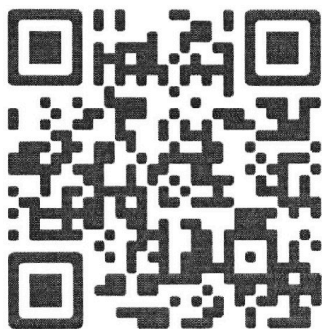




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101, a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

П.к. $A \cdot B \cdot C$ явл-ся квадратом натур. числа, то любой простой множитель входит в произведение $A \cdot B \cdot C$ в четной степени.

Тогда простой множитель 101 числа A входит еще в какое-то из чисел B и C , но C -двузнач., значит, $B = 101 \cdot b, b \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

По ум-ю хотя бы 1 цифра числа B - это 7, значит, $b = 7$, а $B = 707$.

Аналогично, простой множитель 11 числа A входит в число C : $C = 11 \cdot c, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

По ум-ю хотя бы 1 цифра числа C - это 1, значит, $c = 1$, а $C = 11$.

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7$$

Значит, $a = 7$.

Ответ: $(7777; 707; 11)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$x, y > 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}, \quad x \neq 4$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)}, \quad y+x+3 > 0$$

$$xy = (x-4)(y+4)$$

$$\cancel{xy} = \cancel{xy} + 4x - 4y - 16$$

$$4x - 4y = 16$$

$$x - y = 4$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = \\ &= 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy = 4x^2 - 8xy + 4y^2 = \\ &= 4(x^2 - 2xy + y^2) = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 16 = 64 \end{aligned}$$

Ответ: 64.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y + \cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y = 0$$

$$\cos(\pi x - \pi y) + \cos(2\pi y) = 0$$

$$2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - 3\pi y}{2} = 0$$

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$

или

$$\cos \frac{\pi x - 3\pi y}{2} = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x + \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 1 + 2k - x, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi x - 3\pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x - 3\pi y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x - 3y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3y = x - 1 - 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = \frac{x - 1 - 2n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(x; 1 + 2k - x), k \in \mathbb{Z};$

$(x; \frac{x - 1 - 2n}{3}), n \in \mathbb{Z}.$

$$8) \arccos \frac{x}{7} - \operatorname{arcsinh} \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{7} \geq -1 \\ \frac{x}{7} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x \leq 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y}{4} \geq -1 \\ \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -4 \\ y \leq 4 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\underbrace{\arccos \frac{x}{7}}_{[0; \pi]} > \underbrace{-\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{y}{4}}_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}$$

Неравенство верно для всех x, y , удовлетв. ОДЗ, кроме случаев, когда левая и правая части равны 0.

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} \neq 0 \\ -\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{y}{4} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{7} \neq 1 \\ \arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 7 \\ \frac{y}{4} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 7 \\ y \neq 4 \end{cases}$$

1) Рассмотрим реш-я вида $(x; 1+2k-x), k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} 1+2k-x \geq -4 \\ 1+2k-x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k \geq x-5 \\ 2k \leq x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{x-5}{2} \\ k \leq \frac{x+3}{2} \end{cases}$$

$x = -7$:

1) Рассмотрим реш-я $x+y=1+2k, k \in \mathbb{Z}$
 $x=1+2k-y, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} 1+2k-y \geq -7 \\ 1+2k-y \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k \geq y-8 \\ 2k \leq y+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{y-8}{2} \\ k \leq \frac{y+6}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$y = -4$:	$-6 \leq k \leq 1$	- 8 реш-й
$y = -3$:	$-5 \leq k \leq 1$	- 7 реш-й
$y = -2$:	$-5 \leq k \leq 2$	- 8 реш-й
$y = -1$:	$-4 \leq k \leq 2$	- 7 реш-й
$y = 0$:	$-4 \leq k \leq 3$	- 8 реш-й
$y = 1$:	$-3 \leq k \leq 3$	- 7 реш-й



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 y=2: & \quad -3 \leq k \leq 4 & - 8 \text{ рещ-й} \\
 y=3: & \quad -2 \leq k \leq 4 & - 7 \text{ рещ-й} \\
 y=4: & \quad -2 \leq k \leq 5 & - 7 \text{ рещ-й} \quad (y=4, x=7 - \text{не уф.})
 \end{aligned}$$

2) Рассм-м рещ-й

$$\begin{aligned}
 x-3y &= 1+2n, n \in \mathbb{Z} \\
 x &= 1+2n+3y, n \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1+2n+3y \geq -7 \\ 1+2n+3y \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n \geq -3y-8 \\ n \leq -3y+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq \frac{-3y-8}{2} \\ n \leq \frac{-3y+6}{2} \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
 y=-4: & \quad 2 \leq n \leq 9 & - 8 \text{ рещ-й} \\
 y=-3: & \quad 1 \leq n \leq 7 & - 7 \text{ рещ-й} \\
 y=-2: & \quad -1 \leq n \leq 6 & - 8 \text{ рещ-й} \\
 y=-1: & \quad -2 \leq n \leq 4 & - 7 \text{ рещ-й} \\
 y=0: & \quad -4 \leq n \leq 3 & - 8 \text{ рещ-й} \\
 y=1: & \quad -5 \leq n \leq 1 & - 7 \text{ рещ-й} \\
 y=2: & \quad -7 \leq n \leq 0 & - 8 \text{ рещ-й} \\
 y=3: & \quad -8 \leq n \leq -2 & - 7 \text{ рещ-й} \\
 y=4: & \quad -10 \leq n \leq -3 & - 7 \text{ рещ-й} \quad (y=4, x=7 - \text{не уф.})
 \end{aligned}$$

Итого всего рещ-й:

$$\begin{aligned}
 & (8+7) \cdot 4 + 7 + (8+7) \cdot 4 + 7 = \\
 & = 15 \cdot 8 + 14 = 134
 \end{aligned}$$

Ответ: 134.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☒ 4

☐ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
1 из 2.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Пусть n - кол-во одноклассников,
 x - кол-во билетов в конце месяца.

1) Начало месяца.

Всего способов выбрать 4 учеников на концерт:

$$C_n^4.$$

Из них благоприятные те случаи, в к-х
Петя и Вова вместе пойдут на концерт,
их: C_{n-2}^2

Рассматривая благоприятные случаи. Петя и
Вова получили билеты, к ним осталось
выбрать еще двоих учеников из оставшихся,
способов сделать это: C_{n-2}^2 .

Тогда вер-то, что Петя и Вова вместе
пойдут на концерт:

$$P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = \frac{(n-2)! \cdot 4!}{2! \cdot n!} = \frac{3 \cdot 4}{n(n-1)} = \frac{12}{n(n-1)}.$$

2) Конец месяца.

Всего способов выбрать учеников на концерт:

$$C_n^x.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Безусловно, билетов : C_{n-2}^{x-2} (к Петю и Васю выбрали ещё $x-2$ человека из оставшихся).

Почему вер-ть, что Петю и Васю вместе идут на концерт, равна : $P_2 = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$

$$= \frac{\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}}{\frac{n!}{x!(n-x)!}} = \frac{(n-2)! \cdot x!}{(x-2)! \cdot n!} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

3) По условию $11P_1 = P_2$.

$$\frac{11 \cdot 12}{n(n-1)} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}, \quad n > 2$$

$$11 \cdot 12 = x(x-1)$$

$$x^2 - x - 11 \cdot 12 = 0$$

$$x = \left[\frac{-11 \pm \sqrt{11^2 + 4 \cdot 11 \cdot 12}}{2} \right] \text{ — не ур. } x > 0$$

Значит, в конце месяца выданы 12 билетов
всего.

Ответ: 12.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

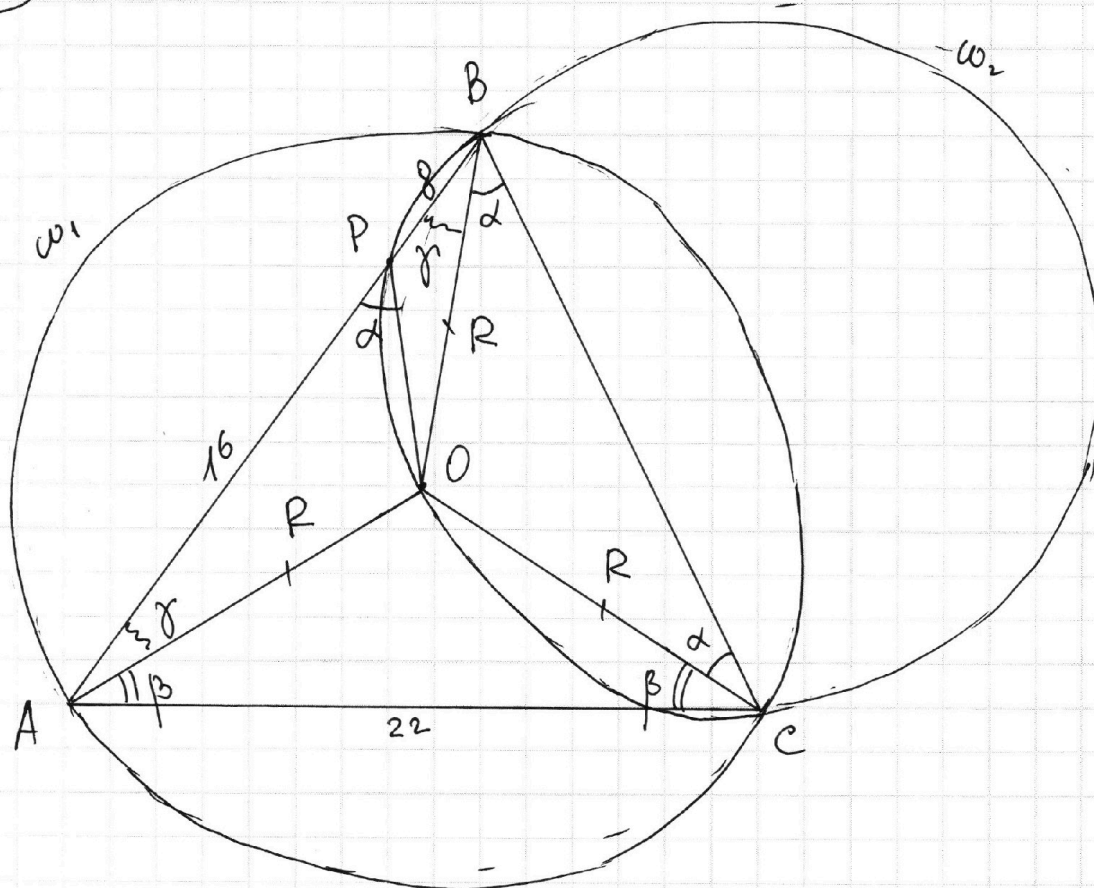
7
☐

СТРАНИЦА

1 из 2.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.



1) $OA = OB = OC = R$ (как радиусы окр-ты ω_1).

2) $\angle OBC = \angle OCB = \alpha$, $\angle OAC = \angle OCA = \beta$, $\angle BAO = \angle ABO = \gamma$.

3) $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

4) $OPBC$ - впис. в окр-ту $\omega_2 \Rightarrow \angle APO = \angle OCB = \alpha$.

5) Т-ма синусов для $\triangle AOP$: $\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{16}{\sin(\pi - \alpha - \gamma)}$ $\Leftrightarrow$

$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{16}{\sin(\alpha + \gamma)} \Rightarrow R \sin(\alpha + \gamma) = 16 \sin \alpha$.

6) Т-ма синусов для $\triangle ABC$: $\frac{22}{\sin(\alpha + \gamma)} = 2R \Rightarrow$
 $\Rightarrow R \sin(\alpha + \gamma) = 11$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА
2 из 2.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$7) \begin{aligned} R \sin(\alpha + \gamma) &= 16 \sin \alpha \Rightarrow 16 \sin \alpha = 11 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{11}{16} \\ R \sin(\alpha + \gamma) &= 11 \end{aligned}$$

$$8) \alpha < 90^\circ: \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{11^2}{16^2}} = \\ = \sqrt{\frac{(16-11)(16+11)}{16^2}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 27}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$9) S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\beta + \gamma) = \frac{1}{2} \cdot (16+8) \cdot 22 \cdot \\ \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 24 \cdot 22 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha = \overset{38}{24} \cdot 11 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{\overset{16}{16} \cdot 2} = \\ = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{99\sqrt{15}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 из 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N6.)

$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

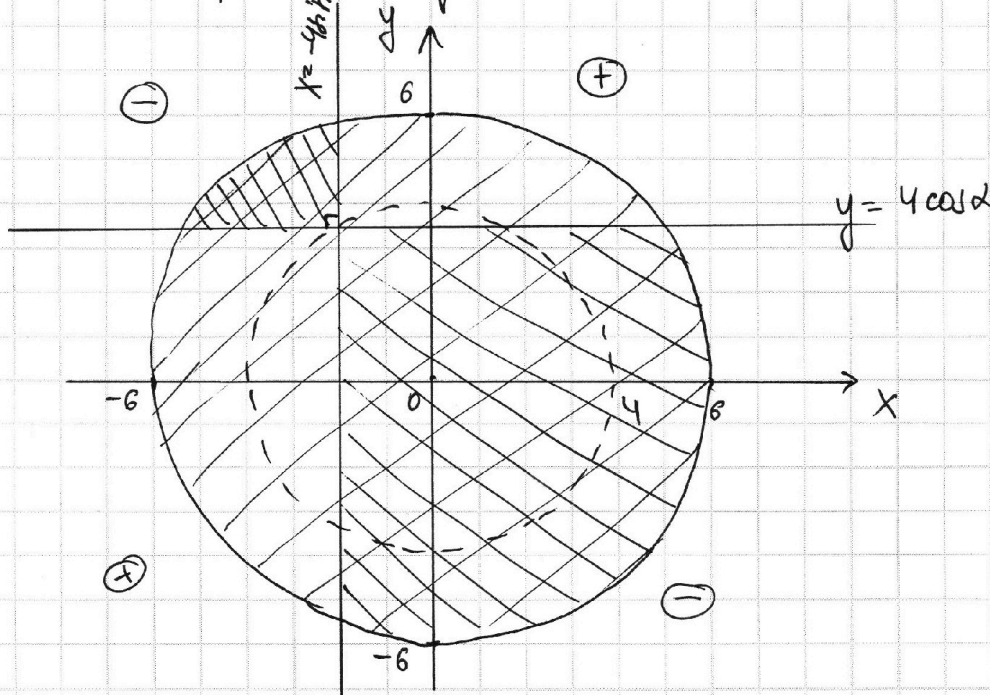
Второе ур-е задает круг с центром в начале координат и радиусом 6.

Чтобы найти мн-во удовлетв. первому ур-ю, воспользуемся методом областей:

$$\begin{aligned} x &= -4\sin\alpha && \text{— прямая паралл. оси } Oy \\ y &= 4\cos\alpha && \text{— прямая паралл. оси } Ox \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= 16\sin^2\alpha \\ y^2 &= 16\cos^2\alpha \end{aligned} \quad (+) \Rightarrow \quad x^2+y^2 = 16 \quad \text{— окр-ть, с центром в начале координат и радиусом 4.}$$

Прямые $x = -4\sin\alpha$ и $y = 4\cos\alpha$ пересекаются на окр-ти $x^2+y^2 = 16$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
2 из 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = 6\pi + 2\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha} + 2\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} \quad \textcircled{=}$$

↑
длина
дуг окруж-ти
 $\in \mathcal{P}(\alpha) =$
= половина
длины окруж-ти

↑
длина
прямой
 $y = 4\cos\alpha \in \mathcal{P}(\alpha)$

↑
длина
прямой
 $x = -4\sin\alpha \in \mathcal{P}(\alpha)$

$$\textcircled{=} 6\pi + 4\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + 4\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} \neq$$

$$= 6\pi + \frac{4}{3}\sqrt{1 - \frac{4}{9}\cos^2\alpha} + \frac{4}{3}\sqrt{1 - \frac{4}{9}\sin^2\alpha}$$

$$M' = \frac{4^2}{3 \cdot 2\sqrt{1 - \frac{4}{9}\cos^2\alpha}} \cdot \left(+\frac{4}{3} \cdot 2\cos\alpha\right) \cdot (+\sin\alpha) +$$

$$+ \frac{4^2}{3 \cdot 2\sqrt{1 - \frac{4}{9}\sin^2\alpha}} \cdot \left(-\frac{4}{3} \cdot 2\sin\alpha\right) \cdot (\cos\alpha) =$$

$$= \frac{16\cos\alpha\sin\alpha}{27} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9}\cos^2\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9}\sin^2\alpha}} \right) = 0$$

$$M' = \frac{4^2}{2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}} \cdot (+4 \cdot 2\cos\alpha) \cdot (+\sin\alpha) +$$

$$+ \frac{4^2}{2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}} \cdot (-4 \cdot 2\sin\alpha) \cdot (\cos\alpha) =$$

$$= \frac{16\sin\alpha\cos\alpha}{27} \left(\frac{1}{\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}} \right) = 0$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$\sin 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \text{или } 9 - 4\cos^2\alpha = 9 - 4\sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

$$\tan^2\alpha = 1$$

$$\tan\alpha = 1$$

$$\tan\alpha = -1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА
3 из 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \alpha = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$M = 6\pi + 2 \cdot 6 + 2\sqrt{20} = \\ = 6\pi + 12 + 4\sqrt{5}$$

$$2) \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi h, h \in \mathbb{Z}$$

$$M = 6\pi + 4\sqrt{36 - 16 \cdot \frac{1}{2}} = 6\pi + 4\sqrt{36 - 8} = \\ = 6\pi + 4\sqrt{28} = 6\pi + 8\sqrt{7}$$

$$6\pi + 12 + 4\sqrt{5} < 8\sqrt{7} + 6\pi$$

$$12 + 4\sqrt{5} < 8\sqrt{7}$$

$$3 + \sqrt{5} < 2\sqrt{7}$$

$$M_{\max} = 6\pi + 8\sqrt{7} \text{ при } \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } 6\pi + 8\sqrt{7} \text{ при } \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaaa} = a \cdot 11111 = 2 \cdot 11 \cdot 101$$

$$B = 101 \cdot 6 = 707$$

$$C = 11 \cdot 6 = 11$$

$$ABC = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 6 \cdot 7$$

$$\begin{array}{l} a=1 \\ a=7 \\ a=9 \\ a=4 \end{array} \quad \begin{array}{l} b=7 \\ c=1 \\ c=7 \\ c= \end{array}$$

$$a=7$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{x^2 y^2} = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)^2 (y+4)}$$

$$x \neq 4$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$xy = (x-4)(y+4)$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$4x - 4y = 16$$

$$x - y = 4$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy =$$

$$= 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy = 4x^2 + 4y^2 - 8xy =$$

$$= 4(x^2 - 2xy + y^2) = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 16 = 64$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{)11} \\ 101 \overline{)101} \\ 1 \end{array}$$

$$ABC = 7 \cdot 101 \cdot 7^2$$

$$\begin{array}{r} \times 101 \\ 11 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$$

$$- \cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi x - \pi y) + \cos 2\pi y = 0$$

$$2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - 3\pi y}{2} = 0$$

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$

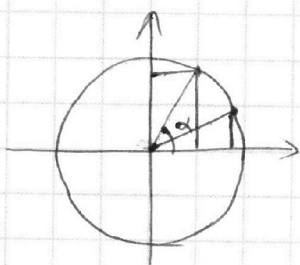
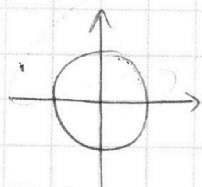
$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

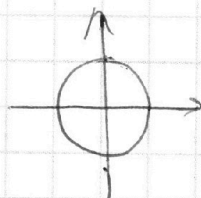
$$x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = 1 + 2k$$

$$y = 1 + 2k - x$$



$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$



$$\frac{\pi x - 3\pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x - 3y = 1 + 2k$$

$$x - 3y = 1 + 2k$$

$$3y = x - 1 - 2k$$

$$y = \frac{x - 1 - 2k}{3}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 0 + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{R}{\sin \gamma} = \frac{24}{\sin 2\gamma}$$

$$\frac{R}{\sin \gamma} = \frac{24}{2 \sin \gamma \cos \gamma}$$

$$R = \frac{12}{\cos \gamma}$$

$$\frac{22}{\sin(\gamma + \alpha)} = 2R$$

$$\frac{11}{\sin(\gamma + \alpha)} = R$$

$$\frac{11}{\sin \gamma}$$

$$\frac{R}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{22}{\sin(2\alpha + 2\gamma)}$$

$$\frac{R}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{22}{2 \sin(\alpha + \gamma) \cos(\alpha + \gamma)}$$

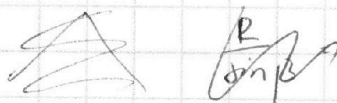
$$R = \frac{11}{\cos(\alpha + \gamma)}$$

$$\sin(\alpha + \gamma) = \cos(\alpha + \gamma)$$

$$\cos(\alpha + \gamma) = 1$$

$$\alpha + \gamma = 135^\circ$$

$$\beta = 45^\circ$$



$$\frac{12}{\cos \gamma} = 11\sqrt{2}$$

$$\cos \gamma = \frac{12}{11\sqrt{2}}$$

$$R^2 = 2 \cdot 11^2$$

$$R = 11\sqrt{2}$$

$$\frac{12 \cdot 11}{h(h+1)} = \frac{x(x-1)}{(h-1)h}$$

$$x(x-1) = 12 \cdot 11$$

$$x = 12$$

$$x^2 - x - 12 \cdot 11 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 12 \cdot 11}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

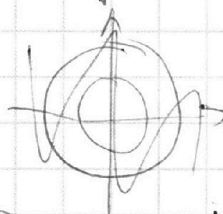
~~46/24~~

$$y = 4 \cos \alpha$$
$$x = -4 \sin \alpha$$

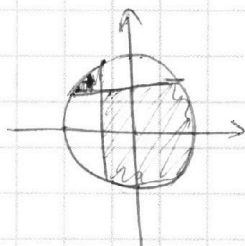
$$x = -4 \sin \alpha$$
$$y = 4 \cos \alpha$$

$$x^2 = 16 \sin^2 \alpha$$
$$y^2 = 16 \cos^2 \alpha$$
$$x^2 + y^2 = 16$$

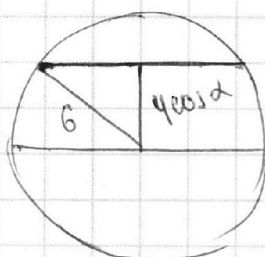
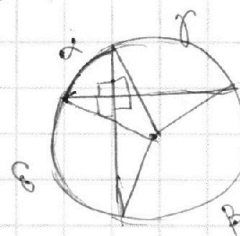
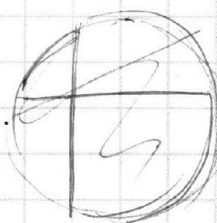
$$x^2 + y^2 = 16$$



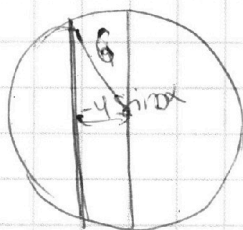
$$x = -4 \sin \alpha$$



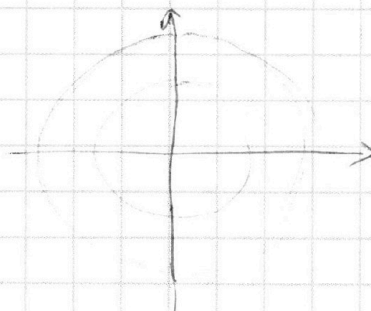
$$y = 4 \cos \alpha$$



$$2 \sqrt{36 - 46 \cos^2 \alpha}$$



$$2 \sqrt{36 - 46 \sin^2 \alpha}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{16}{\sin(\pi - \gamma - \alpha)}$$

$$\frac{22}{\sin(\alpha + \beta)} = 2R$$

$$\frac{256}{144} = \frac{136}{136}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{37}}{16}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{37}}{16}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{16}{\sin(\pi - \gamma - \alpha)}$$

$$\frac{22}{\sin(\gamma + \alpha)} = 2R$$

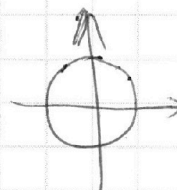
$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{16}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

$$R \sin(\alpha + \gamma) = 11$$

$$16 \sin \alpha = 11$$

$$\sin \alpha = \frac{11}{16}$$

$$\sin(\beta + \gamma) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \sin \alpha \cos \frac{\pi}{2} = \cos \alpha$$
$$= \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$



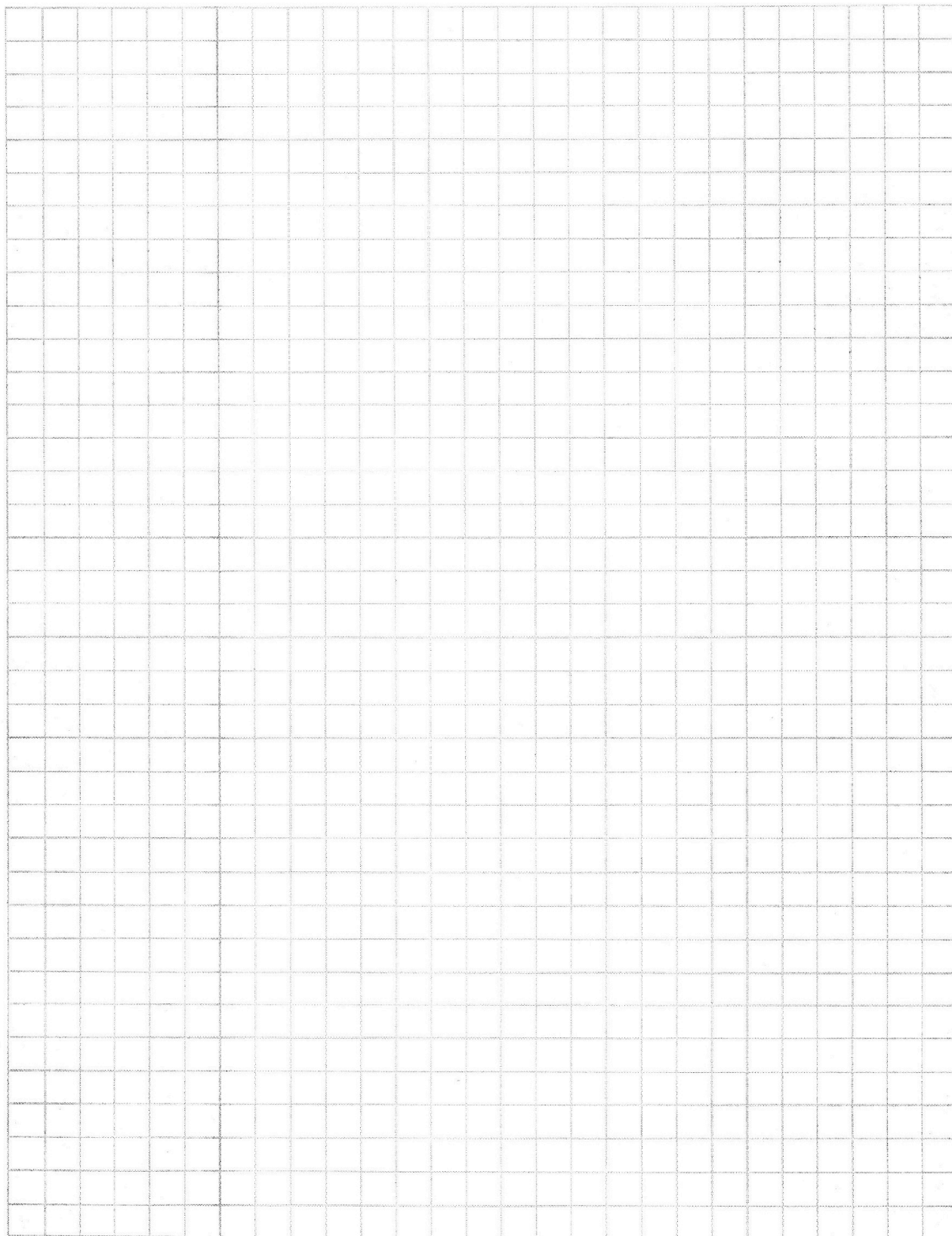


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



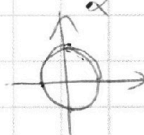


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$


$$\begin{cases} \frac{x}{7} \geq -1 \\ \frac{x}{7} \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -7 \\ x \leq 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y}{4} \geq -1 \\ \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq -4 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

$$\alpha - \beta > -\frac{\pi}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{7}$$

$$\sin \beta = \frac{y}{4}$$

~~Морфанду...~~

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 460 \\ \hline 529 \end{array}$$

2,2

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 440 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$\sqrt{5} \approx 2,23$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x}$$

$$\sqrt{5} \approx 2,23$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

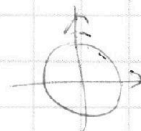
СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos \frac{x}{7} > -\frac{\pi}{2} + \sin \frac{y}{4}$$

$$[0, \pi] \quad [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$[-\pi, 0]$$



$$\begin{cases} \cos \frac{x}{7} \neq 0 \\ \sin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{7} \neq 1 & x \neq 7 \\ \frac{y}{4} \neq 1 & y \neq 4 \end{cases}$$

$$x = \pi$$

$$1 + 2k - x \geq -4$$

$$2k \geq x - 5$$

$$k \geq \frac{x-5}{2}$$

$$x = 7$$

$$-\frac{11}{2} = -5,5$$

$$x = 7$$

$$\underbrace{0000000000}_n$$

$$1 + 2k - x \leq 4$$

$$2k \leq x + 3$$

$$k \leq \frac{x+3}{2}$$

$$x = 7$$

$$P(\text{Ремонт}) \cdot P(\text{Вода})$$

$$\begin{array}{r} x \ 15 \\ 8 \\ \hline 120 \\ + 14 \\ \hline 134 \end{array}$$

$$\text{Всего } C_n^4$$

$$C_{n-2}^2$$

$$P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \frac{n!}{4!(n-4)!}$$

$$P_2 = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} =$$

$$= \frac{4!(n-2)!}{2! \cdot n!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot n(n-1)} = \frac{12}{n(n-1)}$$

$$= \frac{(n-2)!}{(x-2)! (n-x)!} \cdot \frac{n!}{x! (n-x)!}$$

$$= \frac{(n-2)! \cdot x!}{(x-2)! \cdot n!} \cdot \frac{x(x-1)}{(n-1)n}$$