



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Так как $ab : 2^{15} \cdot 7^{17}$ то $ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{17}$

где k - натуральное число. Так как

$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$ то $bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$ где m - натуральное

число. Так как $dc : 2^{23} \cdot 7^{39}$ то $dc = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$

где n - натуральное число:

$$\begin{cases} ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{17} \\ ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \\ bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 b^2 c^2 = 2^{55} \cdot 7^{58} \cdot k \cdot n \cdot m \\ (abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{58} \cdot k \cdot n \cdot m \end{cases}$$

так как квадрат натурального числа
содержит в своём разложении все делители
в чётных степенях то $(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{58} \cdot \frac{k \cdot n \cdot m}{2}$

если abc наименьшее то и $(abc)^2$ - наимень-
ший, а значит $\frac{k \cdot n \cdot m}{2} = 2^{56} \cdot 7^{58} \cdot \frac{k \cdot n \cdot m}{2}$ - наименьшее.
а наименьшее оно при $k \cdot n \cdot m = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{58} \Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{29}$ так как по
условию a, b, c - натуральным $\Rightarrow abc > 0$

Ответ: ~~$2^{38} \cdot 7^{58}$~~ $2^{28} \cdot 7^{29}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 4x$$

~~возведем в кв~~

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

Задача 2

Если дробь $\frac{a}{b}$ - несократима то a

a и b нет общих простых делителей, а это означает что $a+b$ и ab - взаимнопросты

так как ab - делится ровно на те простые делители в которые входят в состав a и b , а $a+b$ делителем делится ни на 1 простое число ни в состав a ни в b так как в обратном случае будет делиться число a или b .
1 число делится и их сумма делится то a .
2 число обязано делится, тогда $\frac{a}{b}$ можно будет сократить. Поэтому $a+b$ и ab - взаимнопросты пусть $a+b = k$ $ab = n$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{k}{k^2 - 9n}$$

дробь можно сократить по k делителю $k^2 - 9n$ так это делится $k^2 - 9n$. Попробуем это ab . Эти числа могут делиться только на 9 так как k и n - взаимнопросты. Пусть k и $k^2 - 9n$ взаимнопросты тогда $9n \div k$ $9n \div k \Rightarrow n \div k$ тогда k и n не взаимнопросты \Rightarrow может быть только 9 или 9
 $a=2$ $b=7$ $\frac{9}{4-99+49} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$

Ответ: $n=9$ корректно.

$$\frac{9}{4-99+49} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$$

2 из 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

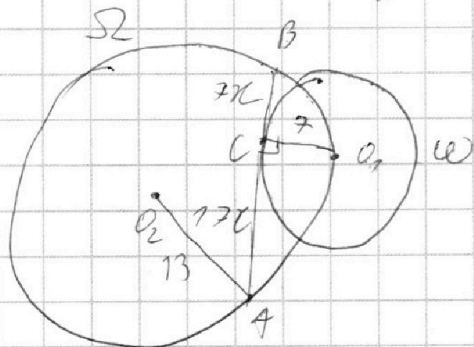
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3



Дано:
радиус $\omega = 7$

радиус $\Omega = 13$

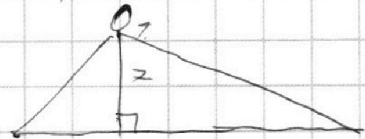
$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

AB - касательная
к ω

O_1 - центр окружности ω $\perp AB \Rightarrow$

$O_1 C \perp AB$ так как как угол между касательной
и радиусом проведенным к точке касания.

$\triangle AO_1B$ - вписан в Ω



Пусть $BC = 7x$ тогда $AC = 17x$

Из теоремы Пифагора $BO_1 = \sqrt{49x^2 + 49}$ $O_1A = \sqrt{289x^2 + 49}$
 $\triangle BC O_1$ и $\triangle CO_1A$. $\sin \angle BO_1C = \frac{BC}{BO_1}$ $\sin \angle AO_1C = \frac{AC}{O_1A}$ $\cos \angle BO_1C = \frac{CO_1}{BO_1}$ $\cos \angle AO_1C = \frac{O_1C}{O_1A}$

$$\sin \angle BO_1A = \sin(\angle BO_1C + \angle CO_1A) = \frac{7x}{\sqrt{49x^2 + 49}} \cdot \frac{7}{\sqrt{289x^2 + 49}} +$$

$$+ \frac{17x}{\sqrt{289x^2 + 49}} \cdot \frac{7}{\sqrt{49x^2 + 49}} \neq \sin \angle BO_1A = \frac{24x}{\sqrt{x^2 + 7} \sqrt{289x^2 + 49}}$$

O_2 - центр Ω

$$2O_2A = \frac{BA}{\sin \angle BO_1A} \quad 26 = \frac{24x}{\sqrt{x^2 + 7} \sqrt{289x^2 + 49}} \quad 26 = \sqrt{x^2 + 7} \sqrt{289x^2 + 49}$$

$$676 = 289x^2 + 49x^2 + 289x^2 + 49 \quad t = x^2 \Rightarrow t = 0$$

$$676 = 289t^2 + 49t + 289t + 49 \quad t = 7 \quad t = -1 - \frac{38}{289} \text{ м.к. } t \geq 0 \quad t = 7$$

$$t = 7 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm \sqrt{7} \quad x \geq 0 \text{ м.к. это расстояние}$$

$$AB = 24x = 24. \quad \text{Ответ: } 24.$$

3 из 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 7} = 7 - 9x$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 7 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 7} = 7 - 9x$$

$$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 7} \neq 0 \end{cases}$$

$$7 - 9x = (7 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 7})$$

$$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ 1 - 9x \neq 0 \end{cases}$$

$$7 - 9x \neq 0 \quad \begin{cases} 7 - 9x = 0 \\ 7 = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 7} \end{cases}$$

$$7 = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 7}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \neq \frac{7}{9} \end{cases}$$

$$7 - \sqrt{3x^2 + 3x + 7} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \neq \frac{7}{9} \end{cases}$$

$$7 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 7} \neq 3x^2 + 3x + 7 = 3x^2 = 8x + 2$$

$$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \neq \frac{7}{9} \end{cases}$$

$$-2\sqrt{3x^2 + 3x + 7} = -9x$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{\sqrt{12}}{6} + 1 \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \neq \frac{7}{9} \end{cases}$$

$$4(3x^2 + 3x + 7) = 81x$$

$$D = 69^2 - 4 \cdot 22 \cdot 4 = 4569$$

$$x_{2,1} = \frac{69 \pm \sqrt{4569}}{24}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{\sqrt{12}}{6} + 1 \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \neq \frac{7}{9} \end{cases}$$

$$12x^2 - 69x + 4 = 0$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{\sqrt{12}}{6} + 1 \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \neq \frac{7}{9} \\ x = \frac{69 + \sqrt{4569}}{24} \\ x = \frac{69 - \sqrt{4569}}{24} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{69 + \sqrt{4569}}{24}$

4. из 4

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

Заметим что каждая пара точек на плоскости может быть пара точек принадлежащих к 2 прямой
будет $y = -2x + 6$ или в этих 2 прямых
отличаются равно на 7. (любая 2 точка
на прямой так как если y их одинаковы
 y координаты то x y их отличаются
на 7 а следовательно $2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 7$
 $2 \cdot 7 + 0 = 14$, ну а если мы ищем по этой
прямой то с добавлением 2 y то число
увеличат на 7.) Значит количество
при этом В. Если нету нету на прямой
с осью xy . Значит количество
пар точек пар точек это количество
способов выбрать пару точек на
2 прямой умножить на число
способов выбрать пару прямых.

Всего внутри данного параллелограмма
10 пар точек прямой 4 или 11
выберем на 7 паре точек В по y
на где этого есть 13 или 14 способа
а на другой прямой для точек x
равно 13 или 14 точек, но если на
одной 13 точек то на другой будет
только 14 так как в отрезке
на 7 значит общее число способов
это: $14 \cdot 14 + 10 + 13 \cdot 13 = 20$

способов выбрать пары точек внутри
прямых
 ~~$14 \cdot 13 + 10 = 1820$ способов~~

Ответ: 1820 способов выбрать пару
АВ

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

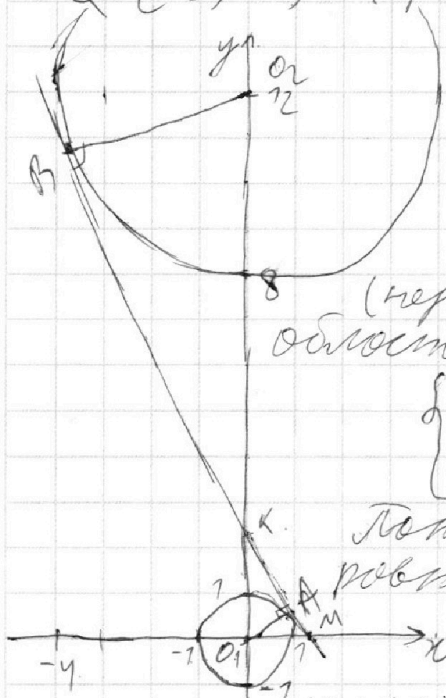
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$ оно верно в 2 кругах на координатной

плоскости x, y первый круг с центром в $(0, 0)$ и радиусом 1, а второй круг с центром в $(0, 12)$ и радиусом 4. Пусть обозначим с центром в $(0, 0)$ это Ω а с центром в $(0, 12)$ это Ω_2



$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

(неравенство выполняется в областях ограниченных Ω и Ω_2)

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Понятно что у этой системы ровно 2 решения когда прямая $y = -ax + 8b$ является

касательной к Ω и Ω_2

тогда: ~~какая эта система становится переменной~~

~~$$\begin{cases} y = -ax + 8b & \text{первая система} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y = -ax + 8b & \text{вторая система} \\ (y - 12)^2 + x^2 = 16 \end{cases}$$~~

у обеих этих систем дано всего по 1 решению решение их по аналогии. далее мы на обрыве. 5 из 9

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + ax^2 - 16abx + 64b = 1 \end{cases}$$

$$x^2(1+a) - 16abx + 64b - 1 = 0 \quad 256(ab+b-a-1)$$

$$D = 256a^2b^2 - 256(b-1)(1+a) = 256a^2b^2 - 256b - 256ab =$$

$$= 256a^2b^2 - 256b - 256ab - 256(ab+b-a-1)$$

так как у системы должно быть 1 решение

$$D = 0 \quad 256a^2b^2 - 256b - 256ab = 0 \quad a^2b^2 - ab - b + a + 1 = 0$$

$$a^2b^2 - b - ab = 0$$

$b = 0$ очевидно при $b = 0$ у этой системы

больше 1 решения

$$a^2b - a - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + (y-12)^2 = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{8b-y}{a} \\ \frac{64b^2 - 16by + y^2}{a^2} + y^2 - 24y + 144 = 16 \end{cases}$$

$D = 0$ так как у системы одно решение

$$y^2(1 + \frac{1}{a^2}) - y(\frac{16b}{a^2} + 24) + \frac{64b^2}{a^2} + 144 - 16 = 0$$

$$(\frac{16b}{a^2} + 24)^2 - 4(1 + \frac{1}{a^2})(\frac{64b^2}{a^2} + 128) = 0$$

$$\left(\frac{16b}{a^2} + 24\right)^2 = 4\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)\left(\frac{64b^2}{a^2} + 128\right)$$

$$a^2b^2 - ab - b + a + 1 = 0$$

$$a^2b^2 - ab - b + a + 1 = 0 \quad a^2b^2 - a(b-1) - b + 1 = 0$$

$$D = 16b^2 - 2b + 7 - 4b^2(-b+1)$$

Пусть эта касательная касается. Ответ

и Ω в Ω пусть O_1 - центр Ω и O_2 - центр Ω

$AO_1 = 4$ как радиус $BO_2 = 4$ как радиус

Пусть K - точка пересечения AB и O_1O_2

Пусть $O_2K = x$ тогда $O_1K = 12 - x$. (Площадь AO_1B)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\angle O_2 BK = 40$ (как между касательной и радиусом
к точке касания)

$\angle O_1 AK = 40$ (как между касательной и радиусом
к точке касания)

Из теоремы Пифагора укл. $\triangle O_2 BK \subset \triangle O_1 AK$.

$$AK^2 = (12-x)^2 - 7$$

$$BK^2 = x^2 - 16$$

Рассчитаем спелень точки к диаметру
 Ω .

$$BK^2 = (KO_2 - 4)(KO_2 + 4)$$

$\triangle BO_2 K$ подобен $\triangle KO_1 A$ ($\angle O_2 BK = \angle O_1 AK$
 $\angle BO_2 K = \angle KO_1 A$ как вертикальные.)

$$\frac{BO_2}{AO_1} = \frac{O_2 K}{O_1 K} \quad \frac{4}{7} = \frac{x}{12-x} \quad x = 4,8 - 4x$$

$$5x = 48 \quad x = 9,6 \text{ точки.}$$

координаты к это $(0, 2,4)$. Пусть это бы
прямая $y = -ax + 8b$ касаясь окружности
касательной к Ω и Ω она должна проходить через
 $(0, 2,4)$ и касаться 2 окружностей.

если $y = -ax + 8b$ касательная к Ω
система $\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет 1 решение.

$$x^2 + (8b - ax)^2 - 1 = 0 \quad \text{так как } y = -ax + 8b \text{ проходит}$$

$$\text{через } (0, 2,4) \text{ то } 2,4 = 8b \quad b = 0,3$$

$$x^2 + (8b - ax)^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 1 = 0$$

$$x^2(1+a^2) - 16abx + (64b^2 - 1) = 0$$

$D = 0$ т.к. у системы 1 решение

$$D = 256 a^2 b^2 - 4(1+a^2)(64b^2 - 1) = 0$$

$$64a^2b^2 = 64b^2 - 1 + 64a^2b^2 - a^2$$

$$64 \cdot 0,09 \cdot a^2 = 64 \cdot 0,9 - 1 + 64 \cdot 0,9 a^2 - a^2$$

$$a^2(64 \cdot 0,09 + 1 - 64 \cdot 0,9) = 64 \cdot 0,9 - 1$$

$$a^2 = \frac{64 \cdot 0,9 - 1}{64 \cdot 0,09 + 1 - 64 \cdot 0,9} \quad a^2 = \frac{64b^2 - 1}{64b^2 + 1 - 64b}$$

7 из 9

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда из теоремы Пифагора.

$$KA = 25 \quad KA^2 = 5,76 - 1 \quad KA = \sqrt{4,76}$$

ΔO_1AK падает ΔMO_1K (где K - точка пересечения AB с Ox). $\angle KO_1M = \angle O_1AK = 90^\circ$
($\angle O_1KM$ - общий)

$$\frac{O_1A}{MO_1} = \frac{OK}{O_1K} \quad \frac{1}{MO_1} = \frac{\sqrt{4,76}}{2,4} \quad MO_1 = \frac{2,4}{\sqrt{4,76}}$$

Угол наклона прямой $y = -ax + b$.
Угол наклона прямой AB равен $-a$. Также эта прямая будет перпендикулярна AB по условию с другой стороны угла наклона этой прямой. Это $\frac{O_1K}{O_1M}$.

$$-a = \frac{1 \cdot \sqrt{4,76}}{2,4} \quad a = -\frac{\sqrt{4,76}}{2,4}, \text{ но так}$$

как AB может быть перпендикулярна относительно Ox a может быть равно $\frac{\sqrt{4,76}}{2,4}$.

$$\text{Ответ: } a = \frac{\sqrt{4,76}}{2,4} \quad a = -\frac{\sqrt{4,76}}{2,4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

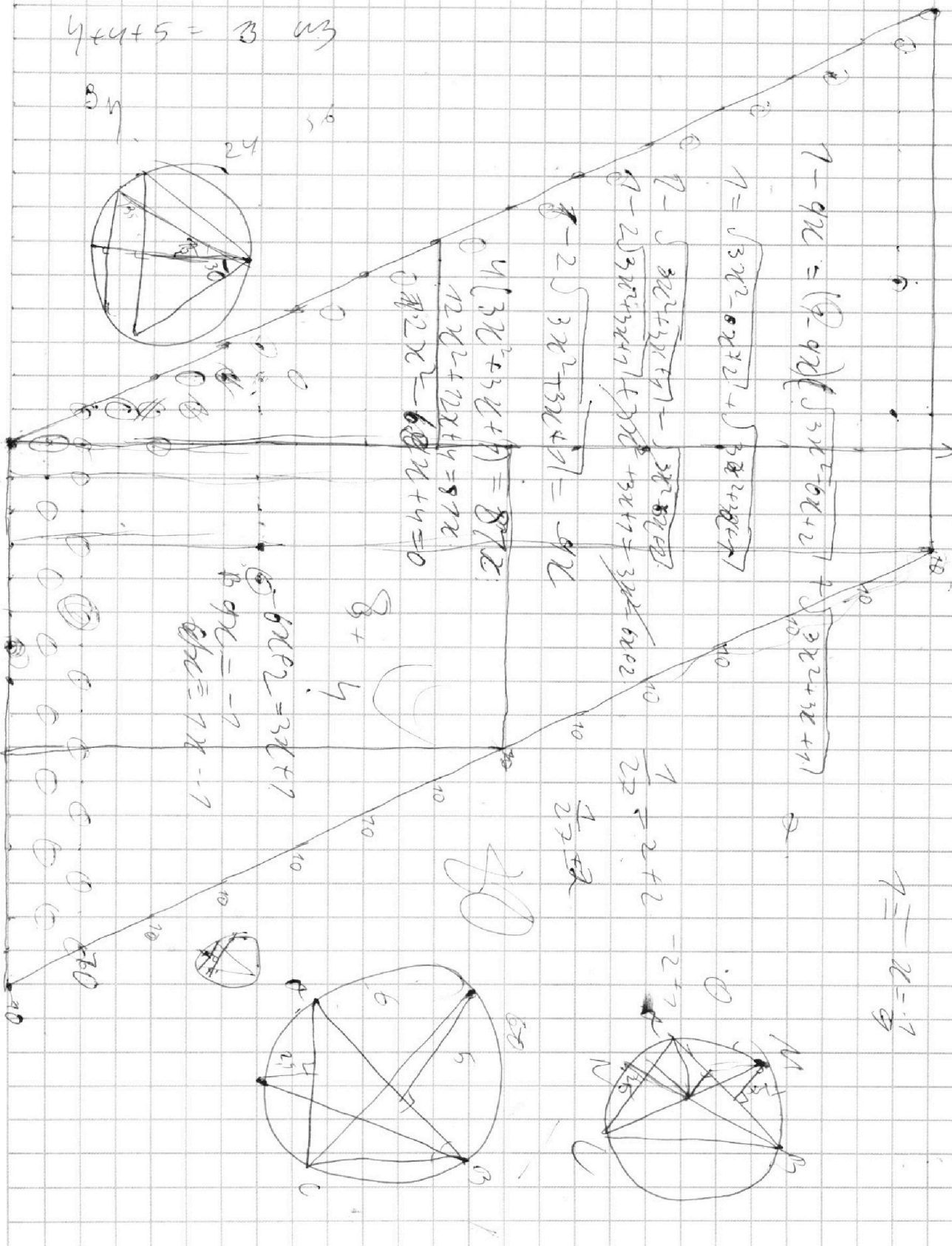
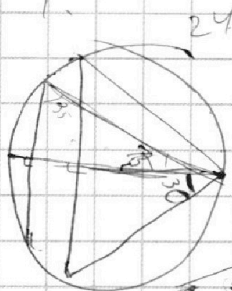
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4 + 4 + 5 = 13 \text{ шт}$$

34

56



$$4(3x^2 + 3x + 1) = 87x$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 87x$$

$$12x^2 - 60x + 4 = 0$$

$$1 - \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 3x + 1 = 3x^2 - 6x + 2$$

$$-2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = -9x$$

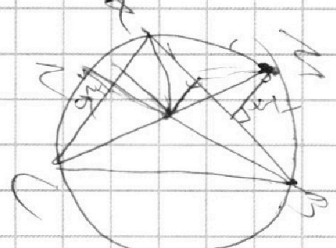
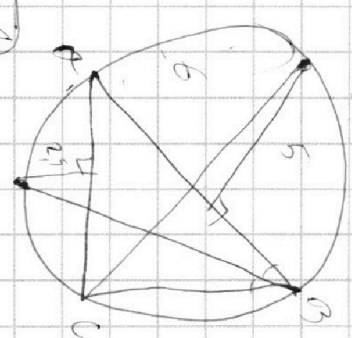
$$1 - 9x = (1 - 9x) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$6x^2 = 3x + 1$$

$$6x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$x = 1$$



$$1 = 2 = 2 + 2$$

$$-2 + 1 = 1$$

$$x = 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$4 \cdot 9x + 4y = 2\sqrt{x+1}$
 $-9x + 7 = \sqrt{9x^2 - 9x^2 - 9x^2 + 2} = 1 - 9x$
 $9x - 7 = 9x^2 - 9x^2 + 2 = 0$
 $74 \cdot (2\sqrt{x+1} - 7) = 98\sqrt{x+1} - 98 = 94x$

~~$6x^2 - 3x + 1 + 2 = 7 = 7 - 9x$~~

$1 - 9x = (1 - 9x) \sqrt{2\sqrt{x+1} - 2} = x$
 $3 \cdot 6 = 18$

$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$

$a+b = mk$
 $a^2 - 2ab + b^2 = nk$

$a+b = k$
 $ab = n$

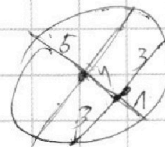
к.ч.н. -
в.д.ч.н.

$(a-b)^2 + 5ab =$

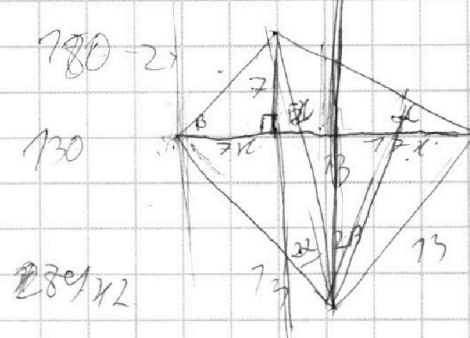
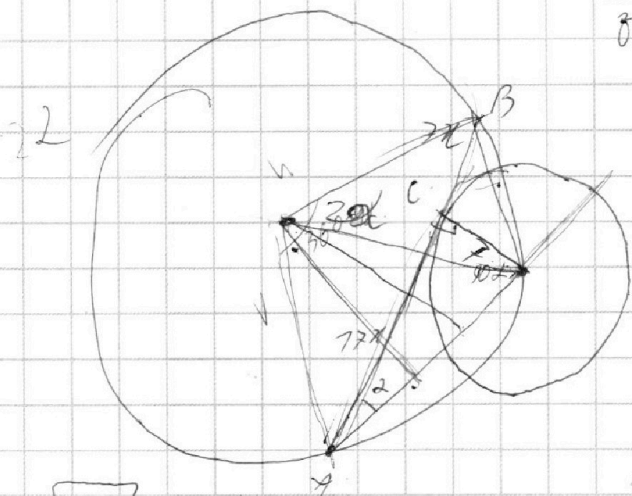
$\frac{k}{k^2 - 9n}$

$k^2 - 9n =$

$g \quad 9 \quad 8 \quad \frac{2}{7}$
 $22 - 23 \quad \frac{9}{87 - 9 \cdot 14} = \frac{9}{7}$



7.10



$2\sqrt{x+1} = x + 2$

$17x - 7x = 7x + 50$

$4x + 4 = x^2 + 2x + 4 \quad x = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{17}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{30}$$

$$a^2 b^2: 2^{30} \cdot 7^{58}$$

$$abc: 2^{28} \cdot 7^{29}$$

2

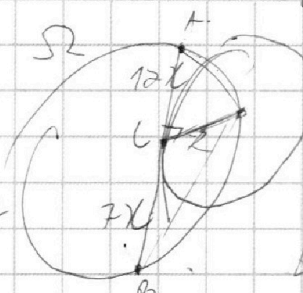
$$a+b=15$$

$$\frac{a}{8} = \frac{b}{8}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ 69 \\ \hline 627 \\ 419 \end{array}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

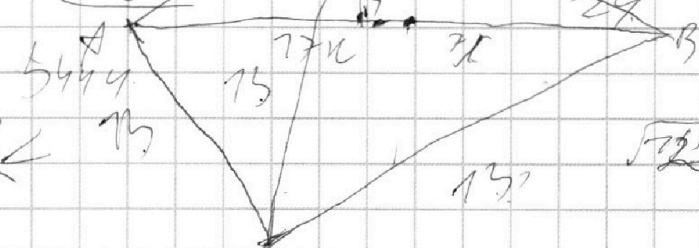
ac...



$$\begin{array}{r} 16 \\ 68 \\ 68 \\ \hline 544 \\ 408 \end{array}$$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 9x$$

$$12x^2 - 24x$$



$$\sqrt{3} \sqrt{3} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 7 - 9x$$

$$\sqrt{(\sqrt{3}x - \sqrt{3})^2 - 1} = \sqrt{(\sqrt{3}x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

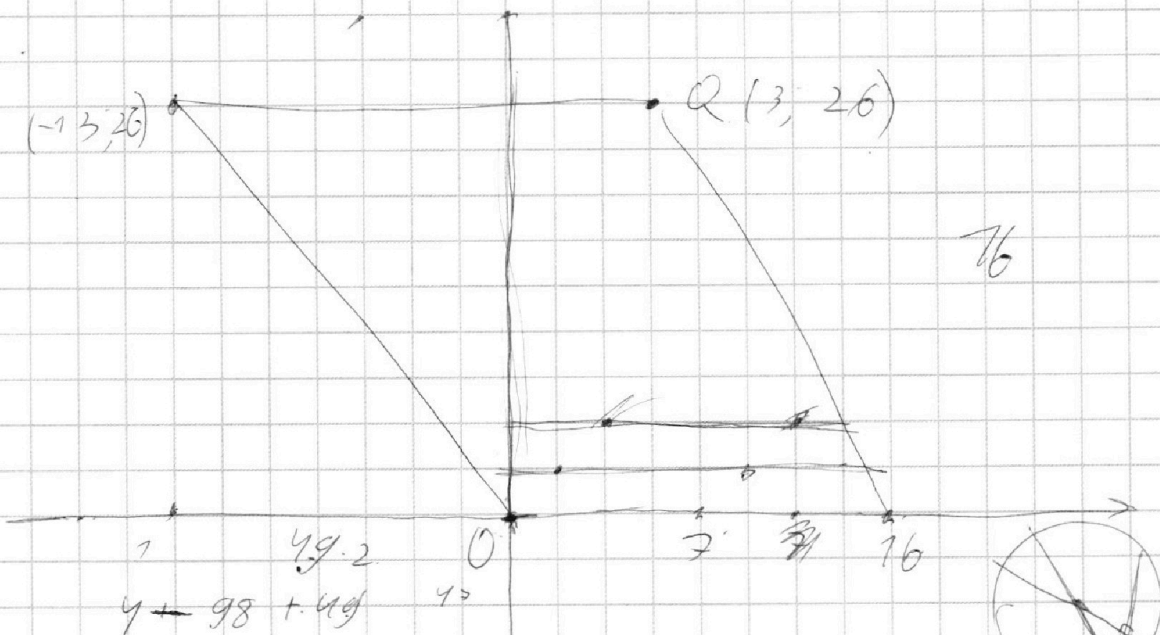
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2)$

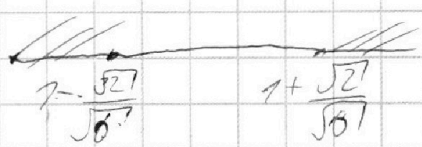
$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$

$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

$D = 36 - 24 = 12$

$\frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$



$3x^2 + 3x + 2 \geq 0$

$D = 9 - 12 = (3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 7) =$

$= 9x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 18x^3 - 18x^2 - 6x + 6x^2 + 6x + 2 =$

$= 9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

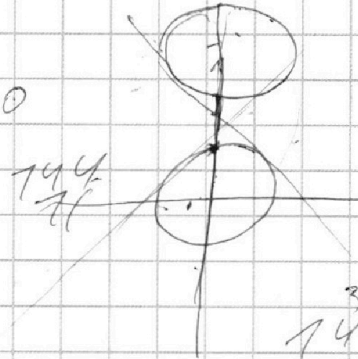


$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 24 \\ \hline 36 \\ 118 \end{array}$$

$$x^2 + (y-12)^2 = 16$$

$$x^2 + y^2 = 1$$



$$\begin{array}{r} 144 \\ 26 \\ \hline 170 \end{array}$$

$$ax + y - 8b = 0 \quad ax - 8b = y$$

$$64a^2b^2 = (ax + y - 8b)^2 \quad y = -ax + 8b$$

$$64a^2b^2 = 64b - 16ab + a^2x^2 + 64b^2 - 16ab + a^2x^2$$

$$64x^2 = 64b - 16ab + a^2x^2$$

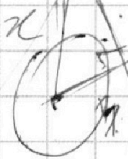
$$2,4 = 8b$$

$$b = 0,3$$

$$2,4 = 8b$$

$$b = 0,3$$

$$x = x$$



$$\begin{array}{l} (b-1)(1+a) \\ b+ab-1-a \\ ab+b-a-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 64 \\ \hline 78,2 \end{array}$$

$$\begin{cases} y = -ax + 2,4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 426 | 4 \\ 4 \quad 179 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 426 | 9 \\ 4 \quad 15 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$2 \sqrt{179}$$

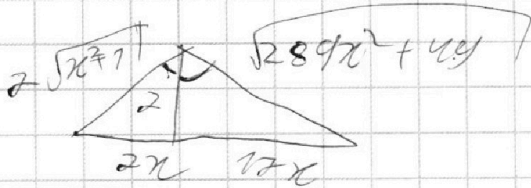
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 1 \\ 24 \\ 24 \\ \hline 48 \\ 570 \end{array}$$

$$526x^2 = 49x^2 + 49 + 289x^2 + 49 - 2 \cdot \sqrt{49x^2 + 49} \sqrt{289x^2 + 49} - 2$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 289 \\ \hline 289 \\ 49 \\ \hline 238 \end{array}$$

$$234x^2 = 98 - 2$$

$$60 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$2\sqrt{x^2+7} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+7}} = \frac{17x}{\sqrt{289x^2+49}} \cdot \frac{28}{289x^2}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+7}} \cdot \frac{7}{\sqrt{289x^2+49}} + \frac{4}{\sqrt{x^2+7}} \cdot \frac{17x}{\sqrt{289x^2+49}}$$

$$= \frac{24x}{\sqrt{x^2+7} \sqrt{289x^2+49}} = 2R$$

$$\sqrt{x^2+7} \sqrt{289x^2+49} = 26$$

$$(x^2+7)(289x^2+49) = 676$$

$$289x^4 + 49x^2 + 289x^2 + 49 = 676$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 289 \\ 8338 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$289t^2 + 338t = 627 \quad 338$$

$$\begin{array}{r} 627 \\ 51 \\ \hline 112 \end{array} \quad \begin{array}{r} 338 \\ -17 \\ \hline 168 \end{array} \quad \begin{array}{r} 34 \\ 17 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$1+x = -3$$

$$\begin{array}{r} 1520 \\ 120 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

