



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 1, а  $y$  — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 3xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{15}{2}$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 9$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По уму.  $A$  состоит из 4 одинаковых цифр  $\Rightarrow A = \overline{aaaa}$ , где  $a \in \{1, \dots, 9\}$

$a \neq 0$ , т.к. число не может начинаться с нуля.  $\Rightarrow A = a + a \cdot 10 + a \cdot 100 + a \cdot 1000$

$$1000 = a \cdot 1111 = a \cdot 101 \cdot 11, \text{ и } 1000$$

101-кратно,  ~~$A \cdot B$~~   $a < 11 \Rightarrow$

$a \nmid 101, 11$ .  $A \cdot B \cdot C = n^2$  где

$$n \in \mathbb{N}, n \vdots A \Rightarrow n \vdots 101 \Rightarrow n^2 \vdots 101^2$$

$$\text{но } v_{101}(A) = 1, \text{ и } C < 100 \Rightarrow$$

$$v_{101}(C) = 0 \Rightarrow v_{101}(B) \geq 1, \text{ но } B < 1000$$

$$\Rightarrow v_{101}(B) = 1 \Rightarrow B = 101 \cdot k, k \in$$

$\{1, \dots, 9\}$ . По уму.  $\geq 1$  цифра  $B = 2$   
т.к.  $k \in \{1, \dots, 9\}$

$$\text{но } 101 \cdot k = \overline{kk} \Rightarrow k = 2 \Rightarrow$$

$$B = 202. \Rightarrow B \nmid 11. n \vdots A \Rightarrow n \vdots 11$$

$$\Rightarrow n^2 \vdots 11^2, \text{ но } a < 11 \Rightarrow$$

$$v_{11}(A) = 1, v_{11}(B) = 0 \Rightarrow v_{11}(C) \geq 1,$$

$$\text{но } C < 100 \Rightarrow v_{11}(C) = 1 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$C = 11^{\circ}t$ ,  $t \in \{1, \dots, 93\}$ . И по усм.  
 $\Rightarrow$  ~~4~~ <sup>укажем</sup>  $C = 3$ , но  $11^{\circ}t =$   
 $\overline{tt}$   <sup>$t \in \{1, \dots, 93\}$</sup>   $\Rightarrow t = 3 \Rightarrow C = 33$ .

Итого  $B^2 = ABC = a \cdot 101 \cdot 11^{\circ}$

$$3 \cdot 11^{\circ} 2 \cdot 101 = a \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$n: 2, 3 \Rightarrow n^2: 2^2, 3^2 \Rightarrow \cancel{2} \cancel{3} \nu_2(a), \nu_3(a) \geq 1$$

$$\text{но } a < 10 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow A = 6666$$

$$\Rightarrow ABC = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 101^2 \cdot 11^2 = (6666)^2$$

Все усм. выполнены и  
 пара существует.

Ответ:  $(A; B; C) = (6666;$   
 $202; 33)$ .

Заметим:  $\nu_p(x)$  - степень высшего-  
 ний простого числа  $p$  в числе  $x \in \mathbb{N}$ .  
 т.е.  $x: p^{\nu_p(x)}$ , но  $x \not\vdash p^{\nu_p(x)+1}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тоже } k' = \frac{1}{s+\Delta_2} + \frac{1}{s+\Delta_1} + \frac{2}{(s-\Delta_2)/(s+\Delta_2)}$$

Пусть  $\Delta_1 > \Delta_2$ . Докажем, что

$$(*) \quad \frac{1}{s+\Delta_1} + \frac{1}{s+\Delta_2} + \frac{2}{(s-\Delta_1)/(s+\Delta_1)} \geq \frac{1}{s+\Delta_2} + \frac{1}{s-\Delta_2} + \frac{2}{(s-\Delta_2)/(s+\Delta_2)}$$

$$\left( \frac{2}{(s-\Delta_2)/(s+\Delta_2)} \right) \Big| \cdot (s+\Delta_1)/(s-\Delta_1) \cdot (s+\Delta_2)/(s-\Delta_2) \Leftrightarrow$$

$$(s-\Delta_1)(s^2-\Delta_2^2) + (s+\Delta_1)/(s^2-\Delta_2^2) \geq (s+\Delta_2)/(s^2-\Delta_1^2)$$

$$+ (s+\Delta_2)(s^2-\Delta_1^2) \Leftrightarrow \underline{s^3 - \Delta_1 s^2 + \Delta_1 \Delta_2^2 - s \Delta_2^2} +$$

$$\underline{s^3 + \Delta_1 s^2 - \Delta_2^2 \Delta_1 - \Delta_2^2 s} \geq \underline{s^3 - \Delta_1^2 s + \Delta_2 s^2 - \Delta_1^2 \Delta_2}$$

$$+ \underline{s^3 - s \Delta_1^2 - \Delta_2 s^2 + \Delta_1^2 \Delta_2} \Big| - 2s^3 \Leftrightarrow$$

$$\underline{-\Delta_1 s^2 + s \Delta_2^2} - s \Delta_2^2 - \Delta_2^2 s \geq -\Delta_1^2 s - s \Delta_1^2 \Big| \cdot (-s)$$

$$\Leftrightarrow \Delta_2^2 < \Delta_1^2, \text{ но } \Delta_2 \text{ и } \Delta_1 > 0 \Rightarrow$$

$$\Delta_2^2 < \Delta_1^2 \Leftrightarrow \Delta_2 < \Delta_1 - \text{верно} \Leftrightarrow (*) - \text{верно}$$

Аналогично докажем, что при  $\Delta_2 > \Delta_1$

$k' > k$ . Теперь остаётся доказать  $\Delta_1 > \Delta_2$

$$\text{Докажем, что } \frac{2}{s^2-\Delta_1^2} \geq \frac{2}{s^2-\Delta_2^2} \Leftrightarrow \frac{s^2-\Delta_2^2}{s^2-\Delta_1^2} \geq 1$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow S^2 - \Delta_2^2 \stackrel{?}{>} S^2 - \Delta_1^2 \Leftrightarrow \Delta_1^2 \stackrel{?}{>} \Delta_2^2, \text{ но}$$

$$\Delta_1 \text{ и } \Delta_2 > 0 \Rightarrow \Delta_1^2 \stackrel{?}{>} \Delta_2^2 \Rightarrow \Delta_1 \stackrel{?}{>} \Delta_2 - \text{было.}$$

Аналогично для  $\Delta_1 < \Delta_2$ .

Итого если  $\Delta_1 > \Delta_2$

Т.е. при  $\Delta_1 \neq \Delta_2$  :  $k' \neq k$ , но по условию  $k' = k \Rightarrow \Delta_1 = \Delta_2$ , иначе  $k' \neq k$ .

Т.е. если  $x-1=x'$  и  $y+1=y'$ , то  $x'+y' = x+y$

$$\text{и } |x'-y'| = |x-y|, \text{ причем } x' \neq x \text{ и } y' \neq y$$

$$\Rightarrow x' = y \text{ и } y' = x \Rightarrow x-1 = y \text{ и } y+1 = x$$

$$\text{т.е. } x = y+1. \Rightarrow M = (y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1)$$

$$= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

$$\text{Ответ: } M = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Во-первых,  $x-1 \neq 0$ , т.к. ио уел.  $\frac{1}{x-1}$  определена.

Пусть  $x-1 < 0$  ~~и~~  $y+1 > 0$ , т.к.  $y > 0$

$$\Rightarrow (y+1)(x-1) < 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} < 0$$

$$\frac{2}{(y+1)(x-1)} < 0 \text{ и } \frac{1}{y+1} < \frac{1}{y} \text{ т.к. } y+1 > y (y > 0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(y+1)(x-1)} + \frac{1}{x-1} < \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y+1} + \frac{2}{(y+1)(x-1)} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + \frac{2}{xy} > \frac{1}{y} \text{ т.к.}$$

$$x, y > 0 \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{y+1} - \text{противоречие.}$$

$$\text{т.е. } x-1 > 0.$$

Пусть  $x+y=2S > 0$ . И  $|x-y| = \Delta_1$ , <sup>примем т.к.  $x, y > 0$ , то</sup>  $\Delta_1 < 2S$

если  $x \geq y$ , то  $x+y = y+y+\Delta_1 = 2S \Rightarrow y = \frac{S}{2} - \Delta_1$

$\Rightarrow x = \frac{S}{2} + \Delta_1$  если  $y \geq x$ , то наоборот.

т.е. в любом случае:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{\frac{S}{2} - \Delta_1} + \frac{1}{\frac{S}{2} + \Delta_1} + \frac{2}{S^2 - \Delta_1^2}$

По уел.  $x$  и  $y$  замещены на  $x-1$  и

$y+1$  соотв., то  $x-1 + y+1 = x+y = 2S \Rightarrow$

$x-1$  и  $y+1$  тоже равны  $S - \Delta_2$  и  $S + \Delta_2$  в некоем

порядке порою для ~~какого~~  $\Delta_2 = |x-1 - y-1|$

$\Rightarrow k$  (т.е.  $k$  в некое подст.  $(x; y) = (x-1; y+1)$ ) <sup>примем  $x-1, y+1 > 0 \Rightarrow$</sup>   $\Delta_2 < 2S$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим первое уравнение ~~и совокуп.~~  $\Rightarrow$

$$y = 1 - 3x, x \in \{-5, \dots, 5\} \Rightarrow x \text{ и } y \in$$

$$\{-4, \dots, 4\} \Rightarrow \text{подходят только } x = 1, 0, -1.$$

т.е. пары  $(1; -2), (0; 1), (-1; 4)$ .

Теперь второе:

$$y = x - 1, x \in \{-5, \dots, 5\} \text{ и } y \in \{-4, \dots, 4\}$$

$$\Rightarrow \text{подходят только } x = -3, -2, -1, 0, 1,$$

$$2, 3, 4, 5 \Rightarrow \text{пары } (-3; -4), (-2; -3),$$

$$(-1; -2), (0; -1), (1; 0), (2; 1), (3; 2), (4; 3), (5; 4)$$

Итого ответ:

$$(1; -2), (0; 1), (-1; 4), (-3; -4), (-2; -3),$$

$$(-1; -2), (0; -1), (1; 0), (2; 1), (3; 2),$$

$$(4; 3), (5; 4)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $\pi x = x_1$ ,  $\pi y = y_1 \Rightarrow$

имеем:  $(\sin x_1 + \sin y_1) \sin x_1 = (\cos x_1 + \cos y_1) \cdot$

$\cos x_1 \Leftrightarrow$

$\sin^2 x_1 - \cos^2 x_1 = \cos x_1 \cos y_1 - \sin y_1$

$\Leftrightarrow -\cos(2x_1) = \cos(x_1 + y_1)$

$\Leftrightarrow \cos(\pi - 2x_1) = \cos(x_1 + y_1) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \pi - 2x_1 = x_1 + y_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi - 2x_1 = -x_1 - y_1 + 2\pi t, t \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + y_1 = \pi(1-2k) \\ x_1 - y_1 = \pi(1-2t) \end{cases}$$

I путь:  $x_1 - y_1 = \pi(1-2t) \Leftrightarrow$

$x_1 = \pi(1-2t) + y_1 \Leftrightarrow \pi x = \pi(1-2t) + \pi y \quad | : \pi \Leftrightarrow$

$x = 1 + y - 2t \quad (x, y) \in \mathbb{R} \Rightarrow y = x - 1 \Rightarrow$   $\text{нужд. найти}$

II путь:  $3x_1 + y_1 = \pi(1-2k) \Rightarrow 3\pi x + \pi y = \pi(1-2k) \quad | : \pi$

$\Leftrightarrow 3x + y = 1 - 2k \Rightarrow y = 1 - 3x - 2k$

$\text{нужд. найти } (x; 1 - 3x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

0) По определению:  $\arcsin \frac{x}{5} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$\text{и } \arccos(\frac{y}{4}) \in [0; \pi] \Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} \in$

$\frac{\pi}{2} \text{ и } \arccos(\frac{y}{4}) \leq \pi \Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☒

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Но требуется найти  $(x; y) : \arcsin(\frac{x}{5}) + \arccos(\frac{y}{4}) \in \frac{3\pi}{2}$ . Пусть  $M$  -  
мно-во пар  $(x; y) \in (\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$  :  
удовн. этому кр-ву и рав-у из п.а).  
Тогда  $(x; y) \in (\mathbb{Z}; \mathbb{Z})$  из пункта а  
такие что  $\arcsin(\frac{x}{5}) + \arccos(\frac{y}{4}) = \frac{3\pi}{2}$  не подходит. Но  $\arcsin(\frac{x}{5}) \leq \frac{\pi}{2}$   
и  $\arccos(\frac{y}{4}) \leq \pi \Rightarrow$  чтоб было рав-во  
 $\arcsin(\frac{x}{5}) = \frac{\pi}{2}$  и  $\arccos(\frac{y}{4}) = \pi \Rightarrow$   
 $\frac{x}{5} = 1$  и  $\frac{y}{4} = -1 \Rightarrow x = 5$   
и  $y = -4$ . Но из а) имеем, что  
 $(x; y)$  удовн.  $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ .  $(5; -4)$  не  
подходит по  
эту совм. р-к.  $3x + y = 11 \neq 1$  и  $x - y = 9 \neq 1$   
Теперь  $(x; y) \in (\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$  и  $\frac{x}{5} \in$   
 $[-1; 1]$  и  $\frac{y}{4} \in [-1; 1] \Rightarrow x \in \{-5, -4, \dots, 5\}$   
и  $y \in \{-4, \dots, 4\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8) \text{ ~~и~~ } \frac{x}{5}, \frac{y}{4} \in [-1; 1] \Rightarrow$$

$$x \in [-5; 5] \text{ и } y \in [-4; 4]. \text{ и } x, y \in \mathbb{Z}$$

~~и~~ и мы знаем, что

$$y = x - 1 + 2t, t \in \mathbb{Z}$$

$$y = 1 - 3x - 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Имеем.  $y = x - 1 + 2t$ ,  $2t$  — четное

$$x = 5 \Rightarrow \text{возм. } y = 4, 2, 0, -2, -4$$

$$x = 2 \Rightarrow \text{возм.}$$

$$y = 3, 1, -1, -3.$$

$$x = 4 \Rightarrow \text{возм. } y = 3, 1, -1, -3$$

$$x = 3 \Rightarrow \text{возм. } y = 4, 2, 0, -2, -4$$

$$x = 1 \Rightarrow \text{возм. } y = (4, 2, 0, -2, -4)$$

$$x = 0 \Rightarrow \text{возм. } y = 3, 1, -1, -3.$$

$$1) x \text{ — четное } \Rightarrow \text{возм. } y$$

$$\in \{-3; -1; 1; 3\} \text{ если } x \text{ — нечетное, то}$$

$$\text{возм. } y \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}. \text{ Т.е. всего}$$

$$\text{чет. } x \in [-5; 5] \text{ — это } -4, -2, 0, 2, 4, \text{ т.е. 5 штук}$$

$$\Rightarrow \text{нечет. } x \in [-5; 5] \text{ — 6 } \Rightarrow \text{всего пар}$$

$$5 \cdot |\{-3; -1; 1; 3\}| + 6 \cdot |\{-4; -2; 0; 2; 4\}| =$$

$$20 + 30 = 50$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~2)  $y = 2x$~~  II сугг.  $y = 4 - 3x - 2k$ ,  $2k$ -лет  
Аналогично при  $2x$  подмодет  $y \in \{-3; -1; 1; 3\}$ . II при  $2x$   $x$   
подмодет.  $\{-4; -2; 0; 2; 4\}$ . Т.е. те же  
самые 50 способов.

Замечание, что эти 50 уже удобны.

пер-ву:  $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$ , т.к.

по определению  $\arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$

$\arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}$  и  $\arccos \in [0; \pi] \Rightarrow$

$\arccos(\frac{y}{4}) \leq \pi$ . Тогда равенство

имеет  $(x; y) \in (\mathbb{Z}; \mathbb{Z})$ :  $\arcsin \frac{x}{5} +$   
 $\arccos(\frac{y}{4}) \leq \frac{3\pi}{2}$  и  $\frac{3\pi}{2}$  и  $\frac{3\pi}{2}$  из этих 50.

$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$  все пер-ва

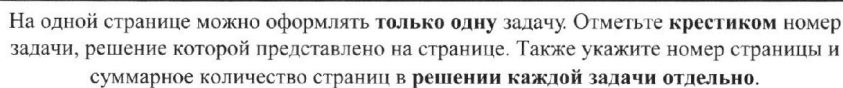
превращаются в равенство  $\Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\frac{x}{5} = 1 \Rightarrow x = 5$ ,  $\arccos(\frac{y}{4}) = \pi \Rightarrow$  все  $y$

$\frac{y}{4} = -1 \Rightarrow y = -4$ . Такая пара есть 50

и т.к. 5-лет  $\frac{x}{5}$ -лет  $\frac{y}{4}$ -лет  $\frac{y}{4}$  и  $\frac{y}{4}$  и  $\frac{y}{4}$  и  $\frac{y}{4}$

и  $5 \in [-5; 5]$  и  $-4 \in [-4; 4]$ . Т.е. Ответ:  $50 - 1 = 49$ .



СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$P_1 = \text{Вероятность в начале} = \frac{\text{Кол-во способов раздать билеты, так, чтоб ни было ни у Петя и у Васи}}{\text{Всего способов раздать билеты, так, чтоб ни было ни у Петя и у Васи}}$

$$A = \begin{pmatrix} \text{not der obere u y} \\ \text{Nur u y} \\ \text{Beitrag} \end{pmatrix}$$
$$B = \left\{ \begin{array}{l} \text{Кол-во всех способов} \\ \text{вызвать билет} \\ \text{всего.} \end{array} \right.$$

Покажем А. мы знаем, что были ~~только~~ ~~фактически~~ ~~были~~ ~~мы~~  $\Rightarrow$  осталось ~~планировать~~ ~~2~~ ~~быть~~ ~~или~~ ~~оставление~~ ~~я~~. т.е.  $C_{n-2}^2$ .

$$P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)(n-3) \cdot 4!}{2! (n(n-1)(n-2)(n-3))} = \frac{12}{n(n-1)}.$$

$P_2 =$  Вер-то в паре ~~не~~ Внутренне асимметрично, только 2 способа раздать всем это  $C_n^{4+x}$ , а записки. 2 и раздать оставшимся это  $C_{n-2}^{2+x}$ .





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{т.е. } P_2 = \frac{C_{n-2}^{x+2}}{C_n^{x+4}} = \frac{(n-2) \dots (n-2-x-2+1)}{(x+2)!} :$$

$$\frac{n(n-1) \dots (n-x-4+1)}{(x+4)!} = \frac{(x+4)!}{(x+2)! \cdot n(n-1)}$$

$$\text{По усл. } P_2 = 2,5 P_1 \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = 2,5 \Rightarrow$$

$$P_2 = 2,5 P_1 \Rightarrow \frac{(x+4)!}{(x+2)! \cdot n(n-1)} = \frac{12 \cdot 2,5}{(n-1)n}$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+4) = 30 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 7x + 12 - 30 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 18 = 0$$

$$\text{По М. Вассе: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -7 \\ x_1 \cdot x_2 = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -9 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Но } x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 2, \Rightarrow 4+x = 6$$

Ответ: 6 билетов.

Заметим, что все значения  $\neq 0$ , иначе  $n \leq 4$ , но  
 и в случае и в случае  $P_1$  билетов в ней  
 и в случае  $\geq 4$ , т.е. М. Васса в 100% случаев  
 будут билеты  $\Rightarrow P_1 = 1 = P_2 \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = 1 \neq 2,5$   
 — противоречие.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☒

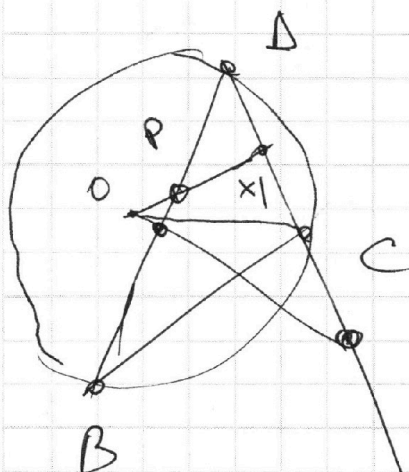
6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Реш. Пусть  $OP \cap AC = X_1$



$$\angle(PB, PB) = \angle(CB, CB)$$

т.к.  $P \in (OBC)$

$$\angle(CB, CB) = \angle(BC, BO)$$

т.к.  $OC = OB$  (радиусы  
ω)  $\Rightarrow \triangle OCB$  - р/в.

~~т.к.~~  $\angle(OB, OC) = 2\angle(AB, AC)$  как  
центральный  $\Rightarrow$  Пусть  $\angle(AB, AC) = \alpha$

$$\Rightarrow \angle(OB, OC) = 2\alpha \Rightarrow \angle(BC, BO) = \angle(CO, CB) = \frac{180 - \angle(OB, OC)}{2} = 90 - \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \angle(AP, AC) &= \angle(AB, AC) + \angle(PO, PB) \\ &\quad + \angle(PO, PA) \\ &= \alpha + 90 - \alpha = 90 \Rightarrow OP \perp AC. \end{aligned}$$

$OP \cap AC = X_1$ .  $O$  - центр ω  $\Rightarrow$

$$OP - \text{сер. пер к } AC \Rightarrow AX_1 = \frac{1}{2}AC = \frac{9}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$PX_1^2 = AP^2 - AX_1^2 \quad (\text{по Th. Пиф. в } \triangle APX_1)$$

$$= \frac{225}{4} - \frac{81}{4} = \frac{12^2}{2^2} \Rightarrow$$

$$PX_1 = \frac{12}{2}$$

$$\sin \angle (AP, AX_1) = \frac{PX_1}{AP} =$$

$$\frac{12}{15}$$

$$\angle (AP, AX_1) = \angle (AB, AC) \Rightarrow$$

$$\sin \angle (AB, AC) = \sin \angle (AP, AX_1) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot \sin \angle (AB, AC) =$$

$$\frac{(AP + PB) \cdot AC}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{\left(\frac{15}{2} + \frac{10}{2}\right) \cdot 9}{2} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= \frac{25 \cdot 9 \cdot 4}{4 \cdot 5} = 45.$$

$$\text{Ответ: } S_{\triangle ABC} = 45.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☒

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$PO \cap AC = X_1$ . т.е.  $PO \perp AC$  и  $O$  - центр опис.  $\Rightarrow PO$  - перпенд. к  $AC \Rightarrow$

$$AX_1 = \frac{AC}{2} = 4,5.$$

тогда  $\sin \alpha = \frac{PX_1}{AP}$ . (т.к.  $\angle AX_1P = 90^\circ$ )

По Тр. Пифагора:  $PX_1^2 = AP^2 - AX_1^2 =$

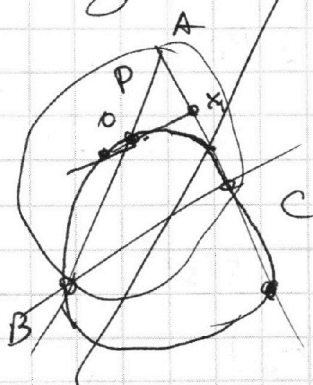
$$\frac{225}{4} - \frac{81}{4} = \frac{144}{4} \Rightarrow PX_1 = \frac{12}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{PX_1}{AP} = \frac{12}{2} \cdot \frac{2}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{5 \cdot 9 \cdot \frac{4}{5}}{2} =$$

(3).

т.е.  $P \in [AB]$ .



Аналогично  $X_1 = OP \cap AC$

$$\Rightarrow OP \perp AC \Rightarrow X_1A = \frac{1}{2}AC = \frac{9}{2}$$

По уш.  $AP = \frac{5}{2}$ ,  $BP = 5 \Rightarrow$

$$AB = \frac{25}{2}.$$

По Тр. Пифагора:  $PX_1^2 = AP^2 - AX_1^2$

$$= \frac{144}{4} \Rightarrow PX_1 = \frac{12}{2} \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \frac{PX_1}{AP} = \frac{4}{5}. \text{ Тогда } S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{\frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5}}{2} = (45)$$

Ответ:  $S_{\triangle ABC} \in [29; 45]$





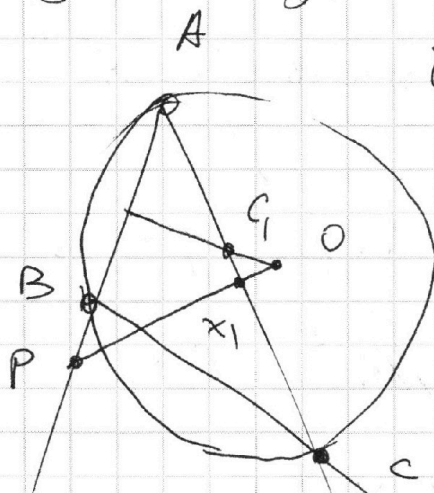
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

И пусть, когда  $P \in [AB]$  (отрезке).



Пусть  $w_2 \cap AC = C_1$   
( $P, m/d = C$ )

Тогда  $\text{pow}(A, w_2) = AB \cdot AP$   
 $\text{pow}(A, w_2) = AC_1 \cdot AC$ ,  
где  $\text{pow}(A, w_2)$  — ст. ~~относительно~~  $w_2$

$$\Rightarrow AB \cdot AP = AC \cdot AC_1$$

$$AP = \frac{15}{2}, BP = 5 \Rightarrow AB = AP - BP = 2,5$$

$$AC = 9 \Rightarrow \frac{2,5 \cdot 15}{2} = 9 \cdot AC_1 \Rightarrow \frac{37,5}{2} = AC_1$$

$$P \in (BOC) \Rightarrow \angle BPO = \angle OCB. \text{ Но } OC = OB \text{ как радиусы } w_1 \Rightarrow \triangle BOC - \text{р/д}$$

$$\Rightarrow \angle OCB = \frac{180 - \angle BOC}{2}. \text{ Но } \angle BOC = 2 \angle BAC \text{ (центральный)} \Rightarrow$$

$$\angle OCB = 90 - \angle BAC \text{ (гипотеза } \angle BAC = \alpha) = \alpha.$$

$$\Rightarrow \angle APO = \alpha, \text{ но } \angle PAC_1 = \alpha \Rightarrow$$

$$PO \perp AC$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Замечание:

1) Мы заметили, что

$$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ x \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ y \geq 3\sqrt{2}\sin\alpha \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$(x; y) \in \Pi \cup \text{IV} \cup \text{I} \cup \text{II} \cap \{x, y = F_2\}$$

$$\text{и } x^2 + y^2 \leq 25 \Leftrightarrow (x; y) \in F_1 \Rightarrow$$

Исходя  $\varphi(\alpha) = F_1 \cap F_2$ , это в точности

часть  $F_1$ ,  $\text{и/л } \alpha \in \Pi \cup \text{IV} \cup \text{I} \cup \text{II}$  и часть  $\{x$

и  $y \in F_1$ . и.

а) Попробуем сделать про  $6/|\cos\alpha| + |\sin\alpha|$

мы заметили, что при  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  дост-ся макс.

М, но  $\varphi(\frac{\pi}{4})$  и  $\varphi(-\frac{3\pi}{4})$  направлены в (0; 0)

симметричны, а  $\varphi(\frac{\pi}{4})$  и  $\varphi(\frac{3\pi}{4})$  и

$\varphi(\frac{\pi}{4})$  и  $\varphi(-\frac{3\pi}{4})$  сим-ы относительно  $Oy$  и  $Ox$  соответственно.

$\Rightarrow \pm\frac{3\pi}{4}$  и  $-\frac{\pi}{4}$  также подходят. А.т.к.

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} \text{ и } |\cos(\alpha)|, |\sin(\alpha)| = |\cos(\alpha_1)| \text{ и } |\sin(\alpha_1)| \text{ то}$$

$\alpha \in \{\pm\frac{\pi}{4}; \pm\frac{3\pi}{4}\}$  и все  $\alpha$  такие  $\alpha$  годят.

$\Rightarrow$  ответ:  $M$  и при  $\alpha$  такие макс

Ответ:  $M \leq 6\sqrt{2} + 5\pi$ ; при  $\alpha \in \{\pm\frac{\pi}{4}; \pm\frac{3\pi}{4}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☒

7  
☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

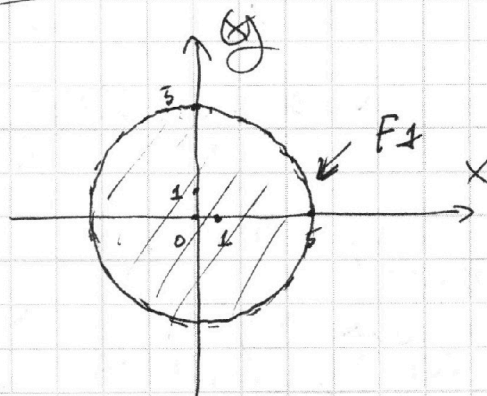
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 \leq 25$ . Рисуем  $F_1$ , удовл. этому нерав-ву  
это окр.  $x^2 + y^2 = 25$  ~~и всё, что внутри неё~~  
+ всё, что внутри неё, т.е. круг с  
центром в  $(0,0)$  и  $R = 5$ .

$$(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \geq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$$



$$25 > 18 \Leftrightarrow 5 > 3\sqrt{2}.$$

$$\sin\alpha, \cos\alpha \in (-1; 1] \Rightarrow$$

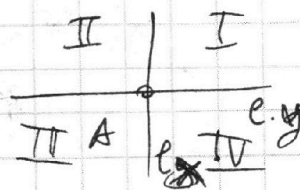
$$3\sqrt{2}\sin\alpha, 3\sqrt{2}\cos\alpha \in [-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}] \in$$

$$[-5; +5] \Rightarrow \text{точка } A = (3\sqrt{2}\sin\alpha, 3\sqrt{2}\cos\alpha) \in F_1.$$

Проведем 7/3 ~~линии~~  $l.x \parallel O_y$  и  $l.y \parallel O_x$ .  $l.x$  и  $l.y$

разбивают плоск. на 4 части

~~тогда~~  $l.x \perp l.y$  не выходя  $l.x$  и  $l.y$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☒ 6

☐ 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда 
$$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq 3\sqrt{2} \cos \alpha \\ x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \geq 3\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) \in \begin{matrix} \text{IV} \\ \{x \neq, y \neq, \\ \text{e.l.x, e.y}\} \end{matrix}$$

$e.x \cap (y^2 + x^2 = 25) = x_1, x_2, x_1 \neq x_2, \text{ т.к.}$

$A \in e.x \text{ и } A \in F, \text{ но } (y^2 + x^2 = 25) \notin$   
группе по окр.  $\omega$ .

$e.y \cap \omega = y_1, y_2, y_1 \neq y_2$  (инвариантно)

$(x_1, \text{вне } x_2), (y_1, \text{вне } y_2)$ .

Тогда  $M = \overline{AX_1} + \overline{x_1 y_1} + \overline{y_1 A} +$   
 $\overline{AX_2} + \overline{x_2 y_2} + \overline{y_2 A}$ , где

$\overline{T_1 T_2}$  - дуги по часовой стрелке

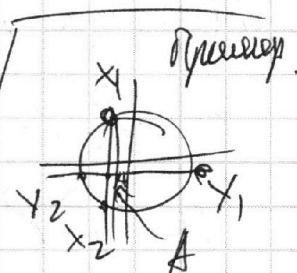
$\forall T_1 \neq T_2 \in \omega, \overline{T_1 T_2}$  - её размер в рад., а

$|\overline{x_1 y_1}|, |\overline{T_1 T_2}|$  - её дуга.

$\angle y_2 x_1 x_2 = \frac{1}{2} \angle x_2 y_2$ . И по теореме синусов для

$\triangle x_1 x_2 y_1 \neq \triangle x_1 y_1 x_2, |\overline{x_1 y_1}| = \overline{x_1 y_1} \cdot R$ , где

$R$  - рад.  $\omega = 5$ ,  $|\overline{x_2 y_2}| = \overline{x_2 y_2} \cdot R$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{По } \overline{x_2 y_2} + \overline{x_1 y_1} = 2 < \overline{y_2 A x_2} = \pi, +k$$

$$l.x \parallel O_y \perp O_x \parallel l.y \Rightarrow l.x \perp l.y,$$

$$\text{т.е. } |\overline{x_2 y_2}| + |\overline{x_1 y_1}| = \pi R \Rightarrow \text{т.е. не завис. от } A.$$

$$A x_1 + x_2 A = x_1 x_2, \quad A y_1 + A y_2 = y_1 y_2$$

$$x_1 x_2, y_1 y_2 - \text{хорошо } \omega \Rightarrow$$

$$x_1 x_2, y_1 y_2 \leq 2R. \text{ Уточню}$$

$$M = |\overline{x_2 y_2}| + |\overline{x_1 y_1}| + A x_1 + A x_2 + A y_1 + A y_2 \neq$$

$$2R + \pi R = (4 + \pi)R = 20 + 5\pi. \text{ Присем}$$

$$M = 20 + 5\pi \text{ получим - не только когда } x_1 x_2 = 2R$$

$$\text{и } y_1 y_2 = 2R \Rightarrow \text{в } x_1 x_2, y_1 y_2 - \text{границ.}$$

$$\Rightarrow l.x, l.y \ni (0; 0) \Rightarrow l.x = O_x \text{ и}$$

$$l.y = O_y \Rightarrow A = (0; 0) \Leftrightarrow$$

~~Вот и все~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☒ 6

☐ 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$X_1 = (3\sqrt{2}\sin\alpha; t_1) \quad X_1 \in W \Rightarrow OX_1 = 5$$

$$\Rightarrow OX_1^2 = 25 \Rightarrow 18\sin^2\alpha + t_1^2 = 25 \Rightarrow$$

$$t_1^2 = 25 - 18\sin^2\alpha.$$

$$X_2 = (3\sqrt{2}\sin\alpha; t_2) \quad X_2 \in W. \text{ Аналогично}$$

$$t_2^2 = 25 - 18\sin^2\alpha, \text{ но } t_1 \neq t_2, \text{ т.к. } X_1 \neq X_2$$

$$\Rightarrow \text{т.е. } t_1 \text{ и } t_2 \text{ разн. знаков} \Rightarrow$$

$$X_1 X_2 = \sqrt{t_1^2 - t_2^2} + |18\sin^2\alpha - 18\sin^2\alpha| = 2 \cdot 6|\sin\alpha|.$$

$$\text{Аналогично найдем, что } Y_1, Y_2 =$$

$$6|\cos\alpha|. \text{ Тогда } AX_1 + AX_2 + AY_1 + AY_2 = 2 \cdot 6|\cos\alpha|$$

$$6(|\cos\alpha| + |\sin\alpha|) = 6\sqrt{2} \left( \cos\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$$

$$= 6\sqrt{2} \left( \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \right), \quad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$1 = 1 \text{ при } \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \text{ т.е. } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \text{т.е. } |\cos\alpha| + |\sin\alpha| = 1 \text{ при}$$

$$\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{Тогда } M_A = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + |X_1 Y_1| + |X_2 Y_2| =$$

$$6(|\cos\alpha| + |\sin\alpha|) + \pi R \leq 6\sqrt{2} + \pi R = 6\sqrt{2} + 5\pi$$

$$\text{равно только при } \alpha \in \left\{ \pm\frac{\pi}{4}; \pm\frac{3\pi}{4} \right\}$$

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= |\cos\alpha| \\ \sin\alpha_1 &= |\sin\alpha| \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(IIII)

$$\begin{array}{r} \text{IIII} \ 12 \\ - 2 \ 15 \\ \hline 41 \\ - 35 \\ \hline 61 \end{array}$$

(11 • 101)

B: ~~11~~, 101

$$C: \frac{1}{a} + \frac{1}{s-a} =$$

B: 101

101

(202)

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{s-b}$$

~~K~~  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$   
" B

= 202

k • IIII

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \quad k \cdot 101 \circ 11 \circ B$$

$\frac{s}{2}$

(S = 24)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{s-a} \approx \frac{24}{s}$$

C: 11, ~~4~~

k ≠ 11

s-b)

C: 11

(33)

$$3 - 2 \cdot 101^2 \cdot 11^2$$

R = 6

(S = 24)

$$(s-a)s + aB \geq 4(s-a)a$$

$$s^2 - as + as \geq 4sa - 4a^2$$

$$s^2 + 4a^2 \geq 4sa$$

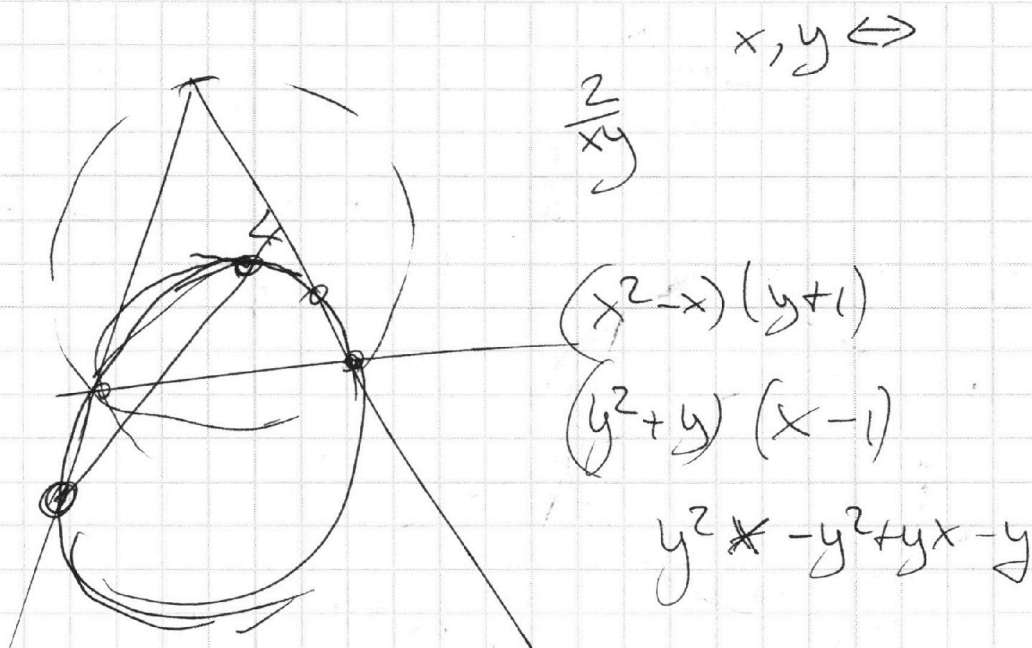


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \cdot xy$$

$$y(x-1)(y+1) + \cancel{x}(x-1)(y+1) + 2(y+1)(x-1) =$$
$$(y+1)xy + (x-1)xy + 2xy$$

$$\cancel{y^2x} - \cancel{y^2} + \cancel{yx} - y + \cancel{x^2y} + x^2 - \cancel{xy} - x +$$
$$\cancel{2yx} - 2y + 2x - 2 = \cancel{xy^2} + \cancel{xy} + \cancel{x^2y} + \cancel{xy} + 2xy$$

$$x^2 - y^2 - 3y + x - 2 = 0$$



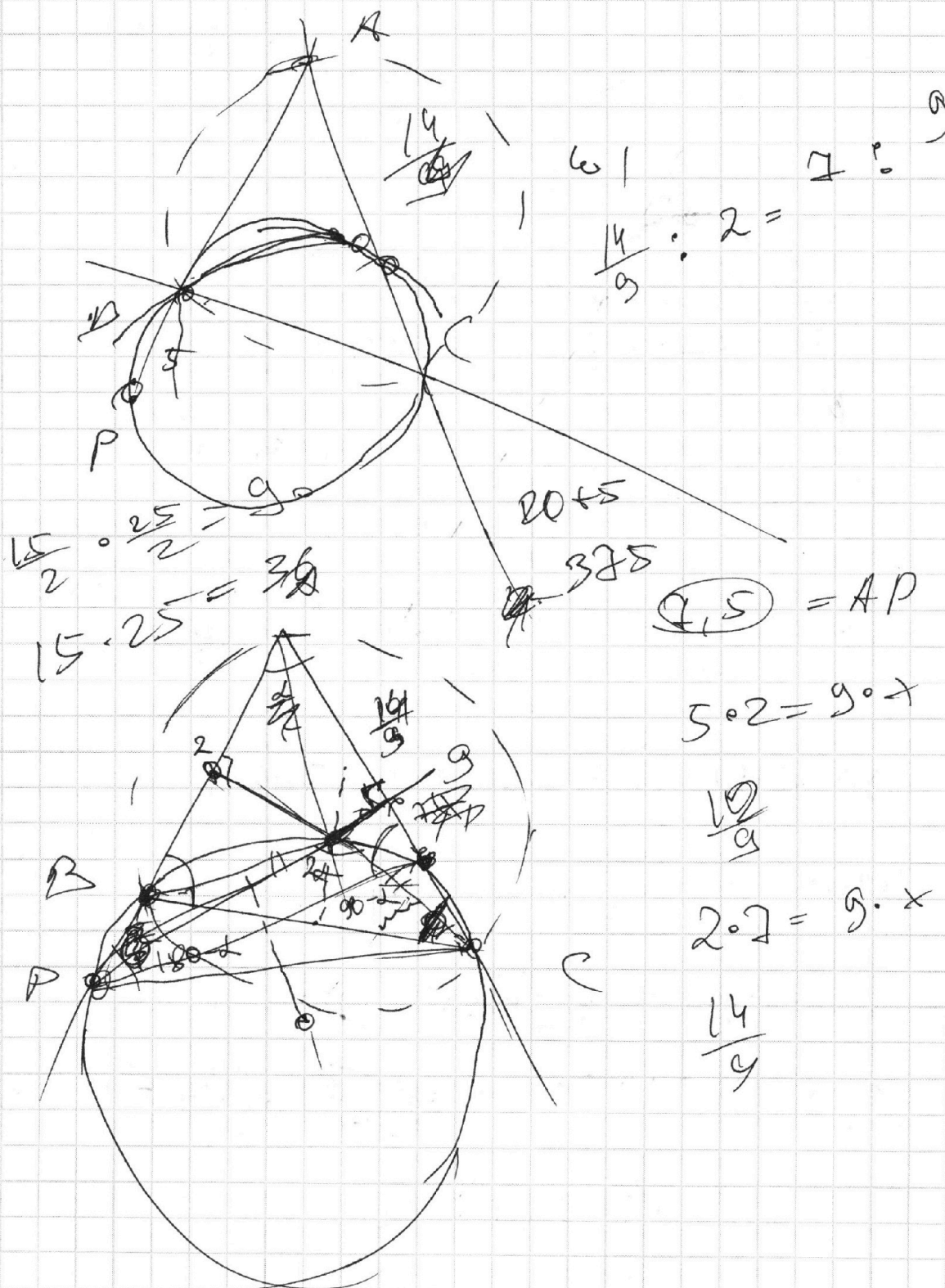


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



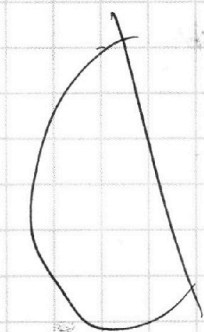


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\arcsin \frac{x}{5} = \varphi, \quad y^3(y+1)^3 - 3y(y+1)$$

$$\arccos \frac{y}{5} = \varphi_2, \quad y^3 - y^3 - 3y^2 - 3y - 1$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 < \frac{3\pi}{2} - 3y$$

$$\sin(\varphi_1) = \frac{x}{5}, \quad \left( \sin(\varphi_1) - \frac{1}{5} \right) \cdot \left( \frac{5}{y} \right) = \cos(\varphi_2)$$

$$\cos(\varphi_2) = \frac{1-x}{5}, \quad x = -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$5 \neq 1, \dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5 = x$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0$$

$$\frac{(n+x)!}{n!(2+x)!} \cdot \frac{n!(n-1)!}{n!(n-2)!} = \frac{n!(n-1)!}{n!(n-2)!} \cdot \frac{n!(n-2)!}{n!(n-3)!} = \frac{n!(n-1)!}{n!(n-3)!}$$

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2(n-2) \cdot (n-3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{C_n^4}{C_n^2} = \frac{n!}{4! \cdot (n-4)!} \cdot \frac{2! \cdot (n-2)!}{n!} = \frac{2! \cdot (n-2)!}{4! \cdot (n-4)!} = \frac{2! \cdot (n-2)!}{4! \cdot (n-2)!} = \frac{2!}{4!} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{C_{n-2}^{n-2}}{C_{n-2}^{n-2}} = 1$$

$$\frac{C_{n-2}^{n-2}}{C_{n-2}^{n-2}} = 1$$

$$\frac{2!}{4!} = \frac{1}{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

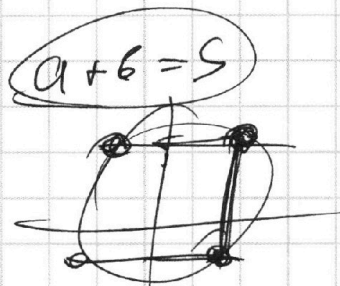
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(s-b)b(s-a) + ab(s-b) = (s-b)/(s-a)a$$

$$+ ba(s-a)$$

$$(sb-b^2)/(s-a)$$



$$\times s^2b - sab - b^2s + b^2a + abs - ab^2$$

(70 X)

||

$$s^2a - sab - a^2s + a^2b + abs - a^2b$$

$$s^2(b-a) - s(b^2-a^2) = 0$$

$$s(b-a)/(s-b-a) = 0$$

$$(s \sin \pi x + s \sin \pi y) \sin \pi x = 0$$

$$1 - \cos^2 \pi x + \sin$$

$$1 - 2\cos^2 x_1$$

$$- \cos(2x_1) = \cos(x_1 + y_1)$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2 x_1 + \sin y_1 \sin x_1 =$$

$$\therefore \cos^2 x_1 + \cos x_1 \cos y_1$$

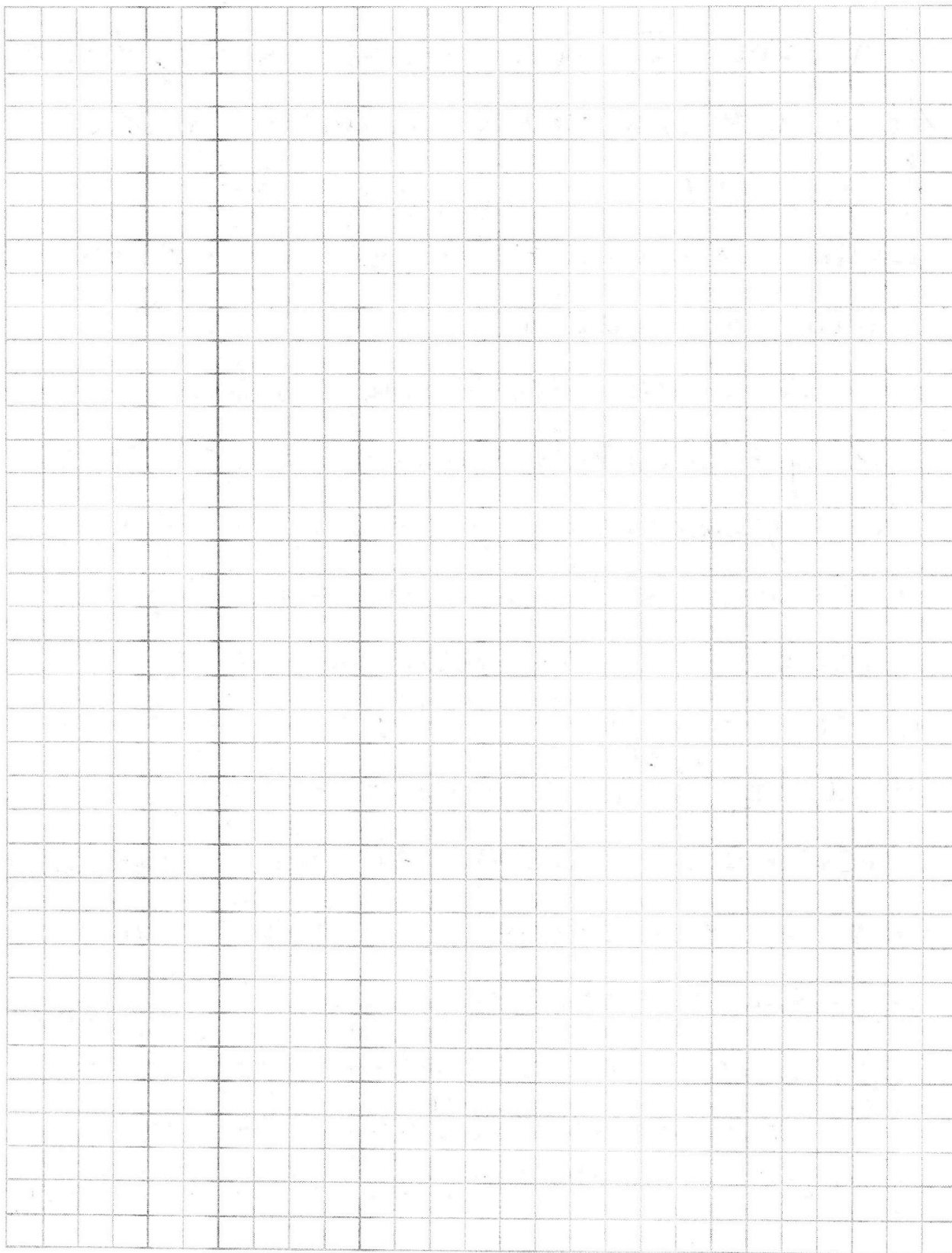


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

