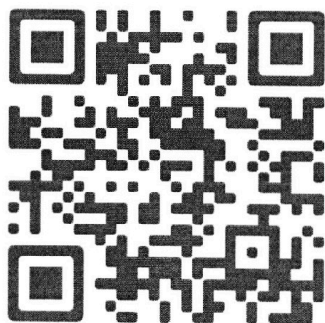




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

У чисел А: всего 3 варианта:

1111, 2222 ... 9999.

Заметим, что все они имеют вид: (какая-то цифра $\times 1111$)

Разберем число $1111 = 11 \cdot 101$, 101 - число простое.

Т.к. $(A \cdot B \cdot C)$ - квадрат какого-то натур. числа. Значит все простые множители должны содержаться в четной степени (2, 4...)

Т.е. в числах В или С должны содержаться простые множители 101

Т.к. С - кубический $\Rightarrow$ только в В

Ну а т.к. в В должны содержаться -6. То единственная возможность В - $606 = 101 \cdot 2 \cdot 3$.

Теперь разберем возможные варианты С, учитывая, что в С од. 3.

- | | |
|--|---|
| 1) 1111, 606 $\Rightarrow C = 66$ X | 2) 2222, 606 $\Rightarrow C = 33$ ✓ |
| 3) 3333, 606 $\Rightarrow C: 22, 88$ X X | 4) 4444, 606 $\Rightarrow C: 66$ X |
| 5) 5555, 606 $\Rightarrow C: X$ | 6) 6666, 606 $\Rightarrow C: 11, 44, 889$ X X X |
| 7) 7777, 606 $\Rightarrow C: X$ | 8) 8888, 606 $\Rightarrow C: 33$ ✓ |
| 9) 9999, 606 $\Rightarrow C: 66$ X | |

Ответ: $(2222, 606, 33); (8888, 606, 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy > 0$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{y+x+5}{xy}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x+2+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow \frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)} \quad // \quad y+x+5 > 0$$

$$xy = (x-2)(y+2) \Rightarrow xy = xy + 2x - 2y - 4 \quad | :2$$

$$0 = x - y - 2 \Rightarrow x - y = 2$$

$$(x-y)^3 = 8 \Rightarrow x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 8 \Rightarrow x^3 - y^3 = 8 + 3xy^2 - 3x^2y$$

$$x^3 - y^3 = 8 + 3xy(x-y)^2 \Rightarrow x^3 - y^3 = 8 + 6xy$$

$$x^3 - y^3 - 6xy = 8$$

Т.е. $M = 8$ - единств. возможн. значение

Ответ: 8.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi y - \pi x) = \cos(2\pi x) \Rightarrow \begin{cases} \pi y - \pi x = 2\pi x + 2\pi k \\ \pi y - \pi x = -2\pi x + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y - x = 2x + 2k \\ y - x = -2x + 2k \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x + 2k \quad (1) \\ y = -x + 2k \quad (2) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Т.е. можно-были или x, y не брать, если они удовлетворяют или 1, или 2 условию, то условие выполняется (первое условие)

$$b) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

Где можно сказать: $|x| \leq 6$ и $|y| \leq 2$

Будем перебирать по (1) и (2) все возможные пары целых чисел, которые будут удовлетворять условию (2)

$$(1) (0; 0) (0; 2) (0; -2) (1; 1) (1; -1) (2; 2) (2; 0) (2; -2) (3; 1) (3; -1) (4; 2) (4; 0) (4; -2) (5; 1) (5; -1) (6; 2) (6; 0) (6; -2) (-1; 1) (-1; -1)$$

$$(2) (-2; 1) (-2; 0) (-2; -2) \dots (-6; 2) (-6; 0) (-6; -2)$$

$$(2) (0; 0) (0; 2) (0; -2) (1; 1) (1; -1) (2; 2) (2; 0) (2; -2)$$

... пары такие же, как и в 1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По сути нам легко найти такие пары, что $(\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2}) = \pi$

и используем их из общего по-во, потому что $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$

$$\arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ при } x = 6 \quad \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ при } y = 2$$

Т.е. существуют пары, но подсчитаем про (6; 2)

Ну а про все пары (ни все четные от -6 до 6, кроме 6, ни все нечетные от -6 до 6)

четных x от -6 до 6 (учит. 0): 7.

нечетных x от -6 до 6: 6

$$\text{Итого: } 7 \cdot 3 - 1 + 6 \cdot 2 = \underline{\underline{32}}$$

Ответ: 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получим одну и ту же вероятность попадания на концерт и Петя, и Вася

Пусть x - кол-во билетов N - кол-во мест

$P(A)$ - Петя купил B - Вася купил

$$P(A) = \frac{x}{N} \quad P(B) = \frac{x}{N}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{x-1}{N-1} \cdot \frac{x}{N}}{\frac{x}{N}} = \frac{x-1}{N-1}$$

- вероятность того, что купит Вася при усл. что купил Петя

Из а priori исходная есть произв A и B и $A|B$

$$\frac{x}{N} \cdot \frac{x-1}{N-1}$$

Теперь x найдем условиями:

	Было	x	N
Петя	4	x	n
Вася	1	t	n

$$6 \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} = \frac{t}{n} \cdot \frac{t-1}{n-1}$$

$$t^2 - t = 72 \Rightarrow t^2 - t - 72 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} t_1 = 9 \\ t_2 = -8 \end{matrix}$$

Значит Ответ: 9

- кол-во билетов отнял без копейки.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



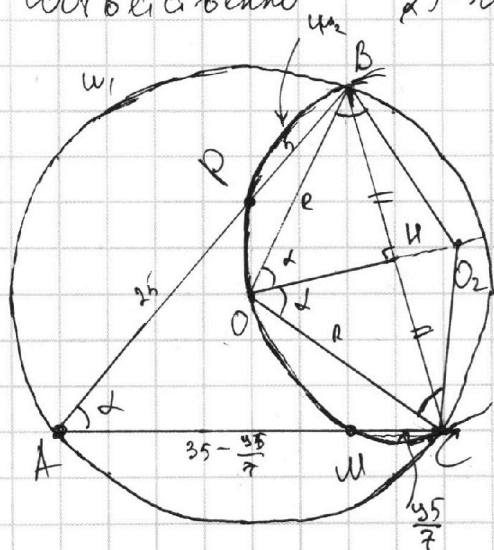
Приним, чем чернить. Считаем, что u_2 дотик перпендикуляр AC .

Потому что, если $\angle OAC$ в u_2 проекции и посчитаем, то

$$25 \cdot 30 = 35^2 \text{ или } 25 \cdot 30 = 35 \cdot (35 + x) \text{ где } x \text{ — искомое}$$

$$\text{Соответственно } 25 \cdot 30 = 35 \cdot (35 + x) \Rightarrow 150 = 245 + 7x$$

$$x = \frac{95}{7}$$



1. $\triangle BOC$ — $\triangle$ $BO=OC=R$

— Тогда центр окружности около BOC лежит на OH — биссектрисе/высоте

2. $\angle BAC$ — впис., опирается на $\cup BC$

$\angle BOC$ — центр. опирается на $\cup BC$

Тогда если $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOH = \angle HOC = \alpha$

3. Пусть O_2 — центр u_2 и $O_2B = O_2O = O_2C = r$

$\triangle OO_2B$ — $\triangle$ $\Rightarrow \angle O_2OB = \angle O_2BO = \alpha = \angle OCO_2$

4. Тогда $R = 2r \cdot \cos \alpha$, тогда $R = \frac{BC}{2 \sin \alpha}$

$$BC = 30^2 + 35^2 - 2 \cdot 30 \cdot 35 \cdot \cos \alpha$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 169 & (2) \end{cases}$$

— круг с центром $(0; 0)$ и радиусом 13

Поработаем с (1)

~~Ищем это уравнение~~ $x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$ $y = 5\sqrt{2} \sin \alpha$

По сути это можно переписать так

$$\begin{cases} x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$$

Смешиваю

Можно заметить, что по сути r — это задается углом α . То есть "перемещается" по окружности $r = 5\sqrt{2} / 8 > 5\sqrt{2} > 7$

Теперь построим всю нашу систему и посмотрим, как меняется $P(\alpha)$ в зависимости от α

Рисунок на спец. странице

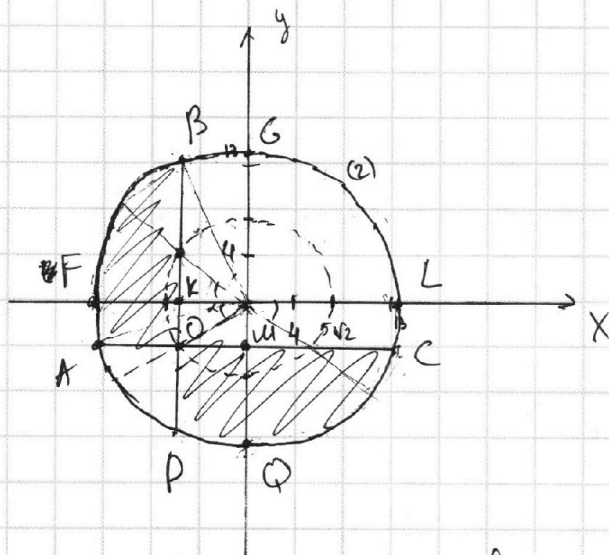


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

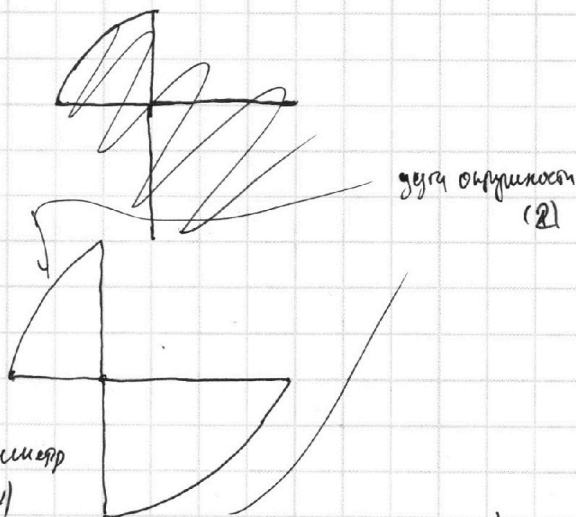
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Очевидно, что $\varphi(x)$ будет возрастать
или-то так



дуга окружности
(2)

Нам нужно максимизировать пример $\varphi(x)$
т.е. иметь круговое симметрию, то дуга будет 4 дуги $(0; 2\pi)$ с
Положим радиуси сирот дуге $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ ^{назовем} $\rightarrow$ дуга ^{только до} $\frac{\pi}{2}$ между ними
и все дуги будут дуги $\alpha \cos + \frac{\pi}{2} \cdot n, n \in \mathbb{Z}$

P- пример $\varphi(x)$

$$BK = KP = \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} \quad AM = MC = \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$BP = 2 \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} \quad AC = 2 \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$\cup AF = \cup LC, \quad \cup BG = \cup PQ$$

$$\text{Тогда } \cup AB + \cup PC = \cup AF + \cup FB + \cup PQ + \cup QC =$$

$$= \cup FB + \cup BG + \cup QC + \cup CL = \cup FG + \cup QL = \pi \cdot 13.$$

Примечание: замечим, что значения не зависят от α .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тоже } P = 13 \cdot \pi + 2 \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} + 2 \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$\text{Находим } P'(\alpha) = 2 \frac{-100 \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha)}{\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}} + 2 \frac{-100 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}} = 0$$

$$\frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}}$$

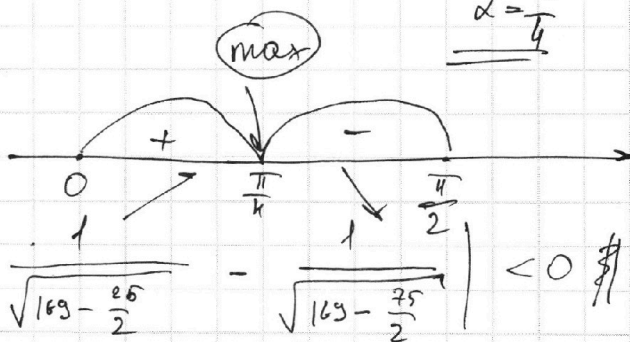
$$\sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}} \right) = 0 \Rightarrow \alpha = \left\{ 0, \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}} \Rightarrow 169 - 50 \cos^2 \alpha = 169 - 50 \sin^2 \alpha$$

$$0 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Тоже } M = 13\pi + 4$$



$$P'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{169 - \frac{25}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{169 - \frac{75}{2}}} \right) < 0$$

у нас упрости знак < => если упрости >

$$\text{Тоже } M = 13 \cdot \pi + 4 \cdot \sqrt{169 - 50 \cdot \frac{1}{2}} = 13 \cdot \pi + 4 \cdot 12 = 48 + 13\pi$$

$$\text{при } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n, n \in \mathbb{Z}$$

от вет.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

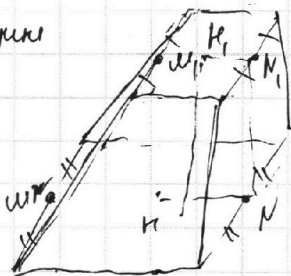
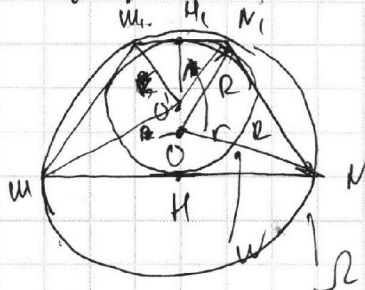
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Шар, который касается всех граней — вписанный.

Разберемся с шаром, который касается всех ребер. Он тоже получается вписанным и касается всех ребер верхнего и нижнего оснований по окружности

Угловое сечение

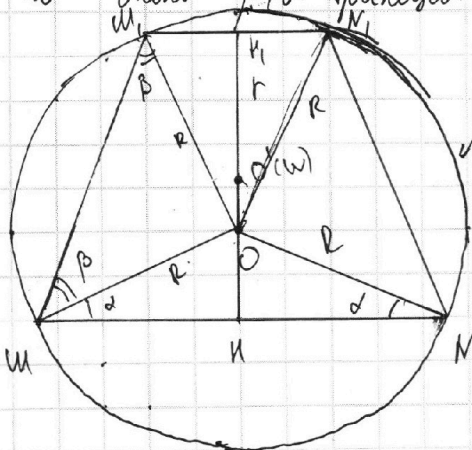


По сути у нас $\triangle O M_1 N_1$ около которого можно описать окружность и в которую можно вписать окружность

$$S_{\text{верх}} = M_1 N_1^2$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{M_1 N_1 + M_1 N}{2} \cdot \sqrt{4r^2 + (M_1 N - M_1 N_1)^2}$$

Но около $\triangle O M_1 N_1$ можно описать окружность



$$\angle O M_1 N_1 = (180 - \beta - \alpha) - \beta$$

$$O M_1 = O N_1 = r$$

$$O M = O N = O M_1 = O N_1 = R$$

Если мы найдем $\frac{R}{r}$, то задача будет решена



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A: 1111, 2222, 3333, 4444... 9999

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \times 11 \\ \hline 1111 \\ 1111 \\ \hline 12221 \end{array}$$

$$(1 \cdot 101) =$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 3 \\ \hline 111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60614 \\ 55 \overline{) 350} \\ \underline{55} \\ 05 \\ \underline{05} \\ 100 \end{array}$$

$$1111 = 11 \cdot 101 \cdot 1$$

$$2222 = (11 \cdot 101) \cdot 2$$

$$1111, 101, 202, 303, 404, 505, (606), 707, 808, 909$$

$$606 = 2 \cdot 303 = 2 \cdot 3 \cdot 101$$

$$11 \cdot 101, 2 \cdot 3 \cdot 101$$

$$1111, 606, 66$$

$$2222, 606, 33$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy - ?$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$xy = (x-2)(y+2)$$

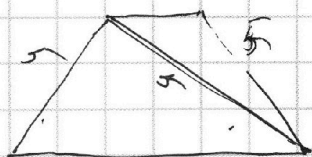
$$0 = xy = xy + 2x - 2y - 4$$

$$x - y - 2 = 0$$

$$(x-y) = 2$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 8$$

$$x^3 - y^3 = 8 + 3xy(x-y)$$



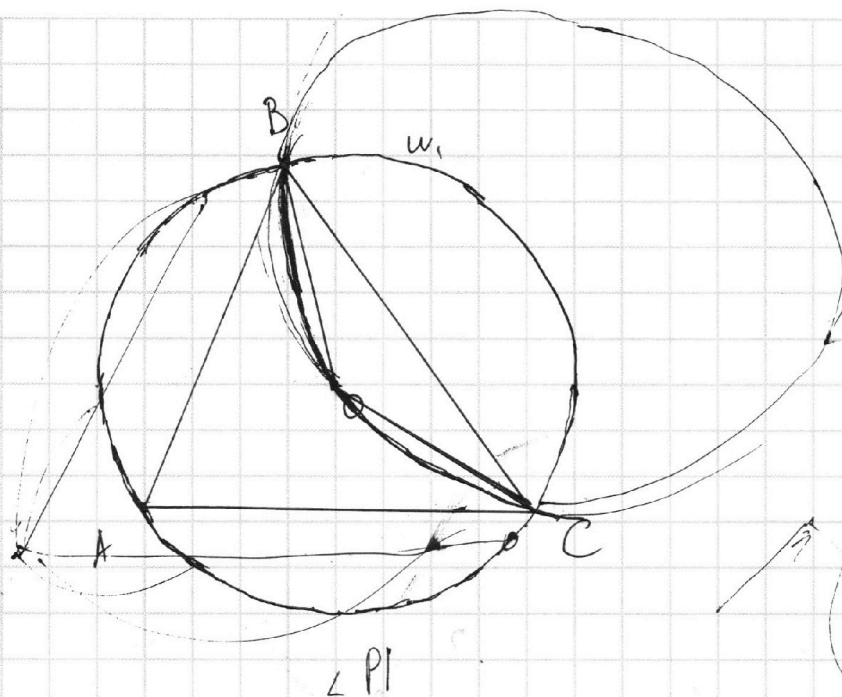


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AP = 25 \quad PB = 5$$

$$AC = 35$$

$$S_{ABC} = ?$$

$$\frac{210}{35}$$

$$\sin \alpha = \frac{35}{245} \quad 25 \cdot 30 = 35$$

$$25 \cdot 30 =$$

$$25 \cdot 30 = (35 - x) \cdot \frac{7}{35}$$

$$150 = 245 - 7x$$

$$7x = 95 \quad x = \frac{95}{7}$$

$$90 - (180 - 2\alpha) = 2\alpha - 90 + 90\alpha = \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{BK}{R}$$

$$\sin (180 - 2\alpha) = \frac{BA}{r} = \frac{7}{35} \sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$$

$$r^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cdot \cos \alpha \quad (R = 2r \cos \alpha)$$

$$2\alpha + \frac{90}{2} + 90 - 2 = 90\alpha + \frac{BB_2B}{R} = 186 \approx 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle \alpha + \angle POB + \cancel{90^\circ} + \angle PBO = 180^\circ$$

$$\alpha + \angle POB + \angle BPO = 180^\circ$$

$$R = 2r \cos \alpha$$

$$R^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos(180 - 2\alpha)$$

$$R^2 = r^2 + r^2 + 2r^2 \cos 2\alpha$$

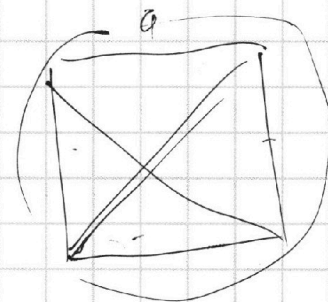
$$4r^2 \cos^2 \alpha = 2r^2$$

$$\cancel{r \cdot BC} = \cancel{r \cdot r} + \cancel{r \cdot r}$$

$$r^2 + BC^2 = 2r^2$$

$$\cancel{OK^2} = R^2 = OK^2 + BK^2 = OA^2 + KC^2$$

$$\cancel{25 \cdot 30 = 35^2}$$

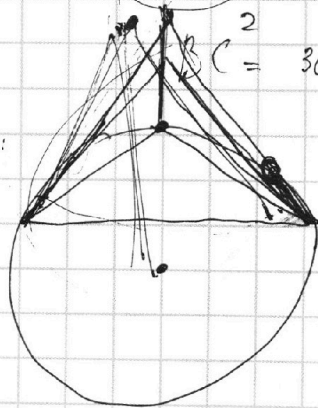


$$\left(R \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$\frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$

$$R \cdot r \cdot \sqrt{3} = \cancel{r} \cdot BC$$

$$\begin{aligned} a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} &= a \cdot a + a \cdot a \\ (a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2 &= a^2 \end{aligned}$$



$$BC^2 = 30^2 + 35^2 - 2 \cdot 30 \cdot 35 \cdot \cos \alpha$$

$$R \cdot PC = 5 \cdot R + PO \cdot BC$$

$$BC \cdot R = \frac{95}{7} R + OM \cdot BC$$

$$PO \cdot BC = \dots$$

$$BC \cdot \dots$$

$$BC = 2 \cdot R \cdot \sin \alpha$$

$$\cancel{BC = 2}$$

$$S = \frac{4a^2}{4R}$$

$$R = \frac{BC}{2 \sin \alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \text{ а) } (\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi y - \pi x) = \cos(2\pi x) \Rightarrow \pi y - \pi x = 2\pi x$$

$$\pi y - \pi x = 2\pi x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\pi y - \pi x = -2\pi x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y - x = 2x + 2n$$

$$y - x = -2x + 2n$$

$$y = 3x + 2n$$

$$y = -x + 2n$$

$$p_0 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{(x-1)}$$

$$\frac{2}{x} \cdot \frac{y-1}{y-1}$$

$$12 = y(y-1)$$

$$y^2 - y - 12 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 12}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$\frac{17}{12} = \frac{17}{12}$$

$$\frac{x}{n}$$

$$\frac{x}{n}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$$\frac{\frac{x-1}{h-1} \cdot \frac{x}{h}}{\frac{x}{h}}$$