



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ОТВЕТ: (6666; 202; 33)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Из условия A имеет вид $A = X \cdot 111$, где $X \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. $1111 = 11 \cdot 101$, 11 и 101 — простые числа.

Т.к. C не может делиться на 101 (C — двузначное), а одно из чисел B и C делится на 101 (т.к. должно выполняться условие $A \cdot B \cdot C = n^2$ ($n \in \mathbb{N}$)), то $B : 101$ (т.к. 101 — простое и должно входить в произв. $A \cdot B \cdot C$ в четной степени). Заметим, что $B \not\div 11$, т.к. тогда $B \geq 11 \cdot 101 = 1111$, но B — трехзначное. Отсюда $C : 11$, ~~так как иначе тогда~~, т.к. 11 — простое и должно входить в $A \cdot B \cdot C$ в четной степени, т.к. $A \cdot B \cdot C = n^2$. Т.к. $B : 101$ и трехзначное, то B может быть $101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909$. Из этих



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черпунком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ВАРИАНТОВ, ЧТО В В ЕСТЬ 'ПОВ УСЛОВИЕ, ЧТО В В ЕСТЬ 2, ПОЯВЛЯЮТСЯ ТОЛЬКО 202. $B = 202$.

C: 11 и двузначное. Т.е. C может быть 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Из этих вариантов по условию, что В С есть 3, появляются только 33. $C = 33$. Имеем:

$A \cdot B \cdot C = X \cdot 1111 \cdot 202 \cdot 33 = X \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2 \cdot 3$, где $X \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Чтобы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом н.т. числа, итак же,

чтобы все простые делители входили в него в четной степени. Отсюда

$X:2$ и $X:3$. Таких н.т. чисел от 1 до 9 только одно — 6. Т.е. $X = 6$,

$A = 6 \cdot 1111 = 6666$. ~~$A \cdot B \cdot C = 6666 \cdot 202 \cdot 33$~~

$33 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2$ — квадрат н.т. числа.

Т.е. таких троек всего одна (6666, 202, 33)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. Изначально $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$. После уменьш. x на 1 и увелич. y на 1, получим новое выражение $K' = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$. $K = K'$.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}.$$

Заметим, что: $x \neq 0$; $y \neq 0$; $x \neq 1$; $y \neq -1$.
Т.к. в знаменателе не м.б. 0.

Преобразуем: $\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$.

Должно быть обеспечено на $xy(x-1)(y+1) \neq 0$.

$$(y+x+2)(x-1)(y+1) = (y+x+2)(xy).$$

Равенство выполняется, если $y+x+2=0 \Leftrightarrow$

~~В таком случае $x=2$ и $y=-2$~~ $\Leftrightarrow x+y=-2$.

~~Подставим в K .~~

~~$(2+y)^3 - y^3 - 3y(2-y) = y^3 - 6y^2 - 12y - 8 - y^3 + 6y + 3y^2 = 2y^3 - 3y^2 - 6y - 8$~~

Но по условию $x > 0$ и $y > 0 \Rightarrow x+y > 0$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит такое невозможно и $x+y+2 \neq 0$
Порежим обе части на $(x+y+2)$.

$$(x-1)(y+1) = xy$$

$$xy + x - y - 1 = xy$$

$$x - y = 1.$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 3xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy = \\ &= 1 \cdot (x^2 + xy + y^2) - 3xy = x^2 + xy + y^2 - 3xy = \\ &= x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2. \end{aligned}$$

Т.к. $x-y=1$,
то $M = (x-y)^2 = 1$. Достигается, например,
при $(x; y) = (2; 1)$.
Ответ: $M = 1$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ВА $\frac{3\pi}{2}$, он реализуется, только когда $\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{5} = 1 \Rightarrow x = 5$, а $\arccos \frac{y}{4} = \pi \Rightarrow \frac{y}{4} = -1 \Rightarrow y = -4$. Из всех

пар нам не получится только $(5; -4)$.

Найдём все пары, исходя из возможных значений x, y . Найдём пары вида $(4+1+2k; y)$, $k \in \mathbb{Z}$. Это пары $(-5; -4); (-3; -4); (-1; -4); (1; -4); (3; -4); \dots$

Тогда ответом будут служить все пары, полученные в пункте а, для целых $x \in [-5; 5]$ и для целых $y \in [-4; 4]$. Заметим, что пары $(4+1+2k; y)$ означают разную чётность x и y . Т.е. это пары $(x; y)$ для $x \in \{-5; -4; -3; \dots; 3; 4; 5\}$ и $y \in \{-4; -3; \dots; 3; 4\}$, что ~~х и у~~ x и y разной чётности. Пары $(x; 1+2k-3x)$ также означают разную



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

четность X и Y . Т.к. Если X -чёт,
 $3X$ -чёт, $1+2k-3X$ -неч.; если X -неч.,
 $3X$ -неч., $1+2k-3X$ -чёт. Значит,
аналогично парам предыдущего вида,
это пары $(X; Y)$, где $X \in \{-5; -4; \dots; 4; 5\}$,
 $Y \in \{-4; -3; \dots; 3; 4\}$, X и Y -разной четности.
Исключая пару $(5; -4)$.

Ответ: пар. Проверим такие
пары. Посчитаем количество.

Если X -чёт, то Y -неч. ~~Таких~~
~~Таких~~ X -5, Y -4. Всего пар
 $5 \cdot 4 = 20$. Если X -неч., то Y -чёт.

Таких X -6, Y -5. Итого пар: ~~20~~
~~20~~ $6 \cdot 5 = 30$, но одна из них $(5; -4)$,
то есть осталось 29. Всего пар
пар $20 + 29 = 49$.

Ответ: 49 пар.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Б) ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ $\arcsin$ и $\arccos$ — $[-1; 1]$. Поэтому, т.к. $x, y \in \mathbb{Z}$, то $x \in \{-5; -4; -3; \dots; 3; 4; 5\}$, а $y \in \{-4; -3; \dots; 3; 4\}$.

~~Рассмотрим, какие пары подходят под $(y+1+2k; y)$, $k \in \mathbb{Z}$. Это пары $(-5; -4); (-3; -4); (-1; -4); (1; -4);$~~

~~Заметим, что если $\arcsin \frac{x}{5}$ и $\arccos \frac{y}{4} \geq \frac{3\pi}{4}$, то сумма $\geq \frac{3\pi}{2}$, то есть они не подходят.~~

~~$\arcsin \frac{x}{5}$ Заметим, что $\arccos \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; а $\arcsin \frac{x}{5} \in [0; \pi]$. Значит.~~

~~$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$ на отрезке $\frac{3\pi}{2}$ достигается~~

~~Заметим, что $\arcsin \frac{x}{5} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $\arccos \frac{y}{4} \in [0; \pi] \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$, при любых x, y ,~~

~~подходящих под область определения.~~

~~Нам не подходит только случай равенств.~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☒☐☐☐☐

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3.A) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin \pi x + \sin \pi y = 2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$$\cos \pi x + \cos \pi y = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$$\cancel{2} \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = \cancel{2} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$\cdot \cos \frac{\pi x}{2}$. Сократим обе части на 2.

$$\text{Равенство достигается, когда } \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0, \quad \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\boxed{x - y = 1 + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}}$. Рассмотрим случай, когда $\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \neq 0$. Поделим обе части на $\cos \frac{\pi x - \pi y}{2}$.

$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

~~поделим обе части на $\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \pi x$.~~

$$\cancel{\frac{\sin \frac{\pi x + \pi y}{2}}{\cos \frac{\pi x + \pi y}{2}} \cdot \frac{\sin \pi x}{\cos \pi x} = 1}$$

Сделаем замену $\frac{\pi x + \pi y}{2} = \alpha; \quad \pi x = \beta$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Нужно понять, когда $\tan 2x$ углов
в произведении равно 1.~~

$$\sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta$$

$$\frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

Допустим обе части на 2.

$$\cancel{\cos(\alpha - \beta)} - \cos(\alpha + \beta) = \cancel{\cos(\alpha - \beta)} + \cos(\alpha + \beta)$$

$$- \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} + \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + y + 2x = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ 3x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{т.е. пары } (y + 1 + 2k; y), \text{ где } k \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{R};$$

$$(x; 1 + 2k - 3x), \text{ где } k \in \mathbb{Z}; x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ответ: } (y + 1 + 2k; y); (x; 1 + 2k - 3x), k \in \mathbb{Z}, x, y \in \mathbb{R}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В ~~варианте~~ 4. Пусть всего 11-классников - k
В начале месяца всего вариантов
распределить билеты - C_k^4
(выбрать 4 обладателя билета среди
 k 11-классников). А ~~вероятность~~ вариантов,
чтобы Петя и Васа поехали на
концерт - C_{k-2}^2 (отдать 2 билета
Пете и Вase и распределить
оставшиеся ~~тоже~~ 2 билета, среди
 $k-2$ оставшихся людей). Тогда
вероятность в начале месяца:

$$V_1 = \frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} = \frac{\frac{(k-2)!}{2!(k-4)!}}{\frac{k!}{4!(k-4)!}} = \frac{(k-2)!}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4!}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot (k-3)} = \frac{12}{(k-1) \cdot k}$$

В конце месяца пусть билетов стало n .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда всего вариантов распределить их C_k^n , а вариантов, чтобы Петя и Васа пошли вместе — C_{k-2}^{n-2} . (Аналогично случаю в начале месяца).

Тогда вероятность в конце месяца

$$V_2 = \frac{C_{k-2}^{n-2}}{C_k^n} = \frac{\frac{(k-2)!}{(n-2)!(k-n)!}}{\frac{k!}{n!(k-n)!}} = \frac{\frac{(k-2)!}{(n-2)!}}{\frac{(k-2)! \cdot (k-1) \cdot k}{(n-2)! \cdot (n-1) \cdot n}} =$$

$$= \frac{(n-1) \cdot n}{(k-1) \cdot k}. \text{ Из условия } V_2 = 2,5 V_1,$$

$$\frac{(n-1) \cdot n}{(k-1) \cdot k} = 2,5 \frac{12}{(k-1) \cdot k}$$

$$(n-1)n = 30.$$

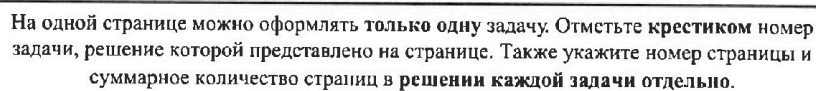
$$n^2 - n - 30 = 0$$

$$(n-6)(n+5) = 0$$

$n = -5$ — не подх., т.к. выделили ~~12~~ билетов ~~условия~~

$n = 6$ — подходит.

Ответ: 6 билетов.



7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Посчитаем степень точки Q отн.
 ω_2 . Это $AP \cdot AB = \frac{15}{2} \cdot \frac{25}{2} = \frac{375}{4}$
 Заметим, что расстояние от Q до
 центра ω_2 (назовём его ρ),
 равно $R^2 + \frac{375}{4}$, где R — радиус ω_1 .

$\rho = AO + OO_1$, где O_1 — центр ω_2 ,
т.к. центры опис. окр. явл. точками
пересечения сер. перов к сторонам
 Δ , BC — в обоих Δ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть наша точка имеет коорв. X и Y , тогда вертикальный отрезок имеет длину $2\sqrt{25-X^2}$; горизонтальный $2\sqrt{25-Y^2}$ (найдем координату точки на окружности (пусть k) и умножим на 2, т.к. отрезок от координаты $-k$ до $k \Rightarrow$ длина $2k$)
Сумма ^{длины} отрезков: $2(\sqrt{25-Y^2} + \sqrt{25-X^2})$
Сумма $\sqrt{25-Y^2} + \sqrt{25-X^2}$, ввиду того, что X и Y - координаты точки на окружности с $R=3\sqrt{2}$, т.е. верно $X^2+Y^2=18$, принимает наибольшее значение, когда $X^2=Y^2$. Т.к. $X^2+Y^2=18$, то $X^2=Y^2=9$, откуда $\sqrt{25-Y^2} + \sqrt{25-X^2} \leq 8$,
А $2(\sqrt{25-Y^2} + \sqrt{25-X^2}) \leq 16$. Наиб. значение достигается в тех точках, где $X^2=Y^2=9$, то есть $(3;3); (3;-3); (-3;3); (-3;-3)$.
Т.к. $X=3\sqrt{2} \sin \alpha$, а $Y=3\sqrt{2} \cos \alpha$, из этих



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

точек, ~~на~~ увеличив координаты на $3\sqrt{2}$ получим L .

$$(3; 3) - \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3; -3) - \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(-3; 3) - \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(-3; -3) - \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Итого, получаются ~~$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k$~~

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

А сам периметр (наибольший) равен наибольшей длине отрезков, плюс длина дуг, то есть $16 + 5\pi$. $M = 16 + 5\pi$

Ответ: $M = 16 + 5\pi$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 5

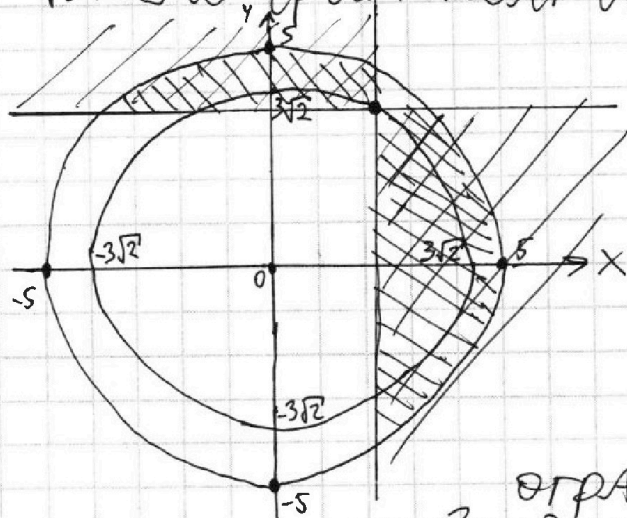
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по y -коств. $\sin$ угла этой точки.

У нас наоборот $x = \sin$, $y = \cos$, но от перемены положения осей, окружность не меняет положение и размер. Коэффициент $3\sqrt{2}$ лишь увеличивает радиус окружности. Докажем, что все такие точки лежат на расстоянии $3\sqrt{2}$ от точки $(0;0)$: $\rho =$

$$= \sqrt{(3\sqrt{2}\sin\alpha - 0)^2 + (3\sqrt{2}\cos\alpha - 0)^2} = \sqrt{18(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ ч.т.в.}$$

Рассмотрим получающуюся фигуру.



Границами фигуры являются 2 перпендикулярных отрезка, параллельных осям, проходящих через точку $(3\sqrt{2}\sin\alpha; 3\sqrt{2}\cos\alpha)$, ограниченных окружностью $x^2 + y^2 = 25$. А также границы



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Этой окружности, отсекаемые 2-мя
выше упомянутыми отрезками.

Т.к. ~~отрезки~~ $\perp$, дуги, которые
они отсекают равны в сумме 180° .
Это также верно из-за симметрии
~~картинки~~ рисунка. Поэтому, при
любом положении точки, сумма
длин ~~дуговой поверхности~~
на границе фигуры — $\frac{2\pi \cdot 5}{2} = 5\pi$
(половина длины окружности $x^2 + y^2 = 25$,
т.к. её радиус — 5). Рассмотрим
длину отрезков. Их наибольшая
длина — 10; когда точка имеет
координаты $(0; 3\sqrt{2})$; $(0; -3\sqrt{2})$, такую
длину имеет вертикальный отрезок
а в точках $(3\sqrt{2}; 0)$; $(-3\sqrt{2}; 0)$ — горизонтальный. (В этих случаях
отрезки совпадают с диаметрами)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. Второе неравенство задаёт круг с радиусом 5 и центром в точке $(0; 0)$. Корни ~~второго~~ первого неравенства $(3\sqrt{2}\sin\alpha; 3\sqrt{2}\cos\alpha)$. Соответственно первое неравенство ~~выполняется~~ ~~если~~ равносильно:

$$\begin{cases} x \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \geq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$$

То есть, на самом деле задаёт следующую картину:



Все такие точки располагаются на окружности с центром $(0; 0)$ и радиусом $3\sqrt{2}$. Поскольку на единичной окружности координата каждой точки по x - соотв. $\cos$ угла этой точки, а коорд.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - y^3 - 3xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy.$$

30 ~~180-150=30~~

$$(\sin \pi x + \sin \pi y)$$

$$-2-2y$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

$$x^2 + xy + y^2 - 3xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = 1$$

$$90 - 150 = -60$$

$$x + y = -2$$

$$1$$

$$\frac{12}{(k-1)k}$$

$$\frac{(k-3)(k-2)}{1 \cdot 2}$$

$$\frac{(k-3)(k-2)(k-1)k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} =$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = -8$$

$$\sin^2 \pi x - \frac{1}{2} \cos(\pi x + \pi y) = \cos^2 \pi x + \frac{1}{2} \cos \pi y = \frac{k!}{4! \cdot (k-4)!} =$$

$$- (2y^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3xy) = (k-3)(k-2)(k-1)k$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\frac{1}{2} (\cos(\pi x - \pi y) + \cos(\pi x + \pi y))$$

$$\frac{1}{2} \cos \pi y = \frac{(k-2)!}{2! \cdot (k-4)!}$$

$$(-2-2y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy =$$

$$\operatorname{tg} \pi x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x + \pi y}{2} = 1$$

$$= \frac{(k-3)(k-2)}{2}$$

$$= -2x^2 - 2xy - 2y^2 - 2x^2y - 2xy^2 - 2y^3 - 3xy =$$

$$C_k^y \rightarrow$$

$$\frac{k!}{y! (k-y)!}$$

$$= \frac{(k-y-1)! (k-y)}{(k-2)! (k-2-y)!}$$

$$(k-y-1)(k-y)$$

$$C_{k-2}^{y-2} =$$

$$\frac{k-2!}{(y-2)! (k-2-y)!}$$

$$= \frac{(k-y-1)! (k-y)}{(k-2)! (k-2-y)!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = X \cdot 1111; X \in \{1, 2, \dots, 9\} \quad \text{tg}$$

$$1111 = 11 \cdot 101; 101 - \text{простое.}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$101; B = 101 \cdot Y; X \in \{1, 2, \dots, 9\} \quad (202)$$

$$(11) \cdot (33) = (202); (6666)$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$\alpha = \frac{\pi X + \pi Y}{2} \quad \beta = \frac{\pi X - \pi Y}{2}$$

$$2 \sin \frac{\pi X + \pi Y}{2} \cos \frac{\pi X - \pi Y}{2} = \sin(\pi X) + \sin(\pi Y)$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$(X + Y) = 2$$

$$X - Y = 1$$

$$X \neq 1, Y \neq 1; X \neq 0, Y \neq 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{2}{XY} = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{Y+1} + \frac{2}{(X-1)(Y+1)}$$

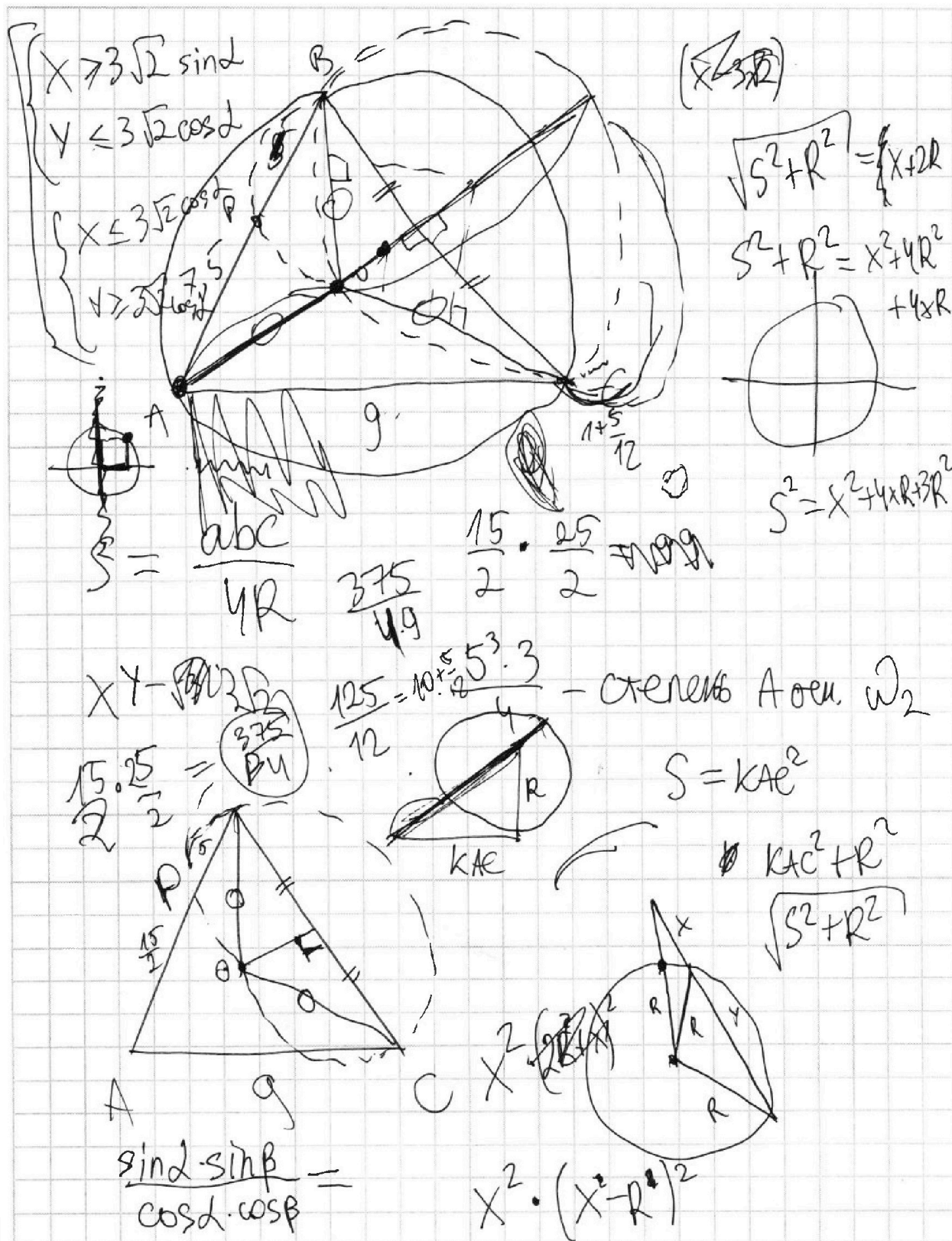
$$\text{tg} \alpha = \frac{1}{\text{tg} \beta} \quad \text{tg} \alpha + \text{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad X = 2, Y = 1$$

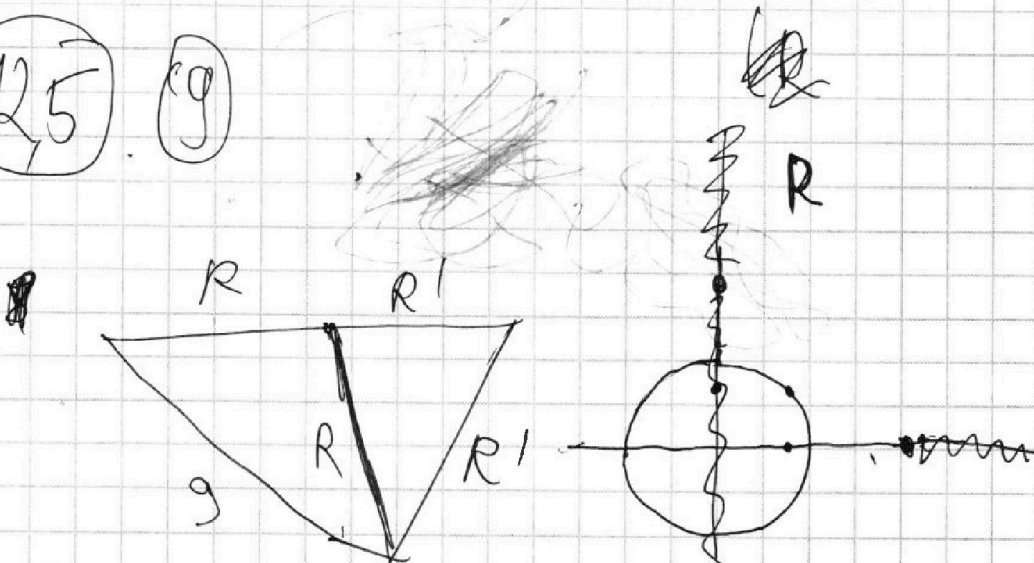
$$\frac{Y + X + 2}{(X-1)(Y+1)} = \frac{Y + 1 + X - 1 + 2}{(X-1)(Y+1)}$$

$$\frac{C_{k-2}^2}{C_k^4}$$

$$(Y + X + 2)(X-1)(Y+1) = (Y + X + 2)(XY)$$

$$(X-1)(Y+1) = XY \quad \left| k + \frac{4}{k} \quad C_k^4; C_{k-2}^2 \right.$$







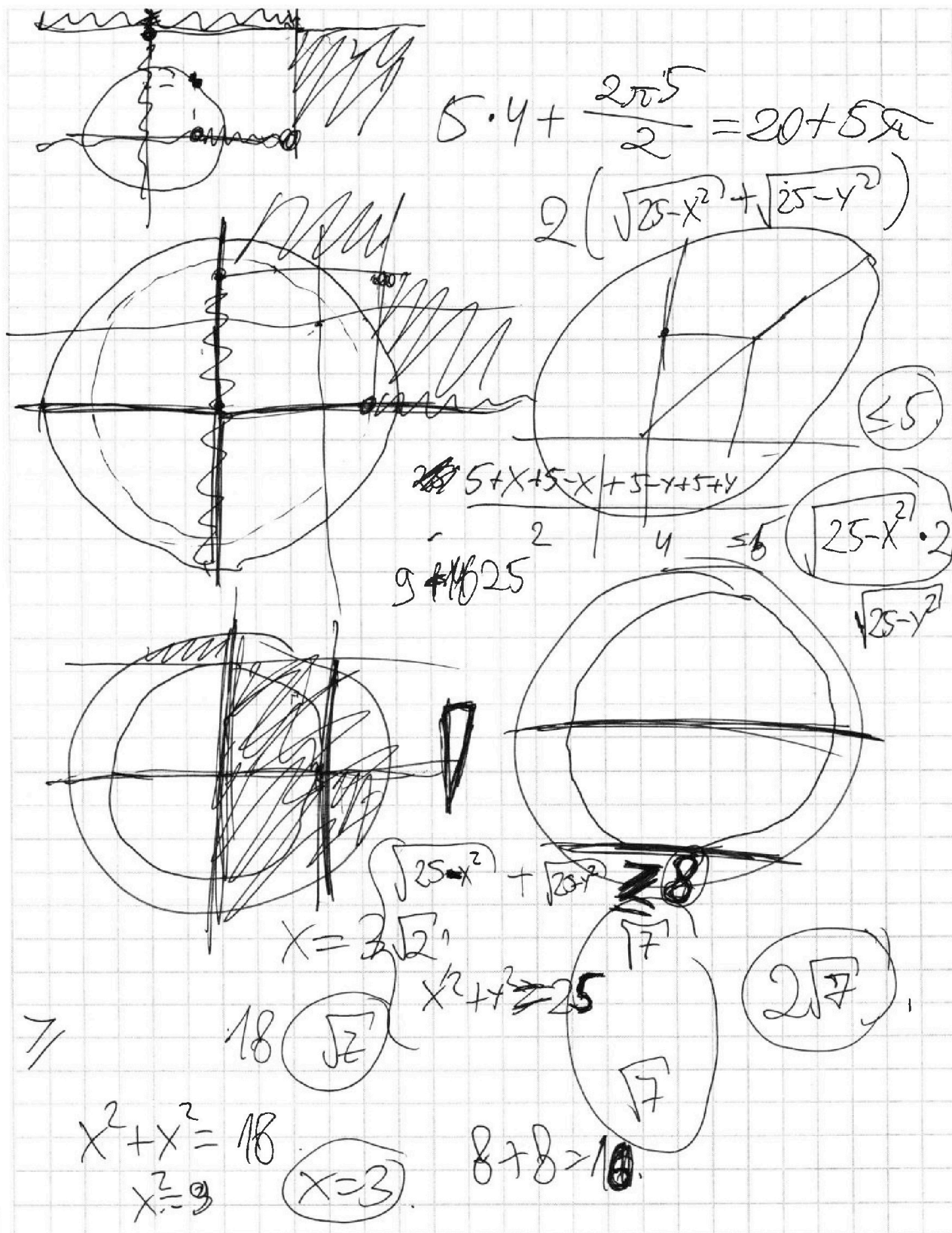
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



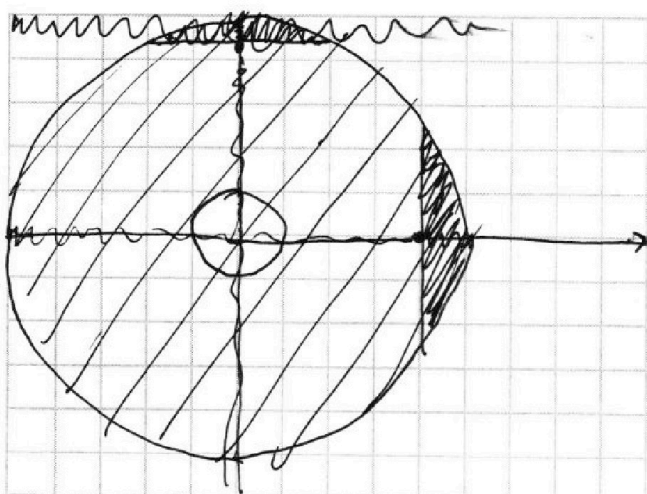


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1,4

(4,2)

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}.$$

$$\frac{x}{5} \in [-1; 1]$$

$-5; 5$

$$\frac{y}{4}$$

$-4; 4$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\frac{a-b}{a+b} =$$

$$\cancel{a-b} = \cancel{a+b}.$$

$$x =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$C_k^{x-2} = \frac{(-y-2)^3 - y^3 - 3y(-y-2)}{(k-2)!(k-y-1)(k-y)} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{2}{(x-1)(y-1)}$$

$$\frac{C_{k-2}^{x-2}}{C_k^y} = \frac{(y-2)!(k-y-2)!}{k!(k-y-1)(k-y)} = \frac{(y-1)y}{(k-y+1)(k-y)}$$

$$(y-1)y \quad (-2) \quad \frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{(k-2)!}{(k-y-2)!} = \frac{(k-y+1)(k-y)(k-y+1)}{(k-y-2)!} \quad \boxed{x+y=2} \quad \boxed{x+y=-2}$$

$$\frac{k!}{(k-y)!} = (k-y+1)(k-y+2) \quad \boxed{x-y=1}$$

$$\frac{(y+2)^3 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8}{(k-2)!(k-y-1)(k-y)} = \frac{12y+8}{k(k-1)} = \frac{12y+8}{k(k-1)}$$

$$\frac{y!(k-y)!}{y \cdot (y-1)}$$

$$\boxed{30} \quad 6(5) \quad x = -y-2 \quad 16 - 12 + 12 - 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

