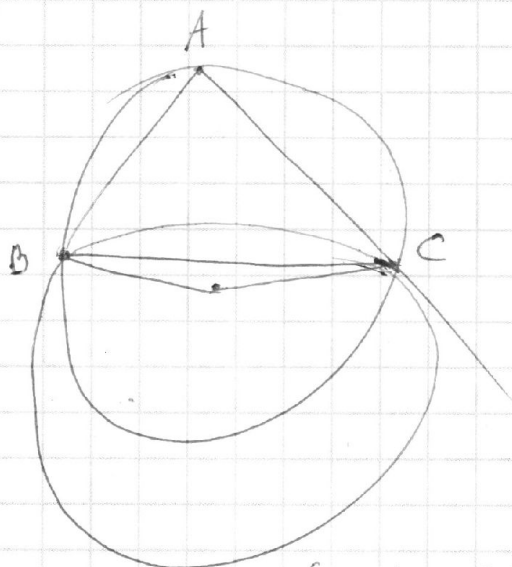


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

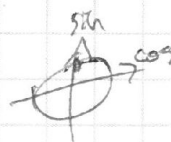
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \sin^2 + \cos^2 &= 1 \\ \cos^2 - \sin^2 &= \frac{2}{5} \\ 2 - 2\sin^2 &= \frac{2}{5} \\ \sin^2 &= \frac{2}{5} \\ \sin &= \frac{\sqrt{2}}{5} \\ \alpha &= \arcsin \frac{\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{В } \triangle AOK: \frac{BC}{\sin \alpha} &= 2R \Rightarrow BC = 2R \sin \alpha \\ \text{В } \triangle OBC: \frac{BC}{\sin 2\alpha} &= 2r \end{aligned}$$

$$\text{В } \triangle OBC: BC^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos 2\alpha = 2R^2(1 - \cos 2\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{2}R \sqrt{1 - \cos 2\alpha} = 2R \sin \alpha \Rightarrow \sqrt{2} \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos 2\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 \alpha = 1 - (1 - 2 \sin^2 \alpha) \quad 2 \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{\frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5}}{2} = \frac{25 \cdot 9 \cdot 4}{4 \cdot 8} = 6.5$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

$$1) x = y + 2k + 1 \quad \arcsin \frac{y+2k+1}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{y}{4} = \frac{3\pi}{2} - \arcsin \frac{y+2k+1}{5}$$

$$\arcsin \frac{y+2k+1}{5} - \arcsin \frac{y}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

$$-5 \leq y+2k+1 \leq 5 \quad -6 \leq y+2k \leq 4 \quad -4 \leq y \leq 4$$

$$-6 \leq y+2k \leq 2k+4 \Rightarrow k \geq -5 \quad 4 \leq y+2k \leq 2k-4 \Rightarrow k \leq 4$$

$$\arcsin \frac{y+2k+1}{5} = \frac{3\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{4} \Rightarrow \arcsin \frac{y+2k+1}{5} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{y+2k+1}{5} = -1 \Rightarrow y+2k+1 = -5 \Rightarrow y+2k = -6$$

$$y = -4 \quad y+2k = -6 \quad 2k - k = 4 \quad k = 4$$

$$y+2k+1 = 5 \quad y+2k = 4 \quad 2k - k = 4 \quad k = 4$$

$$2n+1+4 = 15 \quad n = 5$$

$$-9 \leq 2k \leq 1 \quad -6.5 \leq \frac{y}{4} \leq 0.5$$

$$-10 \leq 2k \leq 0 \quad -4.5 \leq \frac{y}{4} \leq 0.5$$

$$-7 \leq 2k \leq 3 \quad -3.5 \leq \frac{y}{4} \leq 0.5$$