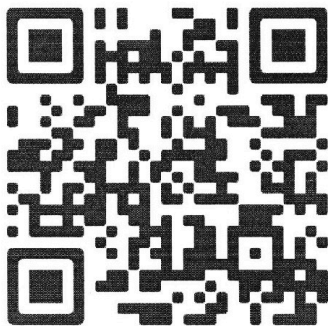
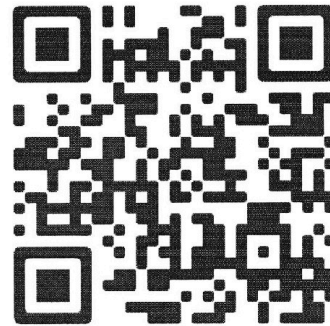




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $A = 101^{n-1} \cdot 11 \cdot a$, где a — какое-то однозначное число. 101 — простое. Если $A \cdot B \cdot C$ — квадрат, то каждый простой множитель встречается четное кол-во раз.

$\Rightarrow A \cdot B \cdot C : 11^2$. $a \nmid 11$ (т.к. оно однозначное)

$\Rightarrow B : 101$ или $C : 101$. $C \nmid 101$, т.к. C двузначное

$\Rightarrow B : 101$. Тогда B имеет вид $\overline{x0x}$, где x — какая-то цифра. Из условия, хотя бы одна цифра B — 7

$\Rightarrow x = 7 \Rightarrow B = 7 \cdot 101$. $A : 11$, $B \nmid 11$, $A \cdot B \cdot C$ — квадрат $\Rightarrow A \cdot B \cdot C : 11^2 \Rightarrow C : 11$, C — двузначное

$\Rightarrow C = \overline{y1}$, где y — цифра, но в C хотя бы одна цифра — 1 $\Rightarrow y = 1 \Rightarrow C = 11$. Тогда:

$$A = 101 \cdot 11 \cdot a$$

$$B = 7 \cdot 101$$

$$C = 11$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7 \cdot a,$$

где a — однозначное ненулевое число и $A \cdot B \cdot C$ — квадрат.

Тогда $a = 7 \Rightarrow A, B, C = 101 \cdot 11 \cdot 7, 7 \cdot 101, 11$

$\Rightarrow$ Ответ: такая тройка есть: $(7777, 707, 11)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} \quad \text{Можно поделить}$$

$$x+y+3 \neq 0, \text{ т.к. } x > 0, y > 0 \Rightarrow x+y+3 > 0 \Rightarrow xy = (x-4)(y+4) \Leftrightarrow$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16 \Leftrightarrow 4x - 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$y = x - 4. \quad \text{Но при этом можно заметить, что } k \text{ при}$$

этом не изменится только 1 раз, т.к. $x+y+3 = \text{const}$

$$x(x-4) = (x-4)x, \text{ и } (x-4)x \neq \begin{cases} (x-8)(x+4) \\ (x-12)(x+8) \\ \vdots \end{cases}$$

Это значит !!! $\Rightarrow x+y+3=0$. Тогда $k=0$

$$M = x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4) = x^3 - (x^3 - 12x^2 + 48x - 64) - 12x^2 + 48x = x^3 - x^3 + 12x^2 - 48x + 64 - 12x^2 + 48x = 64 \Rightarrow$$

M может принимать ^{только} значение 64

(он же его принимает, если, например, $x=8, y=4$)

Отв: $M=64$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\sin \frac{\pi(y-x)}{2}} \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \sin \pi y = \cancel{\cos \frac{\pi(y+x)}{2}} \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \pi y$$

1 случай $\cos \frac{\pi(y+x)}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi(y+x)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ (здесь и дальше $k \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow x+y = 1+2k \Leftrightarrow x+y = \text{какое-то нечётное число.}$

2 случай $\sin \frac{\pi(y-x)}{2} \sin \pi y = \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cos \pi y \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi(y-x)}{2} + \pi y \right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\pi(y-x)}{2} + \pi y = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow y-x+2y = 1+2k$$

$$\Leftrightarrow 3y-x = 1+2k \Leftrightarrow 3y-x = \text{какое-то нечётное число.}$$

$$b) \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$$

Минимальное значение аркосинуса = 0, а
 максимум арксинуса = $\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \geq 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}, \text{ при этом равенство достигается } \Leftrightarrow \begin{cases} \arccos \frac{x}{7} = 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Тогда $\frac{x}{7} = 1, \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow x = 7, y = 4$. При этом эти числа удовл. а), т.к. $x+y = 7+4 = 11$ — нечёт.

и $3y-x = 12-7 = 5$ — нечёт. $\Rightarrow$ такая пара
 всего одна



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим вероятность в начале месяца.
] всего ~~одинадцати~~ билетов k . Тогда распределить все билеты можно C_k^4 способами. Если и Петя, и Вера получили билет, то тогда нужно оставшиеся 2 билета распределить между оставшимися $k-2$ учениками, таких случаев C_{k-2}^2 . Тогда вероятность равна:

$$\frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} = \frac{(k-2)! \cdot 4! \cdot (k-4)!}{2! \cdot (k-4)! \cdot k!} = \frac{3 \cdot 4}{k \cdot (k-1)}$$

Теперь рассмотрим вероятность в конце месяца.] билетов стало m штук. Тогда аналогично тому, как мы считали вероятность в начале месяца, в конце месяца вероятность будет

$$\frac{C_{k-2}^{m-2}}{C_k^m} = \frac{(k-2)! \cdot m! \cdot (k-m)!}{(m-2)! \cdot (k-m)! \cdot k!} = \frac{(m-1) \cdot m}{(k-1) \cdot k}$$

Из условия первая вероятность в 11 раз меньше, чем вторая. Тогда:

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 11}{k \cdot (k-1)} = \frac{m(m-1)}{k(k-1)} \Rightarrow 3 \cdot 4 \cdot 11 = m(m-1)$$

Корнями данного уравнения явл. 12 и -11, ~~ко-во~~ билетов в конце больше 4 $\Rightarrow m=12$

Ответ: 12.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$S_{PBC} = \frac{h \cdot PB}{2} = \frac{33\sqrt{15} \cdot 8}{8 \cdot 2} = \frac{33\sqrt{15}}{2}$$

$$S_{ABC} = S_{APC} + S_{PBC} = 33\sqrt{15} + \frac{33\sqrt{15}}{2} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

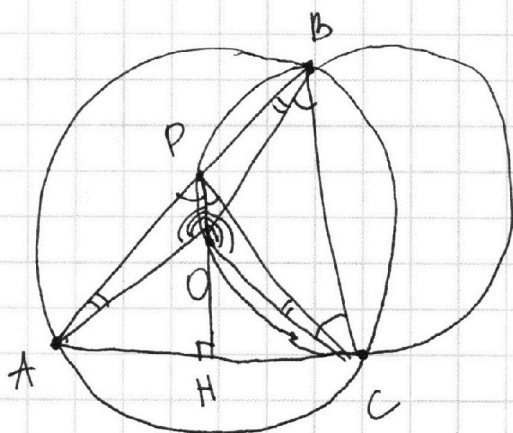
5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$OB = OC$, как радиусы $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle OBC - \text{р/б} \Rightarrow \angle OBC = \angle OCB$
 $= \alpha$. $\angle OBC = \angle OCB = \alpha$, как оттр
 на одну дугу (окруж. ω_2)
 из вписанности такие имеют
 $\angle OCB = \angle APO = \alpha$.

Из ω_2 $\angle OCP = \angle OBP$. $OB = OA \Rightarrow$
 $\triangle AOB - \text{р/б} \Rightarrow \angle OAB = \angle OBP = \angle OCP$. Тогда $\angle AOP =$
 $= 180 - \angle OAP - \angle APO = 180 - OCP - \angle OPC = \angle COP$, $\Rightarrow$
 $\triangle AOP = \triangle COP$ по II признаку $\Rightarrow AP = PC = 16$, $\Rightarrow$
 $\triangle APC - \text{р/б} \Rightarrow PO$ не только бис., но и высота
 пусть PO пересекает AC в точке H , тогда из р/б
 $AH = HC = \frac{AC}{2} = 11$. Тогда из т. Пифагора $PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} =$
 $= \sqrt{16^2 - 11^2} = \sqrt{256 - 121} = \sqrt{135} = 3\sqrt{15}$. Тогда
 $S_{APC} = \frac{PH \cdot AC}{2} = \frac{3\sqrt{15} \cdot 22}{2} = 33\sqrt{15}$.

По т. косинусов для $\triangle APC$: ~~AC~~ $AC^2 = AP^2 + PC^2 -$
 $- 2 \cdot AP \cdot PC \cos 2\alpha \Rightarrow 484 = 512 - 512 \cos 2\alpha \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{28}{512} =$
 $= \frac{7}{128}$. Тогда 2α - острый.] h - длина высоты
 $\triangle PBC$, опущ. из вершины C . Тогда $h = PC \cdot \sin 2\alpha$
 $= \frac{16 \cdot \sqrt{128^2 - 7^2}}{128} = \frac{16 \cdot 33\sqrt{15}}{128} = \frac{33\sqrt{15}}{8}$



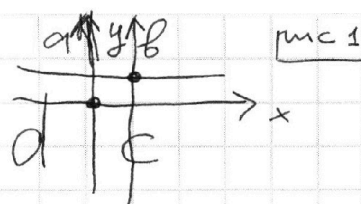
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ① (x + 4\sin \alpha)(y - 4\cos \alpha) \leq 0 \\ ② x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$



Рассмотрим ②. Это круг с радиусом 6 и центром в начале координат.

Теперь рассмотрим ①.

Если провести $x = -4\sin \alpha$

и $y = 4\cos \alpha$, то

плоскость разделится на

4 части: a, b, c, d (См. рис. 1)

(a и c содержат границы, а b и d - нет)

в части a ① принимает ~~не~~ неположительное значение.

в части b ① принимает ~~не~~ полож. значения

в части c ① принимает неполож. знач.

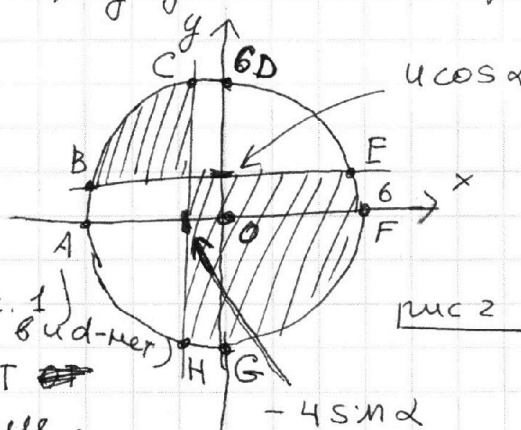
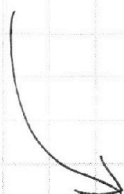
в части d ① принимает полож. значения.

Значит нам подходят только части a и c.
Итого $\Phi(\alpha)$ - это заштрихов. фигура на рис. 2.

Заметим, что $\angle AB = \angle EF$ (из симметрии), а также $\angle CD = \angle HG$ (аналогично) $\Rightarrow \angle HE + \angle BC = \angle AD + \angle GF = \cancel{2\pi} = \frac{2\pi R}{2} = 6\pi$.

Тогда $M = 6\pi + CH + BE$

$$\sin \alpha = a \Rightarrow a \in [-1; 1]$$

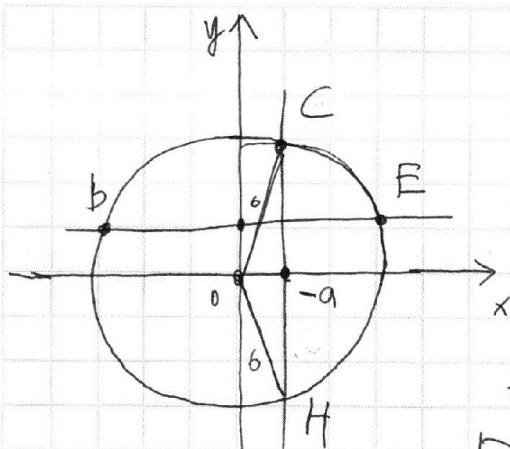




На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$CH = 2\sqrt{36 - 16a^2} \text{ (по т. Пифагора).}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - a^2}. \text{ Тогда по т. Пифагора}$$

$$BE = 2\sqrt{36 - 16(1 - a^2)} = 2\sqrt{20 + 16a^2}.$$

$$f(a) = 2\sqrt{36 - 16a^2} + 2\sqrt{20 + 16a^2} = CH + BE.$$

$M = f(a) + 6\pi$. Нужно найти максимальное значение $M \Rightarrow$ нужно найти максимальное значение $f(a)$. Для этого найдём производную $f'(a)$:

$$f'(a) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-32a}{\sqrt{36 - 16a^2}} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{32a}{\sqrt{20 + 16a^2}} =$$

$$= -\frac{32a}{\sqrt{36 - 16a^2}} + \frac{32a}{\sqrt{20 + 16a^2}}. \text{ Тогда } f'(a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{32a}{\sqrt{36 - 16a^2}} = \frac{32a}{\sqrt{20 + 16a^2}}. \text{ и } a = 0 \text{ подходит. Теперь}$$

$$\text{рассмотрим } a \neq 0. \text{ Тогда } 36 - 16a^2 = 20 + 16a^2 \Leftrightarrow 16 = 32a^2 \Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Т.е. } f'(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Если } a = \pm 1, \text{ то } f(a) = 2\sqrt{20} + 2\sqrt{36}.$$

$$\text{Если } a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ то } f(a) = 2\sqrt{28} + 2\sqrt{28}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $a=0$, то $f(a) = 2\sqrt{36} + 2\sqrt{28}$.

Заметим, что $2\sqrt{20} + 2\sqrt{36} < 2\sqrt{28} + 2\sqrt{28} \Leftrightarrow$

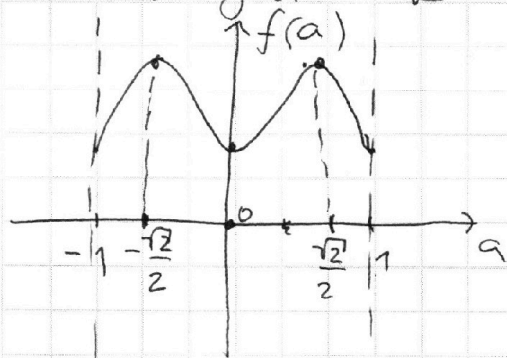
$$\Leftrightarrow 20 + 36 + 2\sqrt{20 \cdot 36} < 4 \cdot 28 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{20 \cdot 36} < 56 \Leftrightarrow 4 \cdot 20 \cdot 36 < 56 \cdot 56$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 5 \cdot 9 < \cancel{28 \cdot 28} 14 \cdot 14 \Leftrightarrow 5 \cdot 9 < 7^2$$

$\Leftrightarrow 45 < 49$. Тогда наша функция $f(a)$

выглядит так:



Тогда $f(a) \leq 2\sqrt{28}$, и

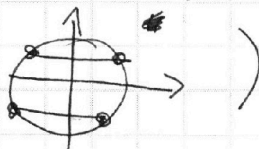
при этом $f(a) = 2\sqrt{28} \Leftrightarrow$

$$a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Это значит, что $M \leq$

$$\leq 6\pi + 2\sqrt{28} \text{ (равенство } \Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z} \text{)}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\cancel{\sin \frac{\pi(y-x)}{2}} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \sin \pi y = \cancel{\cos \frac{\pi(y+x)}{2}} \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \pi y$$

① $\cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0$

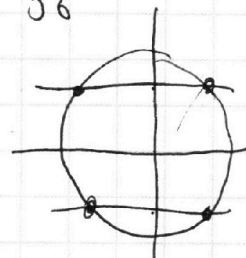
$$\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + k$$

$$x+y = 1+2k$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{array}{r} x^2 8 \\ y \\ \hline 112 \\ - 56 \\ \hline 56 \end{array}$$



② $\sin \frac{\pi(y-x)}{2} \sin \pi y = \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \pi y$

$$\cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \pi y - \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \sin \pi y = 0$$

$$2\sqrt{20} + 2\sqrt{36} \quad \cos \left(\frac{\pi(y-x)}{2} + \pi y \right) = 0$$

$$2\sqrt{28} + 2\sqrt{28}$$

$$\sqrt{20} + \sqrt{36} \sqrt{2 \cdot 28}$$

$$20 + 36 + 2\sqrt{20 \cdot 36} \sqrt{4 \cdot 28}$$

~~2~~

$$56 + 2\sqrt{20 \cdot 36} \sqrt{112}$$

$$2\sqrt{20 \cdot 36} \sqrt{56}$$

$$\sqrt{20 \cdot 36} \sqrt{28}$$

$$\frac{\pi(y-x)}{2} + \pi y = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\frac{y-x}{2} + y = \frac{1}{2} + k$$

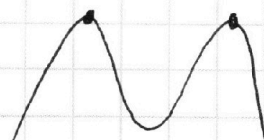
$$y-x+2y = 1+2k$$

$$3y-x = 1+2k$$

$$\begin{array}{r|l} 16335 & 3^2 \\ 1815 & 5 \\ 363 & 3 \\ 121 & 11^2 \end{array}$$

$$\frac{20 \cdot 36 \sqrt{28 \cdot 28}}{5}$$

$$45 \sqrt{49}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 111111 \\ 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \overline{) 7} \\ 7 \\ \hline 01 \\ 01 \\ \hline 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2222 = 2 \cdot 11 \cdot 101 \\ 3333 = 3 \cdot 11 \cdot 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A = 11 \cdot 101 \cdot P \\ B = 707 = 7 \cdot 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 202 \\ 303 \\ 404 \\ 505 \\ 606 \\ 707 \end{array}$$

$$C : 11$$

$$\Rightarrow C = 11$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{array}{l} 11 \cdot 101 \cdot 1 \\ 7 \cdot 101 \end{array}$$

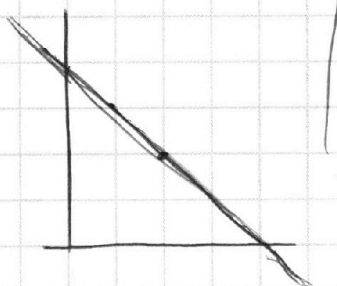
$$C : 11 \quad C : 7 \Rightarrow C = 77$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{array}{l} 11 \cdot 101 \cdot 2 \\ 7 \cdot 101 \end{array}$$

$$C : 11 \quad C : 2 \quad C : 7 \Rightarrow C = 2 \cdot 7 \cdot 11 = 154$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{array}{l} 11 \cdot 101 \cdot 3 \\ 7 \cdot 101 \\ C \end{array}$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$$



$$x^3 - y^3 - 12xy$$

$$x(x^2 - 6y) - y(y^2 + 6x)$$

$$x^3 - 12xy - y^3$$

$$\textcircled{4} \quad -12xy$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy$$



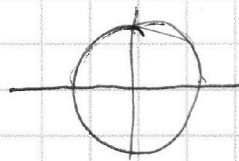
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$



$$\frac{x}{7} = 1$$

$$\frac{y}{4} = 1$$

$$x = 7$$

$$y = 4$$

$$\frac{C_9^2}{C_{11}^4} = \frac{9! \cdot 4! \cdot 7!}{2! \cdot 7! \cdot 11!} = \frac{3 \cdot 4^2}{5 \cdot 11} = \frac{6}{55}$$

$$\frac{C_9^{k-2} \cdot 11 \cdot 5}{C_{11}^k \cdot 6} = 11 \cdot \frac{C_9^{k-2}}{C_{11}^k} = \frac{6}{5}$$

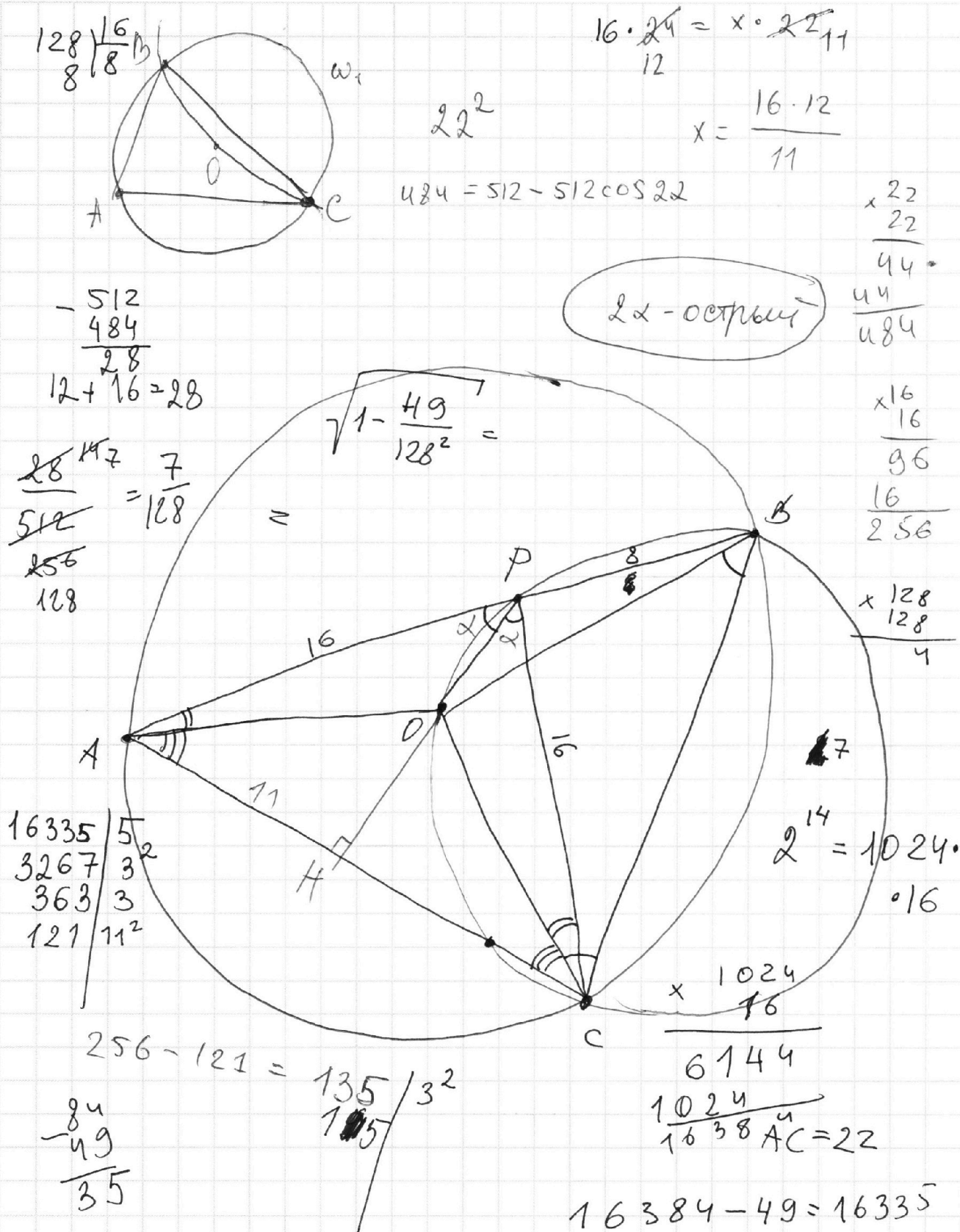
$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{11 \cdot 10 \cdot 5} = \frac{6}{55} \quad \frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} = \frac{(k-2)! \cdot 4! \cdot (k-4)!}{2 \cdot (k-4)! \cdot k! \cdot (k-1)! \cdot k}$$

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 11}{k \cdot (k-1)} = \frac{m(m-1)}{k(k-1)}$$

$$m \cdot (m-1) = 4 \cdot 3 \cdot 11 \Rightarrow m = 12$$

$$m^2 - m - 3 \cdot 4 \cdot 11 = 0$$

12 и -11





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

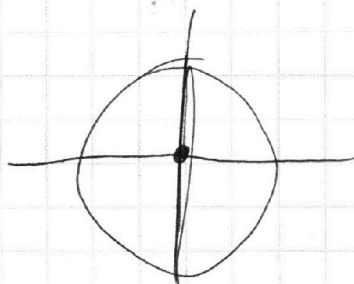
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1	2	3	4	5	6	7
✓	✓	✓	✓	✓	✓	-





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{(x-4)^3 - y^3 - 12(x-4)}{x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4)}$$

$$xy = (x-4)(y+4)$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$4x - 4y - 16 = 0$$

$$x - y = 4$$

$$y = x - 4$$

$$y + 4 = x - 4 + 4$$

$$y = -x - 4$$

$$x(x-4) = x(x-4)$$

$$x = -3 - y$$

$$\begin{aligned} &(-3-y)^3 - y^3 - 12(-3-y)y \\ &= -(y^3 + 9y^2 + 27y + 27) - y^3 + 36y + 12y^2 \\ &= -y^3 - 9y^2 - 27y + 27 - y^3 + 36y + 12y^2 \\ &= -2y^3 + 3y^2 + 9y - 18 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

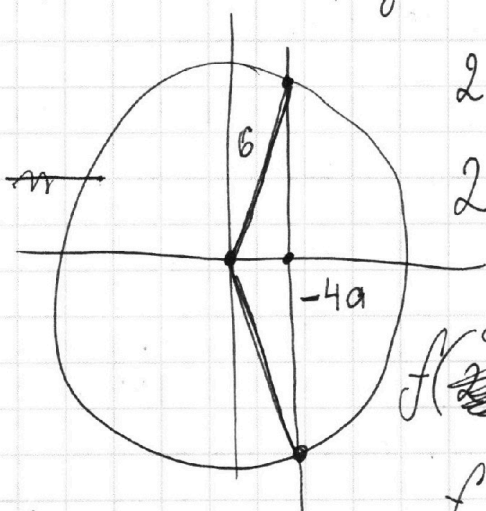
$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 \\ (x + 4 \cdot a)(y - 4 \cdot \sqrt{1-a^2}) \leq 0 \end{cases}$$

Если

$a=0$,

то ~~то~~

$$M = 6\pi + 24$$



$$2\sqrt{36-16a^2}$$

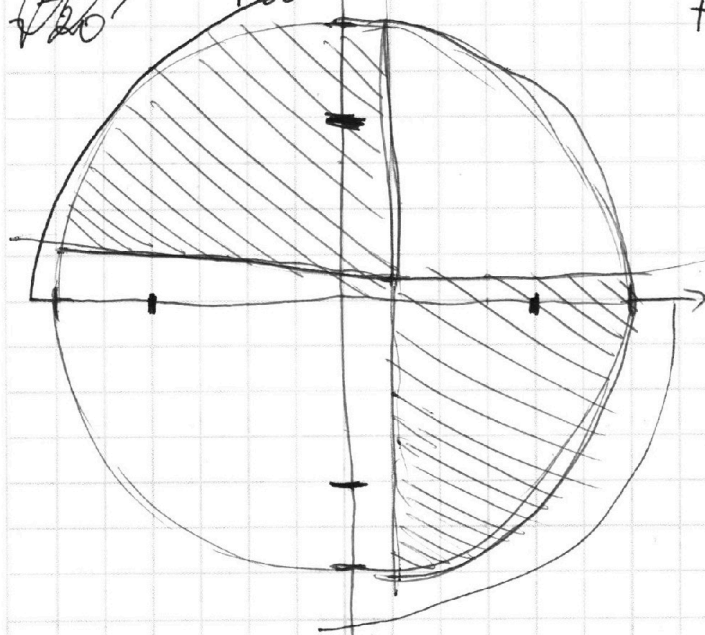
$$2\sqrt{36-16(1-a^2)} = 2\sqrt{20+16a^2}$$

$$f(a) = 2(36-16a^2)^{\frac{1}{2}} + 2(20+16a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(a) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot (-32a)}{\sqrt{36-16a^2}} +$$

$$+ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{32a}{\sqrt{20+16a^2}} = 0$$

$$- \frac{32a}{\sqrt{36-16a^2}} + \frac{32a}{\sqrt{20+16a^2}} = 0$$



$$\frac{a}{\sqrt{36-16a^2}} = \frac{a}{\sqrt{20+16a^2}}$$

$$36-16a^2 = 20+16a^2$$

$$16 = 32a^2$$

$$\frac{1}{2} = a^2 \quad a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$