



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

р1. Заметим, что $A = 1111 \cdot a = 101 \cdot 11 \cdot a$, a — цифра от 1 до 9.

Т.к. 101 и 11 — простые, то, чтобы $ABC \div x^2 : 11, 101$, нуж-

но, чтоб 101 и 11 содержались в качестве простых мно-
жителей в ABC . Т.к. $B \leq 99$, $B = 11$, то $B = 11$.

$B \leq 99$, $B : 101$ и содержит 7 $\Rightarrow B = 707$.

$$x^2 = ABC = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 101 \cdot 7 \cdot 11 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7 \cdot a \Rightarrow a = 7.$$

Ответ: (~~7777~~) (7777; 707; 11).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. По условию выполнено следующее

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}, \text{ а также}$$

очевидно, что $x \neq 4, y \neq -4, x, y \neq 0$. Преобразуем:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+4} = \frac{3}{(x-4)(y+4)} - \frac{3}{xy}$$

$$\frac{x-4-x}{x(x-4)} + \frac{y+4-y}{y(y+4)} = \frac{3xy - 3(xy-4y+4x-16)}{xy(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{4x(x-4) - 4y(y+4)}{xy(x-4)(y+4)} = \frac{3xy - 3xy + 12y - 12x + 48}{xy(x-4)(y+4)} \Rightarrow$$

$$4x^2 - 16x - 4y^2 - 16y = 12y - 12x + 48$$

$$4x^2 - 4x - 4y^2 - 28y - 48 = 0$$

$$(2x-1)^2 - (2y+7)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = 2y+7 \\ 2x-1 = -2y-7 \end{cases}$$

Рассмотрим 2 случая: $2x + 2y = -6 \Rightarrow x + y = -3$, но

$x, y > 0 \Rightarrow x + y > 0$ — противоречие $\Rightarrow 2x - 2y = 8 \Rightarrow x - y = 4$.

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy =$$

$$= 4(x^2 + x(x-4) + (x-4)^2) - 12xy = 4(x^2 + x^2 - 4x + x^2 - 8x + 16) - 12xy =$$

$$= 12x^2 - 48x + 64 - 12xy = 12x(x-4) =$$

$$= 12x^2 - 48x + 64 - 12x^2 + 48x = \underline{\underline{64}}$$

Ответ: 64.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{~3. а) } (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y.$$

Пусть $\alpha = \pi x$, $\beta = \pi y$. Тогда:

$$(\sin \beta - \sin \alpha) \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cos \beta.$$

$$\sin^2 \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta.$$

$$-\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta$$

$$-\cos(\alpha + \beta) = \cos 2\beta \Rightarrow 2\cos 2\beta + \cos(\alpha + \beta) = 0. \Rightarrow$$

$$\cos \frac{2\beta + \alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{2\beta - \alpha + \beta}{2} = 0.$$

$$1) \quad \cos \frac{\beta + \alpha}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\beta + \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\beta + \alpha = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \pi y + \pi x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$y = (2k+1) - x, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}.$$

$$2) \quad \cos \frac{3\beta - \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3\beta - \alpha = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$3\pi y = \pi x + (2\pi k + \pi), k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3y = x + (2k+1), k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}.$$

$$b). \quad \arcsin \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}. \quad \text{ОДЗ: } -1 \leq \frac{x}{7} \leq 1 \Rightarrow -7 \leq x \leq 7$$

$$-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \Rightarrow -4 \leq y \leq 4$$

По известному тождеству:

$$x \arcsin \frac{y}{4} + x \cos \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} - x \cos \frac{y}{4} \Rightarrow$$

$$x \cos \frac{x}{7} + x \cos \frac{y}{4} > 0, \quad x \cos \frac{x}{7}, x \cos \frac{y}{4} > 0 \Rightarrow$$

$$\text{Ограничение такое: } \begin{cases} \frac{x}{7} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x \neq 7 \\ y \neq 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x \neq 6 \\ y \neq 6 \end{matrix}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) x \in \mathbb{R}, y = n - x, n - \text{нечётное.}$$

$$x \in \mathbb{Z} \text{ по усл. н.б) } \Rightarrow -7 \leq x \leq 6,$$

$$4 \leq n - x \leq 3 \Rightarrow -4 + x \leq n \leq 3 + x \Rightarrow 5 - n \leq 9$$

n - нечётное, $n \in [4+x; 3+x]$, $x \in \mathbb{Z}$. Длина промежутка

равна $3 + x + 4 - x + 1 = 8$ - равно n нечётных чисел $\Rightarrow$

в данном случае для каждого целого $x \in [-7; 6]$ существует 4

подходящих значения y . в данном случае

$$2) x \in \mathbb{R}, \exists y = x + (2k+1), k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists y = x + n, n - \text{нечётное.}$$

$$x, y \in \mathbb{Z}; -4 \leq y \leq 3 \Rightarrow -12 \leq 3y \leq 9 \Rightarrow$$

$$-12 \leq x + n \leq 9 \Rightarrow -12 - x \leq n \leq 9 - x \Rightarrow n \in [-12 - x; 9 - x],$$

$$x \in \mathbb{Z}, n - \text{нечётное} \text{ длина промежутка } 9 - x + (12 + x + 1) = 22,$$

равно 11 нечётных значений $\Rightarrow$ для каждого $x \in [-7; 6]$

существует 11 решений в данном случае.

$x + n = -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9$ - 8 значений, где

Итого: 1) $14 \cdot 4 = 56$ значений

2) $8 \cdot 7 = 56$ значений.

каждого из них существует 14 значений $x \in [-7; 6]$.
 нечётные $-12, -9, -6, 0, 6$ - всего 7
 где нечётные $-9, -3, 3, 9$ - всего 7

Ответ: а) $(x; (2k+1)-x) \in \mathbb{Z}; (x; \frac{1}{3}(x + (2k+1)))$, $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

б) 112 пар.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

24. Пусть всего k одинадцатиклассников. Тогда
вероятность пойти Петя на концерт равна $P(\Pi) = \frac{4 \cdot (k-1)}{k}$
 $P(\Pi) = \frac{4 \cdot (k-1)(k-2)(k-3)}{k(k-1)(k-2)(k-3)} = \frac{4}{k}$.

Вероятность пойти Все на концерт при условии, что
пошёл Петя, равна $P(B/\Pi) = \frac{3 \cdot (k-2)(k-3)}{(k-1)(k-2)(k-3)} = \frac{3}{k-1}$

По формуле умн. вероятности $P(B \cap \Pi) = P(\Pi) \cdot P(B/\Pi) =$
 $= \frac{3}{k-1} \cdot \frac{4}{k} = \frac{12}{k(k-1)}$. - вероятность того, что пойдут оба.

Пусть конечное число билетов равно n . Аналогично
рассчитаем вероятности: $P'(\Pi) = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (k-n+1)}{k(k-1)(k-2) \dots (k-n+1)} =$
 $= \frac{n}{k}$; $P'(B/\Pi) = \frac{(n-1)(k-2)(k-3) \dots (k-n+1)}{(k-1)(k-2) \dots (k-n+1)} =$

$$= \frac{n-1}{k-1} \Rightarrow P'(\Pi \cap B) = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} = 11 P(\Pi \cap B)$$

$$= 11 \cdot \frac{12}{k(k-1)} \Rightarrow n(n-1) = 11 \cdot 12. \text{ Если } n > 11, \text{ то}$$

$$n-1 > 12 \text{ и } n(n-1) > 11 \cdot 12 \Rightarrow \text{Если } n < 11, \text{ то}$$

$$n-1 < 12 \Rightarrow n(n-1) < 11 \cdot 12 \Rightarrow n = 12.$$

Ответ! в конце месяца было 12 билетов на вак.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

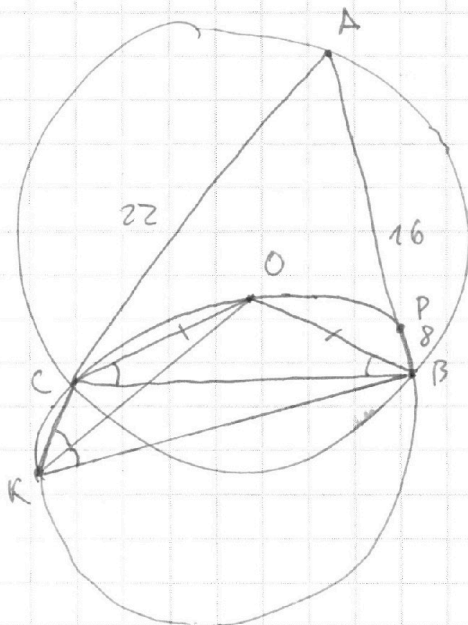
7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.5.



$$\text{Пусть } K = \omega_2 \cap AC.$$

$$\text{Тогда } AC \cdot AK = AP \cdot BA \Rightarrow$$

$$AK = \frac{8 \cdot 24}{22} = \frac{12}{11} \cdot 8 = \frac{96}{11}$$

Из вписанности углов

и равнобедренности $\triangle BOC$:

$$\angle OBC = \angle BCO = \angle OKB = \angle CKO.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \cdot \sin^2 2\alpha \leq \frac{1}{4} \Rightarrow$$

по неравенству м/дуг ср. арифм. и ср. квадр.

$$AD + BC \leq 4$$

$$AD + BC \leq \sqrt{4 \left(36 - 16 \sin^2 2\alpha + 36 - 16 \cos^2 2\alpha \right)} \leq \sqrt{36 - 16 + 36} =$$

$$= \sqrt{72 - 16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}.$$

$$\max M = 6\pi + 2\sqrt{14}, \text{ при } \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \Rightarrow \tan^2 \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n \text{ или } \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } 6\pi + 2\sqrt{14} \text{ } \} \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☐

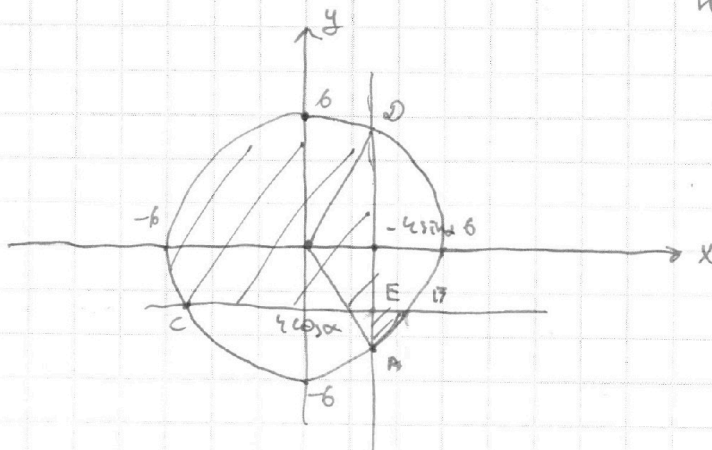
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. Заметим, что $AB = AP + PB$

6. Рассмотрим три прямые $x = -4 \sin \alpha$, $y = 4 \cos \alpha$.

Нам подходит заштрихованная область.



Дуги AB и CD всегда в сумме дают постоянную величину,

т.к. $\angle CED = 90^\circ = \text{const.}$

Периметр $M = \frac{1}{2} \pi \cdot 6 + AD + BC$

Пусть длина некоторой хорды в окружности радиуса R равна l . Тогда а расстояние от центра окружности до середины хорды равно h .



$$\sin \varphi = \frac{h}{R}, \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}}$$

$$l = 2R \cos \varphi = 2R \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}} = 2\sqrt{R^2 - h^2}$$

В нашем случае: $l = AD$, $R = 6$, $h = -4 \sin \alpha$.

$$AD = 2\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} \quad \text{Аналогично} \quad BC = 2\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$$

$$AD + BC = 2\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} + 2\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} \quad \text{по неравенству о средних.}$$

$$= 2\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} + 2\sqrt{36 - 16 + 16 \sin^2 \alpha} = 2\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} + 2\sqrt{20 + 16 \sin^2 \alpha}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+4 \sin \alpha)(y-4 \cos \alpha) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 36$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = P(B) - P(A|B)$$

$$A = \{111, \dots\}$$

у1. где A - 3 вар.
где B

111 = 11 + 1100 =
= 11 · 101.
KB: 11, 101.
ABC: 11, 101.
11, 707.

у3. $3y \leq x + (2k+1)$; $3\beta - \alpha = 0$.

$$\cos 2\beta + \cos(\alpha + \beta) = 0, \quad \alpha = 3\beta + \pi + 2\pi k$$

$$\cos 2\beta + \cos(\alpha - \beta - \pi) = 0$$

$$\cos 2\beta + \cos(2\beta + \pi) = 0; \quad \cos(2\beta + \pi) = -\cos 2\beta$$

$$x + (2k+1) =$$

$$x + n = -4;$$

$$3(x+n) = -12, -9, -8, -6, -3, -1, 0, 3, 6, 9.$$

$$-7; \quad 3y = x + n.$$

$$-7 \leq x + n \leq 6$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{9 + 4 \sin^2 \alpha}}$$

$$\sin \varphi = \frac{h}{6} = \frac{-4 \sin \alpha}{6}$$

4 билета a, → n-билетов. $P_0 = \frac{1}{n} P'$, n-?

$$P(\pi \cap B) = P(\pi) \cdot P(\pi/B) = P(\pi) \cdot P(\pi \cap B)$$

$$P(\pi \cap B) = \frac{C_{k-2}^2 \cdot C_{k-3}^2}{C_k^4}$$

$$= \frac{6 \cdot (k-2)(k-3)(k-4)! \cdot 4!}{k!}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

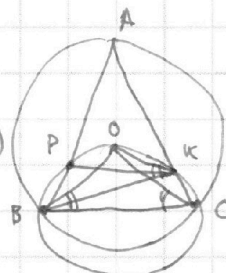
$$3y = x + 6n$$

~~оф~~

$$3y = x + (2k+1), \quad y = \frac{1}{3}(x + (2k+1))$$

$$3y =$$

$$y = (2n+1) - x.$$



$$x + 2k+1 = 6n+3 - 3x \Rightarrow 4x = 6n - 2k+2.$$

$$2x = 3n - k + 1; \quad 3n - k \div 2 \quad x = \frac{3n - k + 1}{2}.$$

$$y = n - x$$

$$\Rightarrow n - x = \frac{1}{3}(x + k)$$

$$y = \frac{1}{3}(x + k)$$

$$3n - 3x = x + k \Rightarrow 4x = 3n - k.$$

$$x = \frac{3n - k}{4}$$

$$3n - k \div 4.$$

$$3(3+x) - (-12-k) \Rightarrow 9 + 3x + 12 + k = 21 + 4x$$

$$\leq 3n - k \leq 21 + 4x$$

$$3(-4+x) - (9-k) = -12 + 3x - 9 + k = -21 + 4x.$$

$$-21 + 4x \leq 3n - k \leq 21 + 4x$$

$$4x + 1 = 4 \quad \text{чисел}$$

средн 44 чисел.

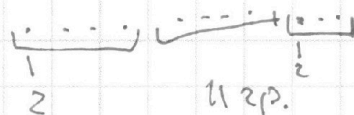
значение $(3n - k)$ бывает. 808

Если $\min(3n - k) \equiv 1 \pmod{4}$ то

или 10

Если $\min(3n - k) \not\equiv 1 \pmod{4}$, то или 11 значений.

$$3\beta - \alpha = n + 2\alpha k; \quad \alpha = 3\beta + n + 2\alpha k.$$



11 2р.

$$3y - n = y - k \\ 2y = n - k.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$3y = x + n, n - \text{нечётное.}$$

$$y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3y:3, x+n:3.$$

$$-12 \leq 3y \leq 9 \Rightarrow \text{---} \quad -12 \leq x+n \leq 9 \Rightarrow$$

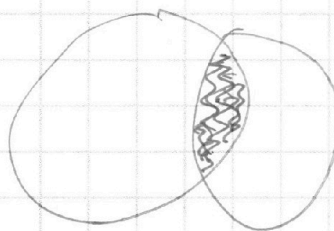
$$-12-x \leq n \leq 9-x \Rightarrow 9-x+12+x+1=22, \text{ 11 значений.}$$

~4. 4 суммарно, $\rightarrow 24$. k $\in$ $k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot (k-3) \cdot \dots$

$$P(\Pi) = \frac{k!}{(k-4)!}, \quad P(B) = \frac{k!}{(k-1)!} \quad P_0 = P$$

$$P(\Pi \cap B) = P(\Pi) \cdot P(\Pi/B)$$

$$P(\Pi \cap B) = \frac{P(\Pi/B)}{P(\Pi)} =$$



$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$P(\Pi/B) = P(B/\Pi), \quad P(\Pi/B) = \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{(k-1)}$$

$$P(\Pi \cap B) = \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{k(k-1)(k-2)(k-3)} = \frac{1}{k}$$

$$P'(\Pi \cap B) = \frac{P(\Pi/B)}{P(\Pi)} =$$

$$P(\Pi) = \frac{4}{C_k^4}$$

$$P(\Pi/B) = \frac{3}{C_{k-1}^3}$$

$$P(\Pi \cap B) = \frac{3}{C_{k-1}^3} \cdot \frac{C_k^4}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{k!}{4!(k-4)!} \cdot \frac{3! \cdot (k-4)!}{k!(k-1)!} =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{3!}{4!} \cdot k(k-1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{24} \cdot k(k-1) = \frac{3}{16} (k-1) \cdot k$$

$$P'(\Pi) = \frac{n}{C_k^n}$$

$$P'(B/\Pi) = \frac{(n-1)}{C_{k-1}^{n-1}}$$

$$P'(\Pi \cap B) = \frac{(n-1)}{C_{k-1}^{n-1}} \cdot \frac{C_k^n}{n} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{k!}{k!(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!(n-2)!}{(k-1)!} =$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n!}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{k-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{k}{n}, \quad \frac{(n-1)k}{n^2} = \frac{11 \cdot 3k}{16}$$

$$16(n-1) = 11n^2;$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~X~~ $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y.$

$x \in \mathbb{R}; y = 2k+1-x; (\sin((2k+1)y - \pi x) - \sin \pi x)$

$\sin(\pi - \pi x) = \sin \pi \cos \pi x - \cos \pi \sin \pi x = \sin \pi x - \sin \pi x = 0$

$\cos \pi y = \cos(\cos \pi (2k+1)y - x) = \cos((2k+1)\pi - \pi) =$

$= \cos(\pi x - \pi x) = \cos \pi \cos x + \sin \pi \sin \pi x = -\cos \pi x + \cos \pi x = 0$

$y \geq \frac{1}{3} \sin \pi y = \frac{1}{3} (x (2k+1)\pi)$

б) $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > \frac{\pi}{2}.$

$\arccos \frac{x}{7} \in [0; \pi], \arcsin \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}],$

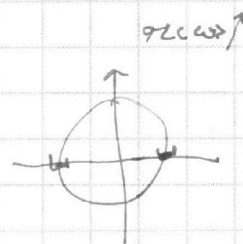
$\arccos \frac{x}{7} + \arcsin \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}], \arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{y}{4}.$

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{7} \leq 1 \Rightarrow -7 \leq x \leq 7; -4 \leq y \leq 4$

$\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0;$

$\frac{x}{7} - \frac{y}{4} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{49}} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{16}} > 1.$

$\frac{xy}{28} = 5$



$\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} \geq 0. 1) y = 2k+1-x, k \in \mathbb{Z}.$

$\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{2k+1-x}{4} \geq 0, \arccos \frac{x}{7} \geq 0 \Rightarrow$

$\frac{x}{7} = \frac{y}{4} = 0 \Rightarrow x=0, y=0 \Rightarrow x=7, y=4 \Rightarrow \text{не подходит.}$

$-7 \leq x \leq 6,$

$y = (2k+1) - x$

$3+k+4-k+1 = 8.$

$-4 \leq 1-x \leq 3 \Rightarrow$

$-3 \leq x-1 \leq 4$

$-4+k \leq 1 \leq 7+k$

$-3+k \leq x \leq 4+k$

$-11 \leq 1 \leq 9 \Rightarrow \text{кон-го нет,}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P(\pi \cap B) = P(\pi/B) = P(\pi) \cdot P(\pi/B) \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k-1} = \frac{3}{k-1} = \frac{4 \cdot (k-1)(k-2)(k-3)}{k(k-1)(k-2)(k-1)} \cdot P(\pi \cap B)$$

$$P(\pi \cap B) \cdot \frac{4}{k} = \frac{3}{k-1} \Rightarrow P(\pi \cap B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{k}{k-1}$$

$$P'(\pi/B) = \frac{(n-1)(k-2)(k-3) \dots (k-n+1)}{(k-1)(k-2)(k-3) \dots (k-n+1)} \cdot \frac{n-1}{k-1}$$

$$P'(\pi) \cdot P'(\pi \cap B) =$$

$$P'(\pi/B) = \frac{(n-1)(k-2)(k-3) \dots (k-n+1)}{C_{k-1}^{n-1}} = \frac{(n-1) \cdot (k-2)!}{(n-2)! \cdot (k-n)!} \cdot \frac{(k-n)!}{(k-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)(k-2)!}{(n-2)! \cdot (k-1)!} = \frac{(n-1) \cdot (k-2)}{n-2} \quad n=k$$

$$P'(\pi) \cdot P'(\pi \cap B) = \frac{n \cdot (k-1)(k-2) \dots (k-n+1)}{k \cdot (k-1)(k-2) \dots (k-n+1)} = P'(\pi \cap B) =$$

$$= \frac{n}{k} \cdot P'(\pi \cap B); \quad P'(\pi/B) = \frac{(n-1) \cdot (k-2)(k-3) \dots (k-n+1)}{(k-1)(k-2) \dots (k-n+1)}$$

$$= \frac{n-1}{k-1}; \quad P'(\pi \cap B) \cdot \frac{n}{k} = \frac{n-1}{k-1} \Rightarrow P'(\pi \cap B) = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{n-1}{n} =$$

$$= 11 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{k}{k-1} \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot 11 = \frac{n-1}{n} \Rightarrow \frac{33}{4} = \frac{n-1}{n} \Rightarrow 33n = 4n - 4 \Rightarrow$$

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 11 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{k}{k-1} \Rightarrow 11n - 11 = \frac{3}{4}n \quad 44n - 44 = 3n$$

$$33n = 44n - 44$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. (A; B; C)

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{b_1 b_2 b_3} = 711 \text{ цифра}$$

$$C = \overline{c_1 c_2}, - 711 \text{ не 1.}$$

$$ABC = x^2; \quad A = 10^4 a + 10^3 a + 10^2 a + 10 a + a : a.$$

$$C = 11, \quad c = 1k \text{ или } c = k1 \quad 1) C = 10 + k$$

$$C = 10k + 1$$

$$2) B = 171$$

$$B = 711$$

$$B = 171.$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} \quad x, y \neq 0 \quad \Leftrightarrow = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$x, y \neq 0.$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = ? = (x-y)(x^2 + xy + y^2).$$

$$x, y \neq 4, \quad y \neq -4.$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{xy-4y+4x-16}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+4} = \frac{3}{xy-4y+4x-16} - \frac{3}{xy}$$

$$\frac{x-4-x}{x(x-4)} + \frac{y+4-y}{(y+4)y} = \frac{3xy - 3xy + 12y - 12x + 48}{xy(x-4)(y+4)}$$

$$-4y(y+4) +$$

$$\frac{4x(x-4) + 4y(y+4)}{xy(x-4)(y+4)} = \frac{12y - 12x + 48}{xy(x-4)(y+4)}.$$

$$4x^2 - 16x - 4y^2 - 16y = 12y - 12x + 48. \quad 2x$$

$$4x^2 - 4x - 4y^2 - 28y - 48 = 0.$$

$$4x^2 - 4x + 1 - 4y^2 - 28y - 49 = 0$$

$$\begin{cases} 2x-1 = 2y+7 \\ 2x-1 = -2y-7 \end{cases}$$

$$(2x-1)^2 - (2y+7)^2 = 0 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3y = x + n, \quad n - \text{нечёт.}$$

$$x = 3y + t, \quad t - \text{нечёт.}$$

$$\begin{aligned} \sin(3\pi y + \pi) &= \\ &= \sin 3\pi y \cos \pi + \cos 3\pi y \sin \pi = \\ &= -\sin 3\pi y. \end{aligned}$$

$$\sin \pi y - \sin 3\pi y = \sin \pi y - \sin(3\pi y + \pi) =$$

$$\sin \pi y - \sin 3\pi y = 2. \quad (\sin \pi y - \sin 3\pi y) \sin \pi y.$$

$$\cos(3\pi y + \pi) = -\cos 3\pi y \Rightarrow$$

$$(\sin \pi y - \sin 3\pi y) \sin \pi y = (\cos \pi y - \cos 3\pi y) \cos \pi y$$

$$\sin 3x = 3 \sin x \cos^2 x + \cos 3x \sin x =$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin^3 x - \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \pi y - 3 \sin^3 \pi y + 4 \sin^5 \pi y &= (4 \sin^5 \pi y - 2 \sin^3 \pi y) \sin \pi y = \\ &= 4 \sin^6 \pi y - 2 \sin^4 \pi y; \end{aligned}$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

$$4 \sin^6 \pi y - 2 \sin^4 \pi y = 4 \cos^4 \pi y - 2 \cos^2 \pi y$$

$$4a^6 - 2a^4 = 4a^4 - 2a^2$$

$$3y = x + n_1 \Rightarrow$$

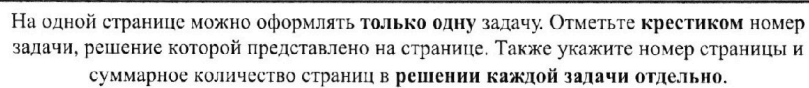
$$y = n_2 - x$$

$$3n_2 - 3x = x + n_1 \Rightarrow$$

$$4x = 3n_2 - n_1 \quad \text{нечёт.}$$

$$n - x \quad \begin{cases} 3y = x + t \\ y = n - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n - 3x = x + t \\ 4x = 3n - t. \end{cases}$$

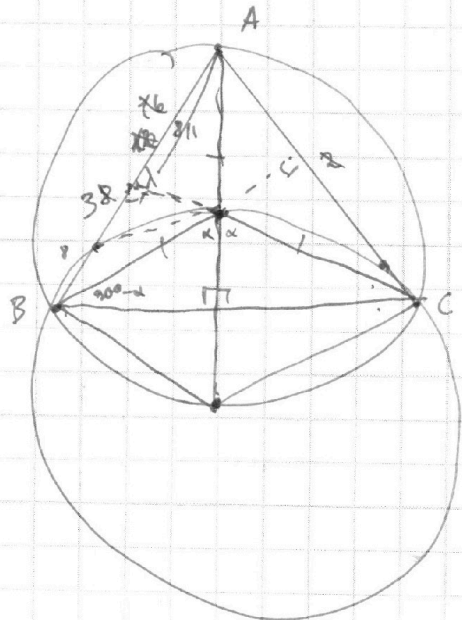
$$\begin{aligned} 1-1 &= 0. \\ 1 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \\ n-n &= \\ \text{д} \quad 1, 3, 1, 3. \end{aligned}$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

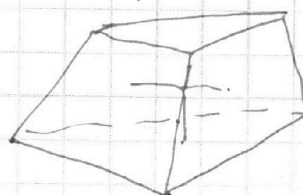
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{22}{\cancel{44} \times \frac{1}{2}} = \frac{BC}{2 \text{ m}}$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 31} \\ \underline{21} \\ 10 \\ \underline{7} \\ 30 \\ \underline{21} \\ 90 \\ \underline{84} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 10 \end{array}$$

~~Ans 1~~



6.
$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 4\sin\alpha \leq 0 \\ y \leq 4\cos\alpha \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -4\sin\alpha \\ y \geq 4\cos\alpha \end{cases}$$

~~$$x^2 \leq 16 \Rightarrow x \leq 4$$
$$y^2 \leq 16 \Rightarrow y \leq 4$$~~

$$x^2 - y^2$$

$$(x + 4\cos\alpha)(y - 4\sin\alpha) = 0.$$

$$\begin{cases} x = -4 \sin \alpha \\ y = 4 \cos \alpha \end{cases}$$

~~26-36~~

$$x^2 = 16 \sin^2 \alpha$$

$$g^2 = 46 - 46 \sin^2 \alpha = 76 - x^2$$

$$4^2 + 4^2 = 16$$

$$y^2 = 4ax^2 - 4ax = 4a(x^2 - x) = 4a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - a$$

$$\begin{aligned} 8.74 &\leq 0 \\ 0.5 &\leq 7.0 \end{aligned}$$

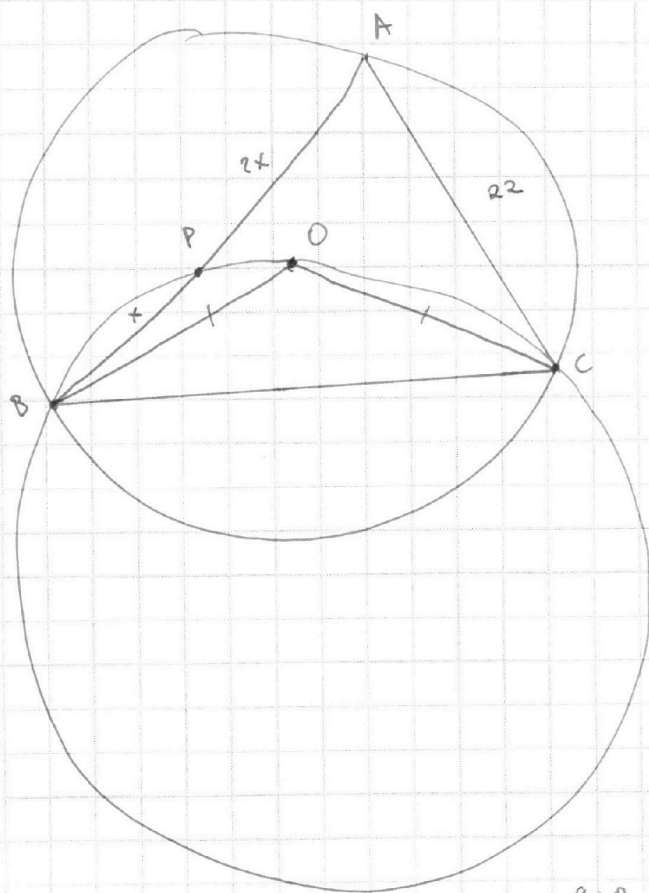


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AP = 16$$

$$BP = 8$$

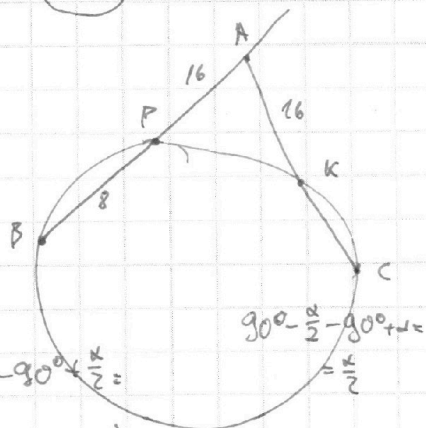
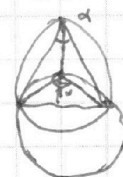
$$AC = 22$$

$$S_{ABC} \rightarrow ?$$

$$AP \cdot BA =$$

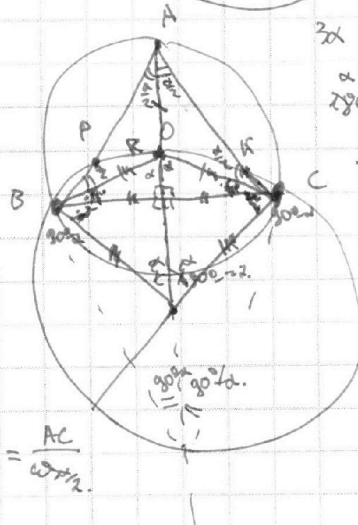
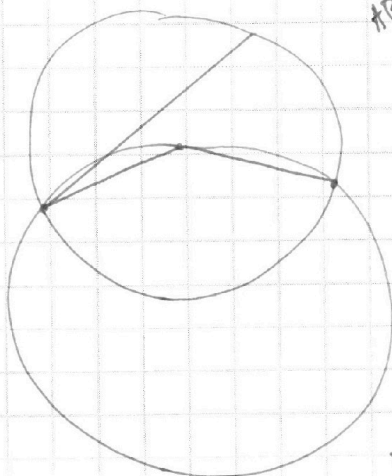
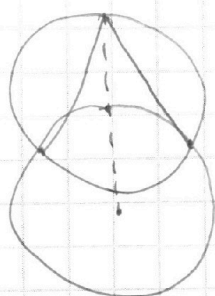
$$x \cdot 22 = 16 \cdot 22$$

$$x = 16.$$



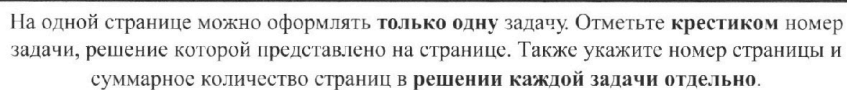
$$90^\circ - \frac{\alpha}{2} - 90^\circ + \frac{\alpha}{2} =$$

$$90^\circ - \frac{\alpha}{2} - 90^\circ + \frac{\alpha}{2} =$$



$$2x \cdot 22 = 16 \cdot 22$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \alpha}$$



СТРАНИЦА
ИЗ

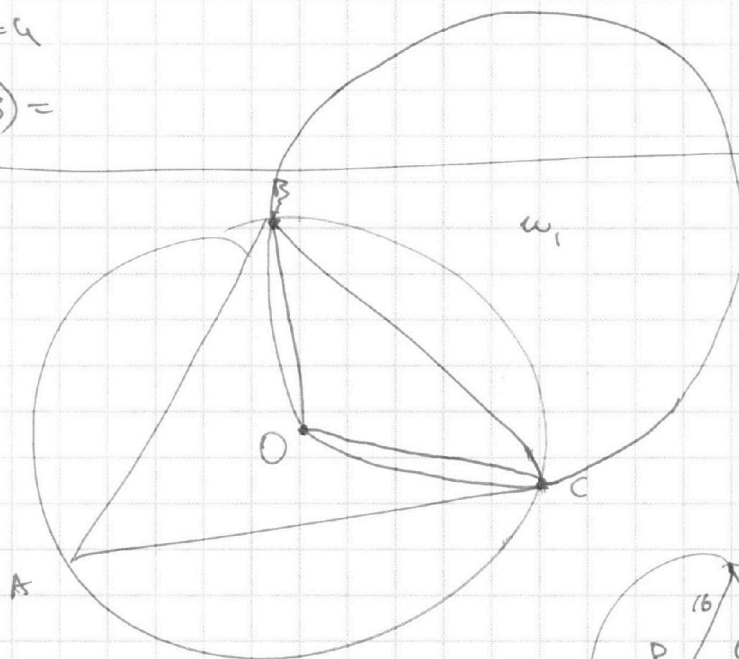
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$k \approx 4$
4.3

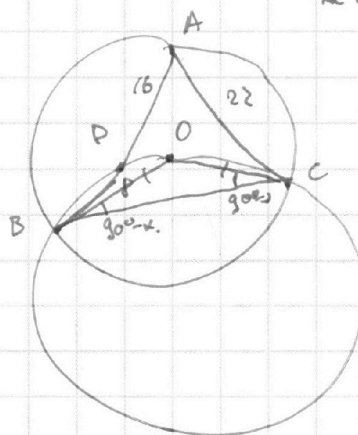
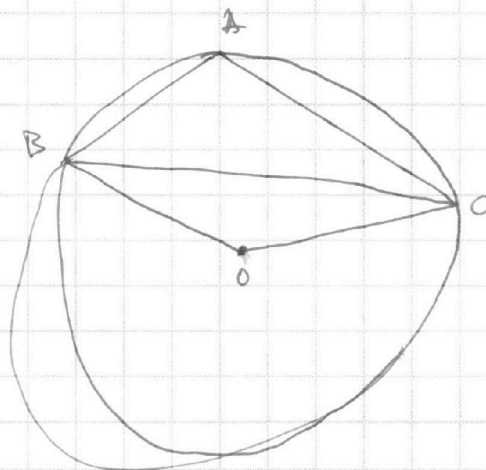
$$P(A \cap B) = \frac{4!}{k!}$$

$$k = 4$$

$$P(A \cap B) =$$



$\angle AOC = ?$
 $AP = 10$
 $BP = 8$
 $AC = 22$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) 2x-1=2y+7 \Rightarrow 2x-2y=8, x-y=4. \Rightarrow y=x-4.$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x(x-4)} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x} + \frac{3}{x(x-4)}.$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - 12xy &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = \\ &= (x-y)(x^2 + x(x-4) + (x-4)^2) - 12(x-4)x = \\ &= 4(x^2 + x^2 - 4x + x^2 - 8x + 16) - 12x^2 + 48x = \\ &= 4(3x^2 - 12x + 16) - 12x^2 + 48x = \\ &= 12x^2 - 48x + 64 = 12x^2 + 48x = \boxed{48} \end{aligned}$$

$$2) 2x-1=-2y-7 \Rightarrow 2x+2y=-6 \Rightarrow x+y=-3!?$$

$$\sim 3. a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y.$$

$$\pi x = \alpha, \pi y = \beta \Rightarrow (\sin \beta - \sin \alpha) \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cos \beta.$$

$$\sin^2 \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta \Rightarrow$$

$$\cos^2 \beta - \sin^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0$$

$$\cos 2\beta + \cos(\alpha - \beta) = 0.$$

$$2 \cos \frac{2\beta + \alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{2\beta - \alpha + \beta}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{\beta + \alpha}{2} = 0 \\ \cos \frac{3\beta - \alpha}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$1) \frac{\beta + \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \beta + \alpha = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\alpha x + \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{aligned} x + y &= 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\ x &\in \mathbb{R}, y &= 2k + 1 - x, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$2) \frac{3\beta - \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3\beta - \alpha = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$3\pi y - \pi x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{aligned} 3y &= x + (2k + 1), k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\ y &= \frac{1}{3}(x + (2k + 1)), k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$